Prof. Dr. F. Natterer SS 2000

Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen"

Übungsblatt 9 , Abgabe: 30.06.2000

Aufgabe 33: (4 Punkte)
Sei J_ν die Bessel-Funktion 1. Art der Ordnung ν. Zeigen Sie:

$$J_\nu(x)J'_{-\nu}(x) - J'_\nu(x)J_{-\nu}(x) = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x} \quad , \qquad x > 0 \ .$$

Aufgabe 34: (4 Punkte)

Sei $w \in C[0,p]$, und sei f die Fortsetzung von w auf $\mathbb{R}^1$ als Funktion der Periode p.

(a) Zeigen Sie, daß
$$\mathcal{L}f = \frac{1}{1-e^{-sp}}\mathcal{L}w \ ,$$
wobei $\mathcal{L}w$ die Laplace-Transformation der durch 0 auf $\mathbb{R}^1$ fortgesetzten Funktion w ist.

(b) Berechnen Sie die Laplace-Transformation der Funktion

Aufgabe 35: (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das System 1. Ordnung
$$y' + \frac{1}{x}Qy = 0 \ ,$$
wobei Q eine konstante (n,n)-Matrix bedeutet.

(b) Zeigen Sie, daß die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} y' + \frac{1}{x} Q y &= f \quad \text{in} \qquad a \le x \le b\,, \quad 0 < a < b\,, \\ y(a) - y(b) &= g\,, \end{aligned}$$

genau dann für alle f, g eindeutig lösbar ist, wenn die Matrix $e^{Q \log(a/b)}$ nicht den Eigenwert 1 hat.

(c) Geben Sie die Greensche Funktion für das Randwertproblem in (a) mit $g = 0$ an für den Fall, daß es eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 36: (4 Punkte)
Berechnen Sie die Greensche Funktion der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} y'' + \tfrac{p}{x} y' + \tfrac{q}{x^2} y &= f\,, \\ y(a) = y(b) &= 0\,. \end{aligned}$$

Dabei seien p, q komplexe Zahlen und $0 < a < b$.