**Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen"**

Übungsblatt 2 , Abgabe: Fr, 5.05.00, 11.00 Uhr

---

**Aufgabe 5:** (4 Punkte)
Seien $a$, $c$ konstant und $s(x) = (b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)e^{cx}$.
Zeigen Sie, daß es immer eine Lösung von $y' = ay + s$ der Form

$$x^r(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)e^{cx}$$

mit $r = 0$ für $a \neq c$ und $r = 1$ für $a = c$ gibt und berechnen Sie eine solche.

**Aufgabe 6:** (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie, daß der lineare Raum aller Funktionen aus $C(0,1]$ mit beschränkter Norm

$$\|f\| = \sup_{(0,1]} |\frac{1}{x} f(x)|$$

ein Banachraum ist.

(b) Sei $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}^1)$ und für $0 < x \leq 1$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^1$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq \frac{L}{x}|y_1 - y_2| , \qquad L < 1 .$$

Zeigen Sie, daß das Anfangswertproblem

$$y' = f(x,y) , \qquad y(0) = y_0$$

genau eine Lösung besitzt.

**Aufgabe 7:** (5 Punkte)
Sei $D_M = \{y \in C^1[a,b] \, : \, \int\limits_a^b (y^2 + y'^2)dx \leq M^2\}$.
Zeigen Sie: $D_M$ ist relativ kompakt in $C[a,b]$ (mit der Norm des maximalen Betrages).

**Aufgabe 8:** (4 Punkte)
Lösen Sie die Anfangswertaufgaben

$$\text{(a)} \quad y' = 2xy + x , \quad y(0) = 1 \qquad \text{(b)} \quad y' = \frac{2}{x}y + 2x^3 , \quad y(2) = 20 .$$