Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen"

Übungsblatt 3 , Abgabe: Fr, 12.05.00, 11.00 Uhr

Aufgabe 9: (4 Punkte)
Die Orthogonaltrajektorien einer Kurvenschar sind diejenigen Kurven, welche jede Kurve der Schar orthogonal schneiden.

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf für die Orthogonaltrajektorien der Schar $F(x,y,c) = 0$. Nehmen Sie an, daß die partiellen Ableitungen von F nicht verschwinden.

(b) Berechnen Sie die Orthogonaltrajektorien der Hyperbelschar

$$y^2 - x^2 = c^2 \ .$$

(c) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf für die Orthogonaltrajektorien der Schar aus Aufgabe 1.

Aufgabe 10: (4 Punkte)
Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertaufgaben:

$$\begin{array}{lrcl} (a) & y' &=& y^2 - 1 &, \ y(0) &=& \frac{1}{3} \ , \\ (b) & y' &=& -\frac{y}{x^2-4x} &, \ y\left(\frac{81}{20}\right) &=& 1 \ , \\ (c) & y' &=& \frac{y-\sqrt{x^2-y^2}}{x} &, \ y(1) &=& 0 \ , \\ (d) & y' - y &=& xy^5 &, \ y(0) &=& 1 \ . \end{array}$$

Aufgabe 11: (4 Punkte)
Sei $a \in C(I)$ und $x_0 \in I$. $y \in C^1(I)$ erfülle

$$y'(x) \le a(x)y(x) \quad , \quad y(x_0) \le y_0 \ .$$

Zeigen Sie: In I gilt

$$y(x) \le y_0 e^{A(x)} \quad , \qquad A(x) = \int\limits_{x_0}^{x} a(\xi) d\xi \ .$$

<u>Hinweis:</u> Sei z die Lösung von $z' = az$, $z(x_0) = y_0$. Betrachten Sie die Funktion y/z.

Aufgabe 12: (4 Punkte)
Seien φ_i, ψ_i stetig differenzierbare Funktionen mit $\psi_0\varphi_1 - \psi_1\varphi_0 \neq 0$. Geben Sie eine Riccatische Differentialgleichung an, so daß für alle Konstanten c_1, c_0, welche nicht beide verschwinden, die Funktion

$$y = \frac{\psi_0 c_0 + \psi_1 c_1}{\varphi_0 c_0 + \varphi_1 c_1}$$

Lösung dieser Differentialgleichung ist.