Prof. Dr. F. Natterer SS 2000

Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen"

Übungsblatt 7 , Abgabe: 9.06.2000

Aufgabe 25: (4 Punkte)
Sei A die (n,n)-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & & \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix} .$$

Dabei seien $a_0, \dots, a_{n-1}$ komplexe Zahlen.

Das Polynom $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ habe die paarweise verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ mit den Vielfachheiten $\sigma_1, \dots, \sigma_m$. Zeigen Sie: Die Jordansche Normalform von A besteht aus m Jordan-Kästchen der Längen $\sigma_1, \dots, \sigma_m$.

Aufgabe 26: (4 Punkte)
Sei λ ein Eigenwert von A und $c_1, \dots, c_r$ linear unabhängige Hauptvektoren zu λ, d.h.

$$(A - \lambda I)c_k = c_{k-1} \ , \qquad k = 1, \dots, r \ , \quad c_0 = 0 \, .$$

Zeigen Sie, daß

$$y_k(x) = (c_k + xc_{k-1} + \cdots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}c_1)e^{\lambda x} \ , \quad k = 1, \dots, r \, ,$$

linear unabhängige Lösungen von $y' = Ay$ sind.

Aufgabe 27: (8 Punkte)
Lösen Sie die Anfangswertaufgaben

(a) $y'' + y' + 3y = x^2, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 0.$

(b) $y''' + 2y'' + y' = \sin x, \ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$

Überprüfen Sie Ihr Resultat mit MAPLE.

Aufgabe 28: (4 Punkte)
Geben Sie ein Fundamentalsystem an für das System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + \tfrac{1}{2}y_2 - \tfrac{1}{2}y_3 + 1 \\ y_2' &= \tfrac{3}{2}y_2 - \tfrac{1}{2}y_3 - 2 \\ y_3' &= \tfrac{1}{2}y_2 + \tfrac{1}{2}y_3 + x \end{aligned}$$

und lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y_1(0) = 0 \ , \quad y_2(0) = 1 \ , \quad y_3(0) = -1 \, .$$

Überprüfen Sie Ihr Resultat mit MAPLE.