

Übungen zur Vorlesung “Gewöhnliche Differentialgleichungen”

Übungsblatt , Abgabe: Nicht erforderlich, da Vorbereitung auf die Klausur.

Aufgabe 1: Lösen Sie folgende Anfangswertaufgabe

(a) $y' = xy, y(0) = 1$

(b) $y' + y = x, y(0) = 0$

(c) $y' = \frac{y^2}{x^2}, y(1) = 1$

(d) $y' = 1 + \frac{y}{x}, y(1) = 0.$

Aufgabe 2: Wie lautet der Fixpunktsatz von Banach?

Aufgabe 3: Sei $f(x) \in C[a, b]$ und $f > 0$ in $[a, b]$. Sei $u \in C^2[a, b]$ eine Lösung von $u'' = f(x)u$.

Zeigen Sie: u kann in (a, b) kein positives Maximum haben.

Aufgabe 4: Wir betrachten

$$y_1' = ay_1, \quad y_2' = 2y_1 + ay_2$$

mit einer Konstanten $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Der Gleichgewichtspunkt $(0, 0)^T$ ist asymptotisch stabil, falls $a < 0$.

Aufgabe 5: Welche der Differentialgleichungen in Aufgabe 1 sind exakt? Bestimmen Sie für die nichtexakten einen integrierenden Faktor.

Aufgabe 6: Das Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \lambda a_1 + a_0 = 0$$

habe die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ mit den Vielfachheiten $\sigma_1, \dots, \sigma_m$.

(a) Geben Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0 = 0$$

an.

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 1$$

an.

Aufgabe 7: Zeigen sie, daß es eine Funktion $\phi(x, y)$ mit

$$d\phi = xy^2dx + x^2ydy$$

gibt und bestimmen Sie eine solche Funktion ϕ .

Aufgabe 8: Berechnen Sie die Greensche Funktion von

$$-y'' + y = f(x), \quad y(0) = y(1) = 0.$$