# Skript Numerische Bildverarbeitung

Frank Wübbeling

21. April 1997

# Kapitel 1

# Einleitung

# Kapitel 2

# Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden wir einige Sätze aus der Integralrechnung mehrerer Veränderlicher und der Funktionalanalysis zusammentragen. Die Beweise sind immer sehr kurz gehalten, ausführlich finden sie sich im Rudin und im Forster.

## 2.1 Fouriertransformation auf $\mathcal{S}$

Nach der Einleitung müssen wir uns näher mit der Fouriertransformation und der Faltung beschäftigen. Hierzu einige Vorbemerkungen:

**Lemma 2.1** *Es gilt:*

1. *Soweit nicht extra darauf hingewiesen wird, sind alle hier auftauchenden Integrale Lebesgue–Integrale.*
2. *Mit $L_1(I\!R^n)$ bezeichnen wir den Vektorraum aller Lebesgue–integrierbaren Funktionen von $I\!R^n$ nach $I\!R$ über den gesamten $I\!R^n$ modulo aller Funktionen vom Maß 0. $|f| = \int_{I\!R^n} |f(x)|\mathrm{d}x$ ist die kanonische Norm in diesem Vektorraum. Wenn die Dimension aus dem Zusammenhang klar ist, werden wir ihn kurz mit $L_1$ bezeichnen.*
3. *Satz von Fubini: Sei $f : I\!R^k \times I\!R^m \mapsto I\!R$ integrierbar. Dann gibt es eine Funktion $g$ mit $f = g$ f.ü., so daß $g(\cdot, y)$ integrierbar ist, und*
$$\int_{I\!R^{k+m}} f(x,y)d(x,y) = \int_{I\!R^m} \int_{I\!R^k} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
*Insbesondere gilt*
$$\int\int f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\int f(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

4. *Seien $f, g \in L_1$ und $g$ f.ü. beschränkt. Dann ist $fg \in L_1$.*

5. *Sei $\varphi$ eine bijektive Abbildung von $I\!R^n$ nach $I\!R^n$, $f \in L_1$. Dann gilt:*

$$\int_{I\!R^n} f(x)\mathrm{d}x = \int_{I\!R^n} f(\varphi(x))|\det((D\varphi)(x))|\mathrm{d}x.$$

6. *Differenzierbarkeit: Sei $f : I\!R^k \times I\!R \mapsto I\!R$. Sei $f(\cdot, t)$ integrierbar und $f(x, \cdot)$ differenzierbar. Weiter sei $|\frac{df}{dt}(x,t)| \leq F(x)$ für eine integrierbare Funktion $f$. Dann gilt:*

$$\frac{d}{dt}(\int f(x,t)\mathrm{d}x) = \int \frac{df}{dt}(x,t)\mathrm{d}x.$$

7. *Satz von der majorisierten Konvergenz:*

   *Sei $f_k \in L_1$, $k \in I\!N$. $f_k$ konvergiere f.ü. punktweise gegen eine Funktion $f$, und es sei $|f_k(x)| \leq F(x)$ für eine integrierbare Funktion $F$. Dann gilt:*

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

8. *Es gilt:*

$$\int_{I\!R^n} e^{-x^t x}\mathrm{d}x = (2\pi)^{n/2}.$$

Für die erste Definition benötigen wir noch eine Kurzschreibweise. Sei $x \in I\!R^n$ und $\alpha, \beta \in I\!N_0^n$. Dann definieren wir:

$$x^\beta := \Pi x_i^{\beta_i},\ D^\alpha = \Pi \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{\alpha_i}.$$

**Definition 2.2** *Wir definieren den Schwarzschen Raum $\mathcal{S}$ durch*

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(I\!R^n) := \{f \in C^\infty(I\!R^n) : \sup|x^\beta D^\alpha f| < \infty\}.$$

**Korollar 2.3** *Es gilt:*

1. *$\mathcal{S}$ ist nichtleer.*

2. *$\mathcal{S} \subset L_1$.*

3. *Sei $f \in S$. Dann ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.*

**Beweis:**

1. $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}$.

2. Sei $n = 1$. Sei $f \in S$, dann ist $|(x^2+1)f(x)|$ beschränkt, also $|f(x)| \leq \frac{1}{x^2+1}$, also ist $f$ integrierbar, denn $f$ ist stetig und $\frac{1}{x^2+1}$ ist integrierbar.

3. Es gilt $\sup(|x|^2 f(x)) < \infty$.

Mit Hilfe des Vektorraums $\mathcal{S}$ definieren wir nun die Fourier– Transformierte einer Funktion. Die Fouriertransformierte ist eines der wichtigsten Hilfsmittel der Bildverarbeitung. Wir definieren die Fouriertransformation hier zunächst nur für Funktionen aus $\mathcal{S}$. Aus der Definition wird klar, daß man sie entsprechend für alle $L_1$-Funktionen definieren kann. Wir werden den Definitionsbereich im nächsten Kapitel auf nicht integrierbare Funktionen ausweiten.

**Definition 2.4** *Fouriertransformation: Sei $f \in \mathcal{S}(I\!R^n)$. Dann definieren wir die Fouriertransformierte $\widehat{f}$ und die inverse Fouriertransformierte $\widetilde{f}$ durch*

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{I\!R^n} e^{-ix\xi} f(x) \mathrm{d}x \\
\widetilde{f}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{I\!R^n} e^{ix\xi} f(x) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

*Die vektorielle Multiplikation ist als Skalarprodukt zu verstehen, d.h. $x\xi = (x, \xi) = x^t \xi$.*

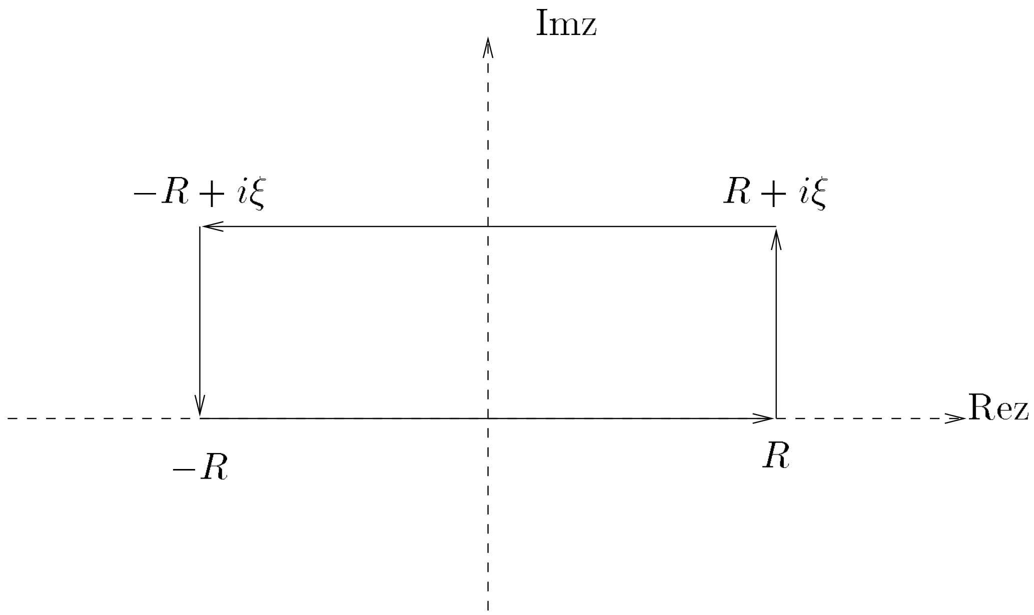
Zur Verdeutlichung rechnen wir zunächst

**Beispiel 2.5** *Sei $f(x) = e^{-|x|^2}/2$. Sei zunächst $n = 1$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{I\!R} e^{-x^2/2 - ix\xi} f(x) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{I\!R} e^{-(x+i\xi)^2/2 - \xi^2/2} f(x) \mathrm{d}x \\
&= e^{-\xi^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{I\!R} e^{-(x+i\xi)^2/2} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

*Zur Berechnung dieses Integrals verwenden wir einen Standardtrick aus der Funktionentheorie und betrachten die folgenden Integrale als Riemann-Integrale. Die Funktion $f(x)$ ist holomorph, also verschwindet jedes Integral über einen geschlossenen komplexen Integrationsweg dieser Funktion. Insbesondere gilt für jede positive reelle Zahl $R$ (siehe Zeichnung)*

$$\int_{-R}^{R} f(z + i\xi) dz = \int_{-R}^{R} f(z) dz + i \int_0^{\xi} f(R + iz) - i \int_0^{\xi} f(-R + iz) dz.$$




*Wir betrachten nun den Grenzwert der rechten Seite für* $R \to \infty$.

$$\int_0^\xi |f(R+iz)|dz = \int_0^\xi |e^{-R^2+z^2}|dz = e^{-R^2}\int_0^\xi |e^{z^2}|dz \to 0.$$

*Ebenso verschwindet das dritte Integral auf der rechten Seite. Nach Vorbemerkung 2.1.8 konvergiert damit die linke Seite gegen* $\sqrt{2\pi}$ *und es folgt* $\widehat{f} = f$ *oder:*

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-\xi^2/2}.$$

**Korollar 2.6** *Eigenschaften der Fouriertransformation. Sei* $f \in S(IR^n)$.

1. $$\left(\widehat{D^\alpha f}\right)(x) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

2. $$\left(\widehat{x^\alpha f}\right)(x) = i^{|\alpha|}D^\alpha \widehat{f}.$$

3. *Sei* $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ *für ein* $0 \neq \lambda \in IR$.
$$\widehat{f}_\lambda(\xi) = \lambda^{-n}\widehat{f}(\frac{\xi}{\lambda}).$$

4. *Sei* $f_y(x) = f(x+y)$ *für ein* $y \in IR^n$.
$$\widehat{f}_y(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{iy\xi}.$$

5. *Sei* $(f*g)(x) = \int f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$. *Dann gilt:*

$$(f*g)\widehat{\ }(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)(2\pi)^{n/2}.$$

Beweis:

1. Sei ohne Einschränkung $n=1$, $\alpha=(1)$.

$$\begin{aligned}\widehat{(f')}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f'(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} i\xi e^{-ix\xi}f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt durch Induktion.

2. Sei ohne Einschränkung $n=1$, $\alpha=(1)$.

$$\begin{aligned}\left(\widehat{x^\alpha f}\right)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} xf(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)x\cdot e^{-ix\xi}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}i\int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}e^{-ix\xi}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}i\frac{\partial}{\partial\xi}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}iD^\alpha\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt durch Induktion.

3.

$$\begin{aligned}\widehat{f_\lambda}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f_\lambda(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(\lambda x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda^{-n}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi/\lambda}\mathrm{d}x \\ &= \lambda^{-n}\widehat{f}(\xi/\lambda)\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\widehat{f_y}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f_y(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x+y)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi+iy\xi}\mathrm{d}x \\ &= e^{iy\xi}\widehat{f}(\xi)\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
(\widehat{f * g})(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{I\!R^n} \int_{I\!R^n} f(x-y) g(y) \mathrm{d}y e^{-ix\xi} \mathrm{d}x \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{I\!R} g(y) e^{-iy\xi} \int_{I\!R^n} f(x-y) e^{-i(x-y)\xi} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
&= (2\pi)^{n/2} \widehat{g}(\xi) \widehat{f}(\xi)
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Sätze zeigen wir zunächst, daß die Bezeichung inverse Fouriertransformation gerechtfertigt ist, es gilt nämlich $\widehat{\widetilde{f}} = \widetilde{\widehat{f}} = f$.

**Satz 2.7** *Der Operator* $\widehat{}$ *ist eine Bijektionvon* $\mathcal{S}$ *auf* $\mathcal{S}$. *Sei* $f \in \mathcal{S}$. *Dann gilt*

$$f = \widehat{\widetilde{f}} = \widetilde{\widehat{f}}.$$

Beweis:

1. $\widehat{f} \in S$: Nach der Vorbemerkung ist $D^\alpha \widehat{f} = (-i)^{|\alpha|} (\widehat{x^\alpha f})$. Insbesondere existiert die Ableitung und damit $\widehat{f} \in C^\infty(I\!R)$. Es gilt

   $$\xi^\beta D^\alpha \widehat{f} = (-i)^{|\alpha|} \xi^\beta (\widehat{x^\alpha f}) = (-i)^{|\alpha|} i^{-|\beta|} (\widehat{D^\beta x^\alpha f}).$$

   Wegen

   $$|\widehat{f}(\xi)| = (2\pi)^{-n/2} | \int_{I\!R^n} f(x) e^{-ix\xi} \mathrm{d}x | \leq (2\pi)^{-n/2} \int_{I\!R^n} |f(x)| \mathrm{d}x$$

   ist der Betrag einer Fouriertransformierten nach oben beschränkt und damit auch der Betrag von $\xi^\beta D^\alpha \widehat{f}$ als Fouriertransformierter einer Funktion aus $\mathcal{S}$.

2. Seien $f$, $g$ aus $\mathcal{S}$.

   $$\begin{aligned}
   \int_{I\!R^n} \widehat{f}(x) g(x) \mathrm{d}x &= (2\pi)^{-n/2} \int_{I\!R^n} \int_{I\!R^n} f(\xi) e^{-ix\xi} \mathrm{d}\xi g(x) \mathrm{d}x \\
   &= (2\pi)^{-n/2} \int_{I\!R^n} f(\xi) \int_{I\!R^n} e^{-ix\xi} g(x) \mathrm{d}x \mathrm{d}\xi \\
   &= \int_{I\!R^n} \widehat{g}(\xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi
   \end{aligned}$$

3. Sei $\phi \in S$ und wie üblich $f_x(y) = f(x+y)$.

   $$\begin{aligned}
   \int_{I\!R^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} \phi(\xi) \mathrm{d}\xi &= \int_{I\!R^n} \widehat{f_x}(\xi) \phi(\xi) \mathrm{d}\xi \\
   &= \int_{I\!R^n} f_x(y) \widehat{\phi}(y) \mathrm{d}y \\
   &= \int_{I\!R^n} f(x+y) \widehat{\phi}(y) \mathrm{d}y
   \end{aligned}$$

4. Sei $\phi_\epsilon(x) = \phi(\epsilon x)$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\phi_\epsilon(\xi)\mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\widehat{\phi_\epsilon}(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \epsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\widehat{\phi}(y/\epsilon)\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x+\epsilon y)\widehat{\phi}(y)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Wir setzen nun $\phi(x) = e^{-|x|^2}$ und damit $\widehat{\phi} = \phi$. Alle auftretenden Integranden auf der linken und rechten Seite der Gleichung werden durch integrierbare Funktionen majorisiert, wir dürfen also den Grenzwert für $\epsilon \to 0$ betrachten und den Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden. Die linke Seite konvergiert dann gegen $\phi(0)\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\mathrm{d}\xi = (2\pi)^{n/2}\widetilde{\widehat{f}}(x)$. Die rechte Seite konvergiert gegen $f(x)\int_{\mathbb{R}^n}\phi(y)\mathrm{d}y = f(x)(2\pi)^{n/2}$. Damit gilt $\widetilde{\widehat{f}} = f$. Entsprechend zeigt man $\widehat{\widetilde{f}} = f$.

Bisher haben wir unsere Funktionen in $\mathcal{S}$ als $L_1$-Funktionen untersucht. Sei nun $L_2$ der Vektorraum der Funktionen, für die $_{\mathbb{R}^n}|f^2(x)|\mathrm{d}x$ existiert. Es gilt dann mit demselben Beweis wie in 2.3.2 $\mathcal{S} \subset L_2$. Auf $L_2$ können wir das Skalarprodukt $(f,g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x$ einführen. Dann gilt:

**Korollar 2.8** *(Parselvalsche Formel) Seien $f, g \in \mathcal{S}$. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(\xi)\overline{\widetilde{g}(\xi)}\mathrm{d}\xi.$$

Beweis: Nach dem zweiten Punkt aus dem Beweis zu Satz 2.7 gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\widetilde{f}}(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(\xi)\widehat{\overline{g}}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

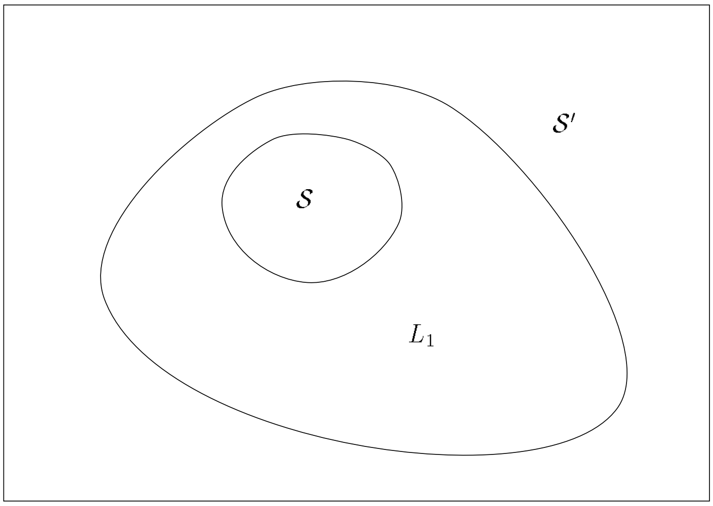
Da $\widehat{\overline{g}}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{g}(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = \overline{(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{ix\xi}\mathrm{d}x} = \overline{\widetilde{g}(\xi)}$, gilt die Behauptung. Beweis für $\widehat{}$ durch Einsetzen von $\widehat{f}$, $\widehat{g}$ für $f, g$.

**Bemerkung 2.9** *Wenn man auf $\mathcal{S}$ das Skalarprodukt $(f,g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x$ einführt, so gilt für $f, g \in \mathcal{S}$ die Parsevalsche Beziehung*

$$(f,g) = (\widehat{f},\widehat{g}) = (\widetilde{f},\widetilde{g}).$$

## 2.2 Temperierte Distributionen

Die Fouriertransformierte ist so, wie wir sie bisher definiert haben, für die Bildverarbeitung wenig hilfreich. Weder können wir unstetige Bilder verarbeiten, noch zeitkontinuierliche Signale. Die alte Definition verlangt zumindest die Integrierbarkeit von Funktionen, wir können also nicht einmal die Transformierte einer konstanten, nicht verschwindenden Funktion berechnen. Um dies zu tun, müssen wir den Definitionsbereich der Fouriertransformation wesentlich erweitern. Hierzu betten wir die Funktionen in den übergeordneten Vektorraum $\mathcal{S}'$ der Distributionen ein. Hierdurch verallgemeinern wir den Funktionsbegriff. Auf diesem übergeordneten Vektorraum definieren wir nun eine neue Fouriertransformation, die für die Funktionen aus $\mathcal{S}$ mit der alten Definition übereinstimmt. In der physikalischen und Ingenieur–Literatur wird der Distributionsbegriff häufig gleichbedeutend mit dem Funktionsbegriff verwendet.




Einbettung der Funktionen in die Distributionen

**Definition 2.10** *Ein lineares Funktional $T : \mathcal{S} \to C$ heißt temperierte Distribution, falls es Konstanten $C \in I\!R$ und $k, l \in I\!N$ gibt, so daß für jede Funktion $f \in \mathcal{S}$ gilt*

$$|Tf| \leq C \sum_{|\alpha|\leq k, |\beta|\leq l} |f|_{\alpha,\beta}$$

*mit $|f|_{\alpha,\beta} := \sup_{x\in I\!R^n} |x^\beta D^\alpha f(x)|$. Den Vektorraum der Distributionen nennen wir $\mathcal{S}'$.*

Eine temperierte Distribution ist also eine Funktion von $\mathcal{S}$ nach $I\!R$, die in ihrem Wachstum beschränkt ist. Die Distributionen sind für uns Erweiterungen des Funktionsbegriffs, wir müssen dort also zunächst unsere Funktionen wiederfinden. Wir betrachten deshalb

**Beispiel 2.11**

1. *Eine meßbare Funktion $g$ heißt schwach wachsend, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit*
$$\int_{rz^n} |g(x)|(1+|x|)^k \mathrm{d}x < \infty.$$
*Insbesondere ist $|x|^m$ schwach wachsend, $e^{|x|}$ ist nicht schwach wachsend.*

   *Sei $g$ schwach wachsend. Definiere $T_g f := \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(x)dx$. Dann ist $Tf \in \mathcal{S}'$, denn:*
$$\begin{aligned} |Tf| &= |\int_{\mathbb{R}^n} g(x)(1+|x|)^k(1+|x|)^{-k} f(x)\mathrm{d}x| \\ &\le \int_{\mathbb{R}}^n |g(x)|(1+|x|)^k \mathrm{d}x \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-k}|f(x)| \end{aligned}$$
*Wir haben also für jede schwach wachsende Funktion eine zugehörige Distribution definiert. Wenn der Zusammenhang klar ist, werden wir häufig direkt $g$ für $T_g$ schreiben.*

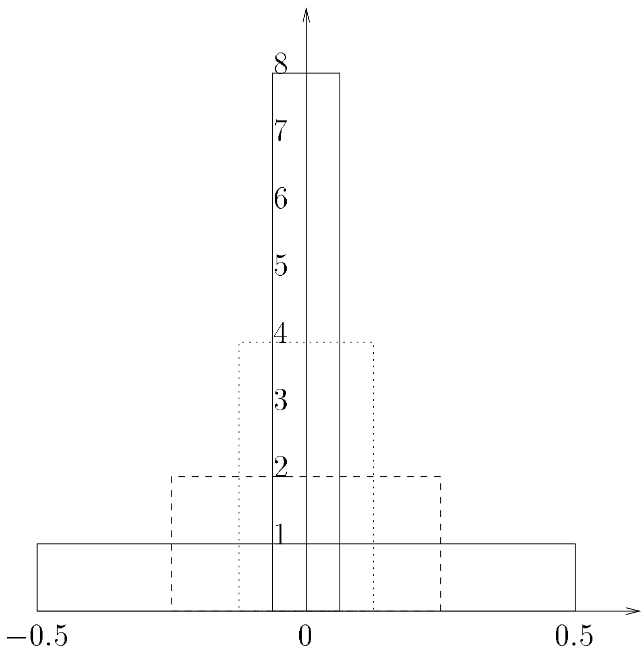
2. *Diracsche $\delta$–Distribution. Sei $f \in \mathcal{S}$. Definiere*
$$\delta(f) := f(0)$$
*$\delta$ ist Distribution, denn $|Tf| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$.*

3. *Natürlich können wir $\delta$ nicht direkt mit einer Funktion identifizieren, denn es gibt keine Funktion $g$ mit $\delta(f) = f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx$ für alle Funktionen $f \in \mathcal{S}$. Wir können uns aber $\delta$ als den Grenzwert einer Funktionenfolge vorstellen. Sei $\Phi(x) \ge 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\mathrm{d}x = 1$.*

   *Definiere $\Phi_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\Phi(\frac{1}{\epsilon}x)$. Dann ist $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\epsilon(x)\mathrm{d}x = 1$.*

   *Sei $f \in S$. Wir betrachten den Grenzwert von $T_{\Phi_\epsilon}(f)$ für $\epsilon \to 0$. Es gilt*
$$\begin{aligned} T_{\Phi_\epsilon}(f) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\epsilon(x)f(x)\mathrm{d}x \\ &= \epsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\frac{1}{\epsilon}x)f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)f(\epsilon x)\mathrm{d}x \\ &\to_{\epsilon\to 0} f(0)\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)dx = f(0) = \delta(f). \end{aligned}$$
*Der letzte Schluß folgt mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz.*

   *Damit gilt (punktweise) $T_{\Phi_\epsilon} \to \delta$. Wir wählen zur Verdeutlichung $n = 1$ und*
$$\Phi(x) := \begin{cases} 1 & |x| \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$




*Im Bild sind die Funktionen $\Phi_1$, $\Phi_{1/2}$, $\Phi_{1/4}$ und $\Phi_{1/8}$ dargestellt. Sie konvergieren punktweise gegen eine Funktion, deren Träger nur noch die 0 ist und die am Nullpunkt den Wert $\infty$ hat. Das Integral über diese Funktion sollte 1 sein. Aufgrund dieser Charakterisierung spricht man auch häufig von $\delta$-Funktion anstatt $\delta$-Distribution.*

Wir werden nun einige Operatoren auf Funktionen auf Distributionen erweitern. Sei immer $T \in \mathcal{S}'$ und $f, g \in S$.

**Definition 2.12**

1. *Sei $\alpha \in \mathbb{Z}^n$.*
$$(D^\alpha T)f := (-1)^{|\alpha|} T D^\alpha f.$$
2. *Sei $y \in \mathbb{R}^n$ und $f_y(x) := f(x+y)$.*
$$T_y f := T f_{-y}.$$
3. $$(gT)f := T(gf).$$
4. *Sei $\check{g}(x) := g(-x)$.*
$$(g * T)(x) := T(\check{g})_{-x}$$
5. $$\widehat{T} f := T \widehat{f}.$$

Wir müssen nun zeigen, daß diese Definitionen für Distributionen, die Funktionen sind, mit den üblichen Definitionen übereinstimmen. Sei daher $T = T_\phi$ und $\phi$ eine Funktion aus $\mathcal{S}$.

1. Sei ohne Einschränkung $n = 1$ und $\alpha = (1)$. Da wir immer $\phi$ und $T_\phi$ identifizieren, erwarten wir, daß $T'_\phi = T_{\phi'}$.

   $$T'_\phi f = (D^\alpha T)f = -Tf' = \int_{I\!R} \phi(x)f'(x)\mathrm{d}x = \int_{I\!R} \phi'(x)f(x)\mathrm{d}x = T_{\phi'}f.$$

2. Übung.

3. Übung.

4. $$(g * T_\phi)(x) = T_\phi(\check{g})_{-x} = \int_{I\!R^n} \phi(y)g(x-y)\mathrm{d}y = (\phi * g)(x) = (g * \phi)(x).$$

   Die Faltung einer Funktion aus $\mathcal{S}$ mit einer Distribution ist also eine Funktion, keine Distribution.

5. Hier müssen wir zeigen, daß $\widehat{T_\phi} f = T_{\widehat{\phi}} f$.

   $$\begin{aligned}
   \widehat{T_\phi} f &= T_\phi \hat{f} \\
   &= \int_{I\!R^n} \phi(\xi)\widehat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi \\
   &= \sqrt{2\pi}^{-n} \int_{I\!R^n} \phi(\xi) \int_{I\!R^n} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi \\
   &= \sqrt{2\pi}^{-n} \int_{I\!R^n} f(x) \int_{I\!R^n} \phi(\xi)e^{-ix\xi}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x \\
   &= \int_{I\!R^n} f(x)\widehat{\phi}(x)\mathrm{d}x \\
   &= T_{\widehat{\phi}} f.
   \end{aligned}$$

**Beispiel 2.13** *Sei $f \in S$.*

1. *Die $\alpha$-Ableitung der $\delta$–Distribution ist die Auswertung der $\alpha$-Ableitung an der Stelle 0.*

   $$(D^\alpha \delta)f = (-1)^{|\alpha|}\delta(D^\alpha f) = (-1)^{|\alpha|}(D^\alpha f)(0).$$

2. *Sei $n = 1$. Wir definieren die Heaviside–Funktion $H(x)$ durch*

   $$H(x) := \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*$H$ ist nicht stetig, besitzt also insbesondere keine Ableitung im klassischen Sinn. Es gilt:*

$$T_H f = \int_{I\!R} H(x) f(x) \mathrm{d}x = \int_0^\infty f(x) \mathrm{d}x.$$

*Für die Ableitung der Distribution $T_H$ gilt:*

$$(T_H') f = -T_H f' = -\int_0^\infty f'(x) = f(0) = \delta f.$$

*Im distributiven Sinn besitzt $H$ also die Ableitung $\delta$.*

3. *Die $\delta$-Funktion wird oft mit verschobenem Argument benutzt:*

$$\delta_{-y} f = \delta f_y = \delta f(\cdot + y) = f(y).$$

4. *Fouriertransformierte der $\delta$-Distribution:*

$$\widehat{\delta} f = \delta \widehat{f} = \widehat{f}(0) = \int_{I\!R^n} f(x) (2\pi)^{-n/2} \mathrm{d}x.$$

*Die Fouriertransformierte der $\delta$-Distribution ist also die Funktion $(2\pi)^{-n/2}$. Mit den Rechenregeln der Fouriertransformation gilt $\widehat{\delta_{-y}}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} e^{-i\xi y}$.*

Bemerkung:

1. Wir haben keine Multiplikation für Distributionen definiert. Die Distributionen sind für uns ein Vektorraum, keine Algebra.

2. Jede Distribution ist differenzierbar. Insbesondere besitzt jede Funktion von beschränktem Wachstum unendlich viele Ableitungen *im distributiven Sinn*. Unter Umständen ist diese Ableitung keine Funktion, sondern eine Distribution.

3. Jede Distribution, also auch jede Funktion von beschränktem Wachstum, besitzt eine Fouriertransformierte im distributiven Sinn.

Ohne Beweis zitieren wir den Satz von Plancherel: Die Fouriertransformierte einer $L_2$–Funktion ist eine $L_2$–Funktion.

**Satz 2.14** *Zu jedem $g \in L_2(I\!R^n)$ gibt es ein $\widehat{g} \in L_2(I\!R^n)$ mit $\widehat{T} g = T_{\widehat{g}}$ und $||g|| = ||\widehat{g}||$.*

## 2.3 Abtasttheoreme

In diesem Abschnitt werden wir uns mit folgender Frage beschäftigen: Sei $f$ die Dichtefunktion eines Bildes. Es sei bekannt, daß $\widehat{f}$ einen kompakten Träger hat. Wir können $f$ nur an diskreten Punkten messen (abtasten). Wieviele Abtastungen von $f$ brauchen wir, um $f$ eindeutig zu bestimmen? Die Antwort hierzu geben die Abtasttheoreme.

Als Beispiel betrachten wir zunächst die sinc-Funktion in $I\!R$. Sei

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt für $x \neq 0$

$$\widetilde{\chi(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{x} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathrm{sinc}(x)$$

mit der Definition

**Definition 2.15** *Sei $x \in I\!R^n$. Dann ist*

$$\mathrm{sinc}(x) := \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin x_k}{x_k}.$$

Nach der Vorbemerkung ist im $I\!R^1$ $\widehat{\mathrm{sinc}}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\chi(x)$. Für den $I\!R^n$ gilt entsprechend

**Satz 2.16** *Sei $\xi \in I\!R^n$.*

$$\widehat{\mathrm{sinc}}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\chi(\xi)$$

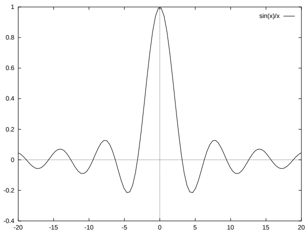
*mit der Definition*

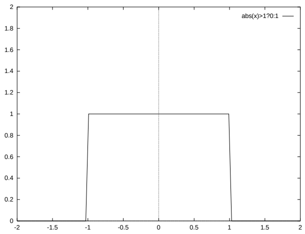
$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x_i \le 1,\ i = 1 \ldots n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

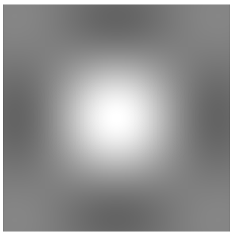
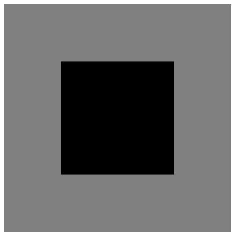
**Definition 2.17** *Eine Funktion $f \in L_2(I\!R^n)$ heißt bandbeschränkt mit Bandbreite $b$, falls $\widehat{f}(\xi) = 0$ für $|\xi| \ge b$.*

**Korollar 2.18**

1. $\mathrm{sinc}$ *ist bandbeschränkt mit Bandbreite* $1$.
2. $\mathrm{sinc}_b(x) := \mathrm{sinc}(bx)$ *hat Bandbreite* $b$.





Im Bild sind zunächst die sinc-Funktion und ihre Transformierte dargestellt. Wir stellen uns nun die linke Funktion als Helligkeitsfunktion vor. sinc ist außerhalb des Intervalls $[-\pi, \pi]$ klein. Im dritten Bild, das die zweidimensionale sinc-Funktion als Dichteplot zeigt, kann man deshalb nur einen Kreis mit Radius $\pi$ erkennen. Angenähert ist die Fouriertransformierte eines Kreises mit Durchmesser $2\pi$ also bandbeschränkt mit Bandbreite 1. 2. Umgekehrt ist die Fouriertransformierte der Kastenfunktion $\chi$ mit Kastenlänge 2 angenähert ein Kreis mit Radius $\pi$, also. Wir können daher die Faustregel aufstellen: Ein Detail der Größe $2\pi/b$ ist bandbeschränkt mit Bandbreite $b$. Je kleiner die auftretenden Details sind, umso größer ist der Träger der Fouriertransformation. Umgekehrt: Je größer der Träger der Fouriertransformation, umso kleiner sind die auftretenden Details, und umso feiner müssen wir abtasten. Dies wird bestätigt durch den folgenden Satz:

**Satz 2.19** *(Abtasttheorem von Shannon)*
*Sei $f \in L_2(I\!R^n)$ bandbeschränkt mit Bandbreite $b$ und $0 < h \leq \frac{\pi}{b}$. Dann ist $f$ eindeutig bestimmt durch die Werte $f(kh)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, und es gilt f.ü.*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(kh) \operatorname{sinc} \frac{\pi}{h}(x - kh).$$

**Bemerkung 2.20**

1. *Der Satz ist so nur richtig für $L_2$-Funktionen.*

2. *Die Bedingung $h \leq \frac{\pi}{b}$ heißt Nyquist–Bedingung. Für $h < \frac{\pi}{b}$ sprechen wir von oversampling (Überabtasten), für $h > \frac{\pi}{b}$ sprechen wir von undersampling (Unterabtasten).*

Bevor wir den Satz beweisen, stellen wir einige Sätze über Fourier–Reihen auf endlichen Intervallen zusammen.

**Satz 2.21** *Fourierreihen:*
*Sei $f \in L_2([-a,a]^n)$. Dann gilt f.ü.*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}_k e^{ikx/a}$$

*mit*

$$\widehat{f}_k = (2a)^{-n} \int_{[-a,a]^n} e^{-ikx/a} f(x) \mathrm{d}x.$$

Beweis: Forster III.

**Satz 2.22** *Parsevalsche Gleichung:*
*Seien $f, g \in L_2([-a,a]^n)$ und $\widehat{f}$, $\widehat{g}$ wie oben definiert. Dann gilt*

$$\int_{[-a,a]^n} f(x)\overline{g(x)} \mathrm{d}x = (2\pi)^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}_k \overline{\widehat{g}_k}.$$

Beweis: Sei ohne Einschränkung $a = \pi$.

$$\begin{aligned}
\int_{[-\pi,\pi]^n} f(x)\overline{g(x)} \mathrm{d}x &= \int_{[-\pi,\pi]^n} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}_k e^{ikx} \right) \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \overline{\widehat{g}_l} e^{-ilx} \right) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}_k \overline{\widehat{g}_l} \int_{[-\pi,\pi]^n} e^{i(k-l)x} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Das Integral verschwindet für $k \neq l$ und ist $(2\pi)^n$ für $k = l$, also folgt die Behauptung. Die Vertauschungen dürfen durchgeführt werden nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz.

**Satz 2.23** *Poissonsche Formel:*
*Sei $f \in S$.*

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\xi - 2\pi l) = (2\pi)^{-n/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} f(l) e^{-il\xi}.$$

Beweis: Sei $g(\xi) := \sum_l \widehat{f}(\xi - 2\pi l)$. Dann ist $g$ eine $2\pi$–periodische Funktion. Für den $k$. Fourierkoeffizienten von $g$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\widehat{g}_k &= (2\pi)^{-n} \int_{[-\pi,\pi]^n} e^{-ik\xi} g(\xi) \mathrm{d}\xi \\
&= (2\pi)^{-n} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \int_{[-\pi,\pi]^n} \widehat{f}(\xi - 2\pi l) e^{-ik\xi} \mathrm{d}\xi \\
&= (2\pi)^{-n} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \int_{[-\pi,\pi]^n} \widehat{f}(\xi - 2\pi l) e^{-ik(\xi - 2\pi l)} \mathrm{d}\xi \\
&= (2\pi)^{-n} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \int_{[-\pi,\pi]^n + 2\pi l} \widehat{f}(\xi) e^{-ik\xi} \mathrm{d}\xi \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{i(-k)\xi} \mathrm{d}\xi = (2\pi)^{-n/2} f(-k).
\end{aligned}
$$

und damit

$$
g(\xi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \widehat{g}_l e^{il\xi} = (2\pi)^{-n/2} = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} f(l) e^{-il\xi}.
$$

Zu $\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \int_{[-\pi,\pi]^n + 2\pi l} = \int_{\mathbb{R}^n}$: Die Integralbereiche, über die integriert wird, bilden eine nicht–überlappende Überdeckung des $\mathbb{R}^n$. Hier ein Beispiel für $n = 2$:

| | | |
|---|---|---|
| $[-\pi,\pi]^2 + (-2\pi, 2\pi)$ | $[-\pi,\pi]^2 + (0, 2\pi)$ | $[-\pi,\pi]^2 + (2\pi, 2\pi)$ |
| $[-\pi,\pi]^2 + (-2\pi, 0)$ | $[-\pi,\pi]^2$ | $[-\pi,\pi]^2 + (2\pi, 0)$ |
| $[-\pi,\pi]^2 + (-2\pi, -2\pi)$ | $[-\pi,\pi]^2 + (0, -2\pi)$ | $[-\pi,\pi]^2 + (2\pi, -2\pi)$ |

**Korollar 2.24** *Sei $f \in \mathcal{S}$. Dann ist*

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(2\pi l) = (2\pi)^{-n/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} f(l) e^{-il\xi}.$$

Beweis: Setze $\xi = 0$ in Satz 2.23.

Wir können diese Formel umschreiben zu

$$\int_{I\!R^n} f(x)\mathrm{d}x = (2\pi)^{-n/2}\widehat{f}(0) = \sum_l f(l) - (2\pi)^{n/2} \sum_{l \neq 0} \widehat{f}(2\pi l).$$

Sei $h \in I\!R$. Für die Funktion $f_h(x) := f(hx)$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_{I\!R^n} f(x)\mathrm{d}x &= h^n \int_{I\!R^n} f_h(x)\mathrm{d}x \\
&= h^n \sum_l f(l) - h^n (2\pi)^{n/2} \sum_{l \neq 0} \widehat{f}_h(2\pi l) \\
&= \underbrace{h^n \sum_l f(l)}\, - (2\pi)^{n/2} \sum_{l \neq 0} \widehat{f}(2\pi l/h).
\end{aligned}$$

Falls $f$ bandbeschränkt ist mit Bandbreite $2\pi/h$, so ist die Trapezregel zur Berechnung des Integrals von $f$ exakt.

Beweis des Abtasttheorems von Shannon (2.19):

Wir betrachten $f, \widehat{f}$ als Funktion auf $[-a,a]$. Dann sind $f, \widehat{f} \in L_2([-a,a])$ und für die Fourierreihen von $f$ und $\widehat{f}$ gilt

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}_k e^{ikx/a},\ \widehat{f}_k = (2a)^{-n} \int_{[-a,a]^n} f(x) e^{-i\pi kx/a}\mathrm{d}x$$

und

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k e^{i\pi k\xi/a},\ f_k = (2a)^{-n} \int_{[-a,a]^n} \widehat{f}(\xi) e^{-i\pi k\xi/a}\mathrm{d}\xi.$$

Wir wählen $a = \frac{h}{\pi}$. Dann ist $\widehat{f}(\xi) = 0$ für $\xi \notin [-a,a]^n$ und es gilt

$$\begin{aligned}
f_k &= (2a)^{-n} \int_{[-a,a]^n} \widehat{f}(\xi) e^{-ihk\xi} d\xi \\
&= (2a)^{-n} \int_{I\!R^n} \widehat{f}(\xi) e^{i(-hk)\xi}\mathrm{d}\xi \\
&= h^n (2\pi)^{-n/2} f(-kh).
\end{aligned}$$

Mit

$$\chi_a(x) := \begin{cases} 1, & x \in [-a,a] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt

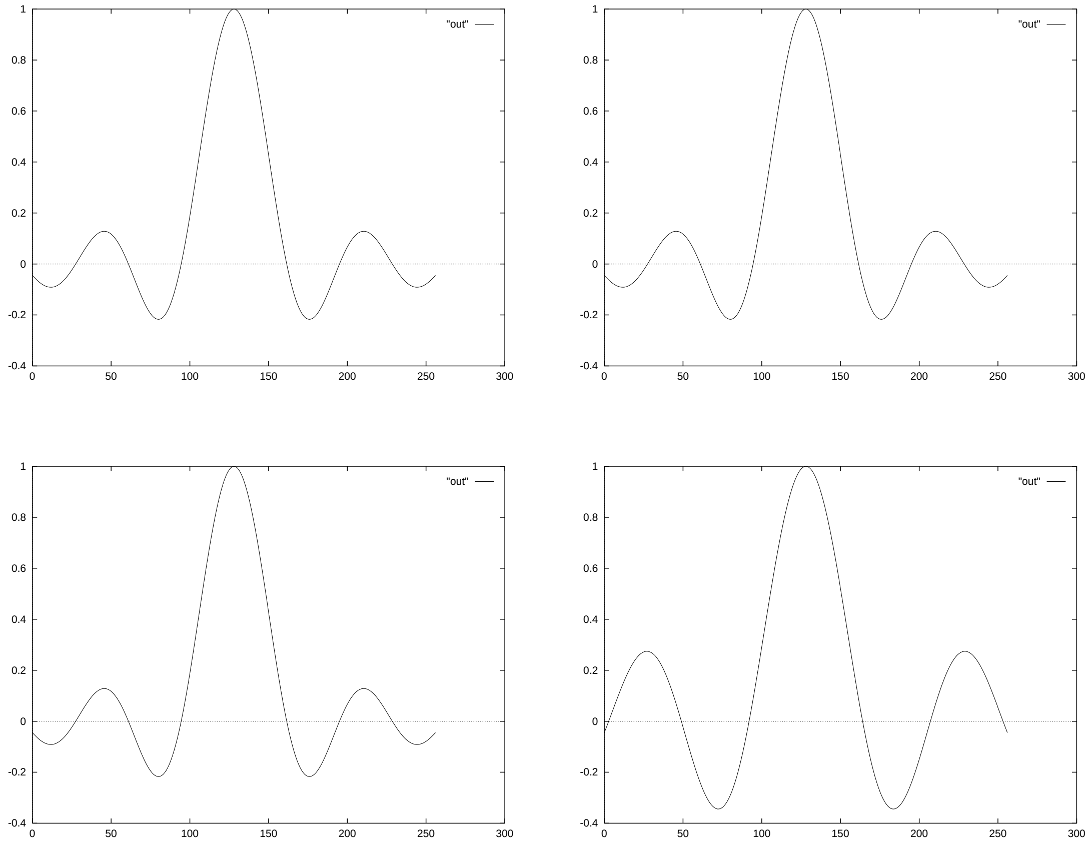
$$\widehat{f}(\xi) \quad = \quad (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(kh) \chi_a(\xi) e^{-ikh\xi}.$$

Durch Fouriertransformation:

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(kh) [\widetilde{\chi(x) e^{-ihkx}}](x)$$

Definiere $g(x) := \operatorname{sinc}((x+kh)/a)$. Nach den Rechenregeln der Fouriertransformierten gilt

$$\widehat{g}(\xi) = a^n e^{-ihk\xi} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n/2} \chi_a(\xi) = (2\pi)^{-n/2} h^n e^{-ihk\xi} \chi_a(\xi).$$




Wir studieren nun den Effekt des Über- bzw. Unterabtastens. Oben ist die sinc–Funktion mit den Schrittweiten 1, 2, 3 und 4 abgetastet worden. Überabtastung liefert die richtige Funktion, Unterabtastung liefert eine aufgeweitete Funktion.