Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen"

Übungsblatt 6 , Abgabe: 2.06.2000

Aufgabe 21: (4 Punkte)
Sei $c(t) = a(t) + ib(t)$. Wir betrachten die komplexe Differentialgleichung $z' = cz$.

(a) Schreiben Sie ein äquivalentes lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen für Real- und Imaginärteil von z auf.

(b) Zeigen Sie, daß $v(t) = |z(t)|^2$ einer linearen Differentialgleichung genügt.

(c) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des Systems aus (a) mit

$$a = \cos t \quad , \quad b = \sin t$$

und berechnen Sie dessen Wronski-Determinante.

Aufgabe 22: (4 Punkte)
Seien $a, b \in C^1(\mathbb{R}^2)$ mit $a^2 + b^2 > 0$. Zeigen Sie:

(a) Eine Funktion $w \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ist genau dann Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$aw_x + bw_y = 0 \ ,$$

wenn w entlang aller Lösungen von $x' = a(x, y)$, $y' = b(x, y)$ konstant ist.

(b) Sei $C : x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, $0 \le s \le 1$, eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ mit $\varphi, \psi \in C^1[0, 1]$ und $a(\varphi(s), \psi(s))\psi'(s) - b(\varphi(s), \psi(s))\varphi'(s) \neq 0$. Zeigen Sie, daß es in einer Umgebung von C eine Lösung w der partiellen Differentialgleichung gibt, welche entlang C vorgeschriebene Werte $w(\varphi(s), \psi(s)) = \chi(s)$, $\chi \in C^1[0, 1]$ annimmt.

Aufgabe 23: (4 Punkte)
Sei $A(t)$ eine stetige (n, n)-Matrix mit der Periode p, d.h. $A(t + p) = A(t)$. Sei Y ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine invertierbare Matrix C mit $Y(t + kp) = Y(t)C^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Zu jedem Eigenwert λ von C gibt es eine Lösung y von $y' = Ay$ mit $y(t+p) = \lambda y(t)$.

Aufgabe 24: (4 Punkte)
Sei $A(t)$ eine im Intervall J stetige schiefsymmetrische (d.h. $A^T = -A$) Matrix, und sei Y ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$. Zeigen Sie: Ist Y unitär (d.h. $Y^T Y = I$) für ein $x_0 \in J$, so ist Y unitär in ganz J.