ANGEWANDTE MATHEMATIK

UND

INFORMATIK

Rückpropagationsverfahren für die Wellengleichung in bewegtem Medium

Helmut Sielschott

15/2000 - N

UNIVERSITÄT MÜNSTER

Für Rita

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Symbolverzeichnis

Kapitel 1-5:

$v_0(x)$	1, 6
$c(x)$	1, 7
$u(x,t)$	1, 8
$\tilde{\mu}(x)$	8
n	12
Ω	12
T	12
Q	12
$W_p^k(\Omega)$	15
$(\cdot,\cdot)_{l,2,\Omega}$	15
$W_p^l\big((0,T);X\big)$	15, 101
$\big(\cdot,\cdot\big)_{\substack{k,2,(0,T)\\ l,2,\Omega)}}$	17
$\mu(x)$	20
$L^p(S;X)$	98

Kapitel 2:

$\rho(x)$	6
$p(x)$	6
$v(x)$	6

Kapitel 3:

$c_{_T}$	18
H	20
V	20, 30
C_H^V	20
$\rho(x)$	20
ρ_0, ρ_1	20
$q(x,t)$	20
$u_0(x)$, $u_1(x)$	20
$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$	21
$a(\cdot,\cdot)$	21, 30
$b(\cdot,\cdot)$	21, 30
a_1, b_1, α, λ	21
C_0	22
C_k	32

Kapitel 4:

$f(x)$	47
$\alpha(t)$	47
p	47
$f_M(x)$	48
g, g_j	48
R, R_j	48
F, Z	48
h	57
U, Y	61
$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$	61
a, b, c, d	61

Kapitel 1

Einleitung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit dem inversen Problem der Wellengleichung, die die Schallausbreitung in einem Medium beschreibt, das sich — verglichen mit der Schallgeschwindigkeit — langsam bewegt.

Dieses Problem ist motiviert durch die Anwendung bei der Schallpyrometrie, einer Technik zur akustischen Messung von Temperaturen in Feuerräumen von Kohlekraftwerken und Müllverbrennungsanlagen. Am Ende dieser Einleitung gehen wir auf die Schallpyrometrie genauer ein.

Wir werden in Kapitel 2 die Differentialgleichung

$$u_{tt} + 2v_0(x) \cdot \nabla u_t - c^2(x)\Delta u = q(x,t) \tag{1.1}$$

herleiten, die die Schallausbreitung in einem bewegten Medium in einem Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^n$ näherungsweise beschreibt. Der Vektor $v_0(x)$ beschreibt die als stationär angenommene Mediumsgeschwindigkeit im Punkt x, $c(x)$ ist die Schallgeschwindigkeit und $q(x,t)$ die Schallquelle. u beschreibt den Schalldruck, also die Veränderung des Druckes in (x,t) aufgrund der Schallwelle.

In Kapitel 3 beweisen wir im Detail die eindeutige Lösbarkeit des Anfangs– Randwertproblems zu Gleichung (1.1) mit homogenen Neumann-Randbedingungen und geeigneten Anfangsdaten. Hierzu formulieren wir die Gleichung zunächst abstrakter und verwenden ein Galerkinverfahren für den Existenzbeweis und Energieabschätzungen für die Eindeutigkeit. Anschließend betrachten wir die Regularität der Lösungen von (1.1) bei stärkeren Glattheitsanforderungen an die Koeffizienten und die Inhomogenität. Wiederum erhalten wir eine „Energieabschätzung" für die Lösung u, die auch die Ableitungen höherer Ordnung berücksichtigt. Diese Aussagen zu (1.1) konnten in der Literatur nicht für den Fall $v_0(x) \neq 0$ gefunden werden.

Für die Anwendung interessant ist eine Betrachtung des Schallaufwegs bei einer Laufzeitmessung. Dies ist der Pfad, auf dem der zuerst beim Mikrofon ankommende Teil der Schallwelle gelaufen ist. Aufgrund der Fermatschen Beugung ist dies im allgemeinen nicht die geradlinige Verbindung, wenn die Schallgeschwindigkeit nicht konstant ist. Durch die Bewegung des Mediums werden diese Pfade verändert. Wir leiten die entsprechende Verallgemeinerung der Eikonalgleichung sowie eine Differentialgleichung zur Beschreibung ihrer Charakteristiken her. Diese Charakteristiken sind identisch mit den Schallaufwegen.

Für die numerische Lösung inverser Probleme zu (1.1) ist es hilfreich, die Meßdaten, die aufgrund der tatsächlichen, dreidimensionalen Schallausbreitung entstanden sind, in Signale umrechnen zu können, die bei einer zweidimensionalen Wellenausbreitung in einem vergleichbarem Medium entstanden wären. Mit Hilfe der Kirchhoffschen Formeln schlagen wir hierzu eine Näherungslösung vor.

In Kapitel 4 betrachten wir das inversen Problem. Wir interessieren uns vor allem für die Bestimmung von $c(x)$ bei gegebener Mediumsgeschwindigkeit $v(x)$, gegebener Quelle $q(x,t)$ und der Messung von Lösungen $u(x,t)$ von (1.1) am Rand $\partial\Omega$ von Ω. Wir stellen zur numerischen Lösung dieses Problems ein Verfahren vor, das an das Kaczmarz-Verfahren angelehnt ist und als Propagations– Rückpropagationsverfahren bezeichnet werden kann. Das Verfahren ist iterativ. Wir bezeichnen die Lösung von (1.1) bei gegebener Schallgeschwindigkeit c mit $u(c)$. Im *Propagationsschritt* für die aktuelle Näherung $\tilde{c}$ an c wird zunächst $u(\tilde{c})$ bestimmt, um auf $\partial\Omega$ die Differenz zwischen den „Meßdaten“ für $u(c)$ und $u(\tilde{c})$ bestimmen zu können. Diese Differenz bezeichnen wir als Residuum. Im *Rückpropagationsschritt* wird diese Differenz zeitlich rückwärts „zurückpropagiert“, d.h. es wird die eine ähnliche Wellengleichung wie (1.1) in der Zeit rückwärts gelöst. Mit Hilfe der beiden Lösungen aus dem Propagations- und dem Rückpropagationsschritt wird die Näherung $\tilde{c}$ verbessert. Für die Herleitung dieses Verfahrens benötigen wir die Fréchet-Ableitung des Residuumoperators. Wir beweisen daher die Existenz dieser Ableitung, wofür die Regularitätsergebnisse aus Kapitel 3 verwendet werden. Außerdem stellen wir kurz ähnliche Verfahren vor, wie sie bei geophysikalischen Anwendungen eingesetzt werden.

Bei unserer Anwendung, der Schallpyrometrie, ist der zeitliche Verlauf des Quellsignals nicht steuerbar und nicht meßbar. Daher behandeln wir auch das inverse Problem der Rekonstruktion der Signalquelle.

In Kapitel 5 stellen wir die Details zur numerischen Lösung der Wellengleichung vor und zeigen anschließend numerische Ergebnisse zur Lösung der genannten inversen Probleme, wobei die verwendeten Phantome, also die bei simulierten Messungen verwendeten Funktionen $c(x)$, auf realistischen Annahmen beim Einsatz der Schallpyrometrie beruhen.

Schließlich fassen wir in Kapitel 6 die wichtigsten Ergebnisse zusammen und beschreiben Möglichkeiten und zu erwartende Probleme bei der Weiterentwicklung der Schallpyrometrie mittels der Lösung des inversen Problems der Wellengleichung.

Im Anhang stellen wir ohne Beweise einige mathematische Hilfsmittel zur Verfügung, die im Text verwendet werden.

Die Problemstellung ist inspiriert von der Schallpyrometrie, also der Messung der Temperatur in einem heißen Gas mittels der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit. Diese Meßmethode kommt in Kohlekraftwerken und Müllverbrennungsanlagen zum Einsatz. Sie beruht auf der Temperaturabhängigkeit $T(c) = \alpha c^2$ der Schallgeschwindigkeit in einem idealen Gas. Zur Messung werden mehrere akustische Meßgeräte, die sowohl einen Schallgeber als auch ein Mikrofon enthalten, in der Meßebene an den Wänden des Feuerraumes positioniert. Dies ist in Abbildung 5.5 auf Seite 80 in der 54 m-Ebene eines Braunkohle-Feuerraumes dargestellt. Die Laufzeit des Signals ergibt sich bei Annahme einer geradlinigen Ausbreitungsrichtung des schnellsten Teiles des Schallsignals entlang des Weges L zu $\int\limits_L \frac{1}{c(s)}\,\mathrm{d}s$. Aus den ermittelten Laufzeiten kann durch Inversion dieser sehr spärlich abgetasteten Radontransformation der Funktion $1/c$ die Schallgeschwindigkeit und damit die Temperatur ermittelt werden.

Aufgrund der geringen Anzahl von Meßgeräten ist die so erreichbare Auflösung sehr niedrig. Um mehr Details der Temperaturverteilung rekonstruieren zu können, bietet es sich an, nicht nur die Laufzeitinformationen sondern das gesamte Meßsignal der Mikrofone für die Auswertung zu nutzen. Dies führt auf das inverse Problem der Wellengleichung.

Laufzeitmessungen zwischen zwei Meßgeräten bei unterschiedlichen Richtungen zeigen, daß in tangential gefeuerten Braunkohle-Dampferzeugern die horizontale Gasgeschwindigkeit einen deutlichen Einfluß auf die Meßergebnisse hat. Daher betrachten wir in dieser Arbeit die Wellengleichung (1.1) in einem bewegten Medium. Die Bewegungsgeschwindigkeit selbst nehmen wir bei der Formulierung des inversen Problems als bekannt an, da sie mit Hilfe der Vektortomographie mit hinreichender Genauigkeit aus den Laufzeitmessungen berechnet werden kann ([Sie97]). Die Rekonstruktion aus der Vektortomographie reicht aus, weil die Gasgeschwindigkeit um mindestens einen Faktor 20 kleiner ist als die Schallgeschwindigkeit, so daß der Fehler in der Rekonstruktion der Bewegungsgeschwindigkeit nicht mehr von Bedeutung ist.

Dieser Unterschied ist bei einem weiteren möglichen Anwendungsgebiet der Lösung des inversen Problems zur Wellengleichung in bewegtem Medium, der Ozeanographie, noch größer. Hier beträgt die Schallgeschwindigkeit etwa $1500\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, während die Bewegungsgeschwindigkeit des Mediums unterhalb von $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ liegt. Für akustische Meßmethoden bei dieser Anwendung verweisen wir auf [MWW95].

Zum Abschluß der Einleitung wollen wir anhand von Meßdaten zeigen, daß die Gasgeschwindigkeit keinesfalls vernachlässigt werden darf. Abbildung 1.1 zeigt oben ein im Kraftwerk Neurath aufgenommenes Meßsignal und unten eine Ausschnittsvergrößerung. Die Schallgeschwindigkeit beträgt im Kessel bei Temperaturen von etwa $1200\,^\circ\mathrm{C}$ ca. $700\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Die Luft zur Verbrennung wird mit $20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ eingeblasen, in der Meßebene liegt die Durchschnittsgeschwindigkeit des Gases zwischen gegenüberliegenden Meßgeräten bei $10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Der Abstand von Sender und Empfänger beträgt im Beispiel 17 m. Eine Verzögerung des Schallsignals durch die Gasgeschwindigkeit macht damit eine Laufzeitdifferenz von 0,4 ms aus. Das verschobene Signal ist grau eingezeichnet. Damit würde bei der Differenzbildung ohne Berücksichtigung der Gasgeschwindigkeit zum Beispiel das Maximum bei 24,5 ms mit dem Maximum bei 24,9 ms verglichen. Durch diese Phasenverschiebung würde das Rekonstruktionsverfahren für das inverse Problem in ein lokales Minimum laufen und keine realistische Rekonstruktionen liefern.

Die einfachste Methode zur Kompensation dieses Problems ist die Verschiebung der Meßdaten. Da der Einfluß der Gasgeschwindigkeit jedoch in Wirklichkeit komplizierter ist, haben wir uns entschieden, sie in der Differentialgleichung zu berücksichtigen.

Abbildung 1.1: Meßsignal eines Mikrofons (oben) und Ausschnittsvergrößerung (unten). Die Zeit ist in Millisekunden (ms) angegeben. Die graue Kurve zeigt ebenfalls das Meßsignal, allerdings wurde es um 0,4 ms verschoben. Dies entspricht der Auswirkung einer Mediumsgeschwindigkeit von 10 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bedanken, und zwar zunächst bei Professor Dr. Frank Natterer dafür, daß er mir das Projekt zur Schallpyrometrie und damit dieses Thema für meine Dissertation anvertraut hat. Weiter gilt mein Dank meinen Kollegen, vor allem Dr. Frank Wübbeling, für viele hilfreiche Diskussionen und Unterstützung bei Computerproblemen.

Der RWE Energie AG, namentlich Dr. Willy Derichs, danke ich für die zur Verfügung gestellten Informationen und Meßdaten und dem Institut für Verfahrenstechnik und Dampfkesselwesen (IVD) der Universität Stuttgart für die Simulationsergebnisse einer 600 $\mathrm{MW_{el}}$-Tangentialfeuerung.

Kapitel 2

Herleitung der Wellengleichung für ein bewegtes Medium

In diesem Kapitel leiten wir die Gleichung her, die die Ausbreitung von Schallwellen in einem bewegten Medium beschreibt.

Um zu einer handhabbaren Gleichung zu kommen, müssen einige Approximationen gemacht werden: Wir nehmen an, daß die Amplitude des Schalls klein ist, also nur zu kleinen Schwankungen von Druck, Dichte und Bewegungsgeschwindigkeit der Teilchen führt. Somit ist ein Störungsansatz sinnvoll, bei dem Störungen höherer Ordnung vernachlässigt werden können. Mit dieser Näherung erhalten wir ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung in der Dichte ρ und der Bewegungsgeschwindigkeit v. Um letztere eliminieren zu können, setzen wir weiter voraus, daß sowohl die Hintergrunddichte, als auch die Bewegungsgeschwindigkeit des Mediums zeitlich konstant sind und sich auch räumlich nicht auf Skalen ändern, die für die Schallausbreitung relevant sind.

Bei der Anwendung im Rahmen der Schallpyrometrie sind diese Annahmen im Inneren des Feuerraumes sicherlich gerechtfertigt. In unmittelbarer Nähe des Randes sind sie jedoch verletzt, da hier aufgrund des Temperaturgradienten der Druck nicht quasi-konstant ist und sich in den Ecken kleine Wirbel bilden können. Wir werden die Wellengleichung dennoch im ganzen Gebiet verwenden.

Es gibt einige Arbeiten anderer Gruppen, bei denen es um die Messung der Mediumsgeschwindigkeit mit Hilfe ebener Wellen geht, vergleiche Abschnitt 4.2.4. In diesen Veröffentlichungen wird auf die Herleitung der Gleichung in [MI86] verwiesen. Wir werden zeigen, daß diese Herleitung nur zufällig zum richtigen Ergebnis führt.

2.1 Die Wellengleichung für ein bewegtes Medium

A.D. Pierce leitet in [Pie89, 1-2 bis 1-5] die grundlegenden Gleichungen zur Betrachtung von Schallwellen in einem flüssigen oder gasförmigen Medium her. Es sind dies die Gleichung zur Massenerhaltung (2.1), die Eulergleichung (2.2) und die Abhängigkeit des Drucks nur von der Dichte, Gleichung (2.3):

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad , \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+v\cdot\nabla\right)v &= -\nabla p \quad , &(2.2)\\ p &= p(\rho) \quad . &(2.3)\end{aligned}$$

Hierbei ist $\rho = \rho(x,t)$ die Dichte am Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ zur Zeit $t \geq 0$. Die Bewegungsgeschwindigkeit in (x,t) wird mit $v = v(x,t)$ bezeichnet. Aufgrund von (2.3) ist auch der Druck $p = p(x,t)$ eine Funktion von (x,t).

Der Druck hängt eigentlich nicht nur vor der Dichte, sondern auch von der Entropie des Systems ab. Wie üblich gehen wir jedoch vom Fall konstanter Entropie aus, so daß wir nur die Abhängigkeit von p von ρ betrachten. Dies ist wiederum eine Näherung, gilt also nicht exakt. Im Feuerraum eines Braunkohle-Dampferzeugers ist die Entropie aufgrund der schwankenden Temperatur und der chemischen Prozesse sicherlich nicht konstant. Wir können jedoch davon ausgehen, daß sie sich auf Skalen von wenigen Wellenlängen nicht ändert.

Die Eulergleichung (2.2) läßt sich aus der Gleichung zur Massenerhaltung (2.1) und der Gleichung zur Impulserhaltung

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla\cdot(\rho v_i v) = -\nabla p_i \quad \text{für } i = 1,\ldots,n$$

herleiten. Bei der Impulserhaltung wird benutzt, daß alle äußeren Kräfte durch den Gradienten des Drucks $-\nabla p$ beschrieben sind.

In Abwesenheit eines Schallsignals werde das Medium durch die Dichte $\rho = \rho_0(x)$, den Druck $p = p_0(x)$ und die Bewegungsgeschwindigkeit $v = v_0(x)$ charakterisiert. Diese Größen seien also zeitlich konstant. Kommt nun das Schallsignal hinzu, so werden die Bedingungen geändert:

$$\begin{aligned} \rho(x,t) &= \rho_0(x) + \rho_1(x,t) \quad ,\\ p(x,t) &= p_0(x) + p_1(x,t) \quad ,\\ v(x,t) &= v_0(x) + v_1(x,t) \quad . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Wir setzen nun voraus, daß die Störungen aufgrund der Schallwelle nur klein sind:

$$\rho_1(x,t) \ll \rho_0(x)\ , \quad p_1(x,t) \ll p_0(x)\ , \quad \|v_1(x,t)\| \ll \|v_0(x)\| \qquad \forall x,t \quad . \tag{2.5}$$

Obwohl bei der Schallpyrometrie die Temperatur des Mediums nicht konstant ist und somit auch die Dichte $\rho_0(x)$ variiert, können wir davon ausgehen, daß

$$\nabla\rho_0(x) \approx 0 \tag{2.6}$$

gilt, denn auf der Größenordnung der verwendeten Wellenlängen verändert sich die Temperatur zumindest bei Messungen am Ende des Feuerraumes kaum. Streng genommen gilt diese Aussage nicht in der Nähe der Wände der Feuerräume, wir verwenden die Näherung (2.6) aber dennoch.

Während (2.5) und (2.6) übliche Voraussetzungen bei der Herleitung der Wellengleichung sind (abgesehen davon, daß üblicherweise $v_0(x) = 0$ verwendet wird), müssen wir zur Herleitung der Wellengleichung für ein bewegtes Medium zusätzlich annehmen, daß sich auch $v_0(x)$ lokal kaum ändert, d.h.

$$\frac{\partial(v_0)_i}{\partial x_i} \approx 0 \qquad \text{für} \quad i = 1,\ldots,n \quad , \tag{2.7}$$

wobei $(v_0)_i$ die i-te Komponente von $v_0(x) \in \mathbb{R}^n$ ist. Auch diese Näherung ist in unmittelbarer Nähe der Wände nur bedingt gültig, da sich z.B. in den Ecken des Feuerraumes kleine Wirbel bilden.

Wegen $p = p_0 + p_1$, $\rho = \rho_0 + \rho_1$, den Ungleichungen (2.5) und dem Zusammenhang (2.3) können wir die Abhängigkeit von p_1 von ρ_1 durch eine Taylorreihe beschreiben:

$$p_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0 \rho_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_0 (\rho_1)^2 + \cdots \quad . \tag{2.8}$$

Hierbei deutet der Index 0 an, daß die Ableitungen bei $\rho = \rho_0(x)$ zu nehmen sind. Thermodynamische Überlegungen zeigen, daß $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0$ immer positiv ist. Wir definieren $c(x)$ durch

$$c^2(x) = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0 \quad . \tag{2.9}$$

Die Betrachtung der Lösungen der Wellengleichung zeigt, daß $c(x)$ die Schallgeschwindigkeit im Punkt x ist. Wir setzen nun die Gleichungen (2.4) in (2.1) und (2.2) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho_1) + \nabla \cdot \big((\rho_0 + \rho_1)(v_0 + v_1)\big) &= 0 \quad , \\ (\rho_0 + \rho_1)\left(\frac{\partial}{\partial t} + (v_0 + v_1) \cdot \nabla\right)(v_0 + v_1) &= -\nabla(p_0 + p_1) \end{aligned}$$

und somit wegen $\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$ und $\frac{\partial v_0}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 v_0 + \rho_0 v_1 + \rho_1 v_0 + \rho_1 v_1) = 0 \quad , \tag{2.10}$$

$$(\rho_0 + \rho_1)\frac{\partial v_1}{\partial t} + (\rho_0 + \rho_1)\big((v_0 + v_1) \cdot \nabla\big)(v_0 + v_1) = -\nabla(p_0 + p_1) \quad . \tag{2.11}$$

Wegen (2.5) können wir (2.4) als Störungsansatz auffassen. Terme 0. Ordnung in (2.10) und (2.11) sind nun solche, die nur ρ_0, p_0 bzw. v_0 enthalten. Kommt genau in einem Faktor der Index 1 vor, so liegt ein Term 1. Ordnung vor, ansonsten ein Term höherer Ordnung. In 0. Ordnung erhalten wir die Gleichung zur Massenerhaltung und die Eulergleichung für das ungestörte System (die Zeitableitungen tauchen nicht auf, da ρ_0 und v_0 zeitlich konstant sind):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_0 v_0) &= 0 \quad , \\ \rho_0 (v_0 \cdot \nabla) v_0 &= -\nabla p_0 \quad . \end{aligned}$$

In 1. Ordnung ergibt sich bei Beachtung von (2.6) und (2.7)

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot v_1 + v_0 \cdot \nabla \rho_1 = 0 \quad , \tag{2.12}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \rho_0 (v_0 \cdot \nabla) v_1 = -\nabla p_1 \quad , \tag{2.13}$$

oder in etwas anderer Form

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla\right) \rho_1 + \rho_0 \nabla \cdot v_1 = 0 \quad , \tag{2.14}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla\right) v_1 = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 \quad . \tag{2.15}$$

Nun wenden wir auf (2.14) den Operator $\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla\right)$ an. Dieser vertauscht wegen (2.6) und (2.7) mit „ $\rho_0 \nabla \cdot$ “, so daß wir (2.15) einsetzen können:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla\right)^2 \rho_1 + \rho_0 \nabla \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla\right) v_1}_{\overset{(2.15)}{=} -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1} = 0 \quad .$$

Aus der Taylorreihe (2.8) und (2.9) leiten wir die Näherung $p_1 = c^2 \rho_1$ ab. Da ρ_0 wegen (2.6) gekürzt werden kann, erhalten wir somit die Wellengleichung für ein bewegtes Medium:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0(x) \cdot \nabla\right)^2 p_1 - c^2(x) \Delta p_1 = 0 \quad . \tag{2.16}$$

In unserer Anwendung gilt ebenso wie z.B. in der Ozeanographie

$$\|v_0(x)\|_\infty \ll c \quad . \tag{2.17}$$

Rechnen wir das Quadrat des Operators in (2.16) aus, so erhalten wir einen Term 2. Ordnung in $v_0(x)$. Diesen können wir wegen (2.17) vernachlässigen. Daher werden wir in den folgenden Kapiteln mit der Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u + \tilde{\mu}(x) \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial t} u - c^2(x) \Delta u = 0 \tag{2.18}$$

arbeiten, wobei $u(x,t) = p_1(x,t)$ und $\tilde{\mu}(x) = 2 v_0(x)$ verwendet wird.

2.2 Fehlerhafte Herleitung in der Standardreferenz

Sämtliche in Abschnitt 4.2.4 genannten Autoren berufen sich auf die Herleitung der Wellengleichung für ein bewegtes Medium in Abschnitt 11.1 in [MI86]. Dort wird vorausgesetzt, daß ρ_0 und v_0 konstant sind. Dies entspricht im wesentlichen unseren Annahmen (2.6) und (2.7), ist also nicht problematisch, wenn sich beide Größen auf wenigen Wellenlängen nicht ändern.

Allerdings enthält die Herleitung in [MI86] einen Fehler, den wir hier nennen wollen, da dieser Text als Standardreferenz dient. Das Ergebnis ist jedoch trotz der fehlerbehafteten Herleitung korrekt.

P.M. Morse und K.I. Ingard betrachten in Abschnitt 11.1 in [MI86] zunächst das Koordinatensystem K', das sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 mit dem Medium mitbewegt. Wir bezeichnen die Koordinaten in K' mit x' und t'. Für Ortsableitungen bezüglich x' verwenden wir das Symbol ∇'. Wir haben oben mit Hilfe eines Störungsansatzes die Gleichung zur Massenerhaltung (2.1) und die Eulergleichung (2.2) in das System (2.14), (2.15) überführt. Im bewegten Koordinatensystem K' gilt dieses System laut [MI86] mit $v_0 = 0$:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t'} + \rho_0 \nabla' \cdot v_1 = 0 \quad , \tag{2.19}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t'} = -\nabla' p_1 \quad . \tag{2.20}$$

Diese Gleichungen wurden in [MI86] wie üblich mit der Voraussetzung $v_0 = 0$ hergeleitet. Wir merken an, daß hierbei wegen $v_0 = 0$ die Bedingung an v_1 aus (2.5) durch $\|v_1\| \ll 1$ ersetzt werden muß.

Die Auswirkung von $v_0 \neq 0$ soll durch die folgende Betrachtung in K' und K erklärt werden. Die Koordinatentransformation zwischen K und K' lautet

$$\begin{aligned} t &= t' \quad , \\ x_i &= x_i' - (v_0)_i t' \quad . \end{aligned}$$

Ist nun $f(x,t)$ eine differenzierbare Funktion von Raum und Zeit, so erhält man die Ableitungen im bewegten Koordinatensystem mit Hilfe der Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i'} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_i'} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x_i'} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{also } \nabla' f = \nabla f \quad , \\ \frac{\partial f}{\partial t'} &= \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t'} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} (v_0)_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla \right) f \quad . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Gleichungen (2.19) und (2.20) im ruhenden Koordinatensystem:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla \right) \rho_1 + \rho_0 \nabla \cdot v_1 = 0 \quad , \tag{2.21}$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla \right) v_1 = -\nabla p \quad . \tag{2.22}$$

Dies sind gerade die Gleichungen (2.14) und (2.15). Die Wellengleichung kann wie oben hergeleitet werden.

Diese Herleitung ist falsch, weil Morse und Ingard die Terme, die aufgrund des Störungsansatzes nicht berücksichtigt wurden, auch bei der Koordinatentransformation ignorieren. An einem Beispiel kann man sich leicht klarmachen, daß diese Vorgehensweise tatsächlich zu Fehlern führen kann. Wenn die Eulergleichung (2.2) gegeben wäre durch

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot v) e = -\nabla p \quad , \tag{2.23}$$

mit einem beliebigen, festen Vektor $e \in \mathbb{R}^n$, so würde bei obiger Vorgehensweise beim Störungsansatz der Term $(v \cdot v)e$ für $v_0 = 0$ verschwinden, da er dann die Ordnung 2 hat. Die Gleichung (2.22) bzw. (2.15) wäre also unverändert und das Ergebnis wäre die

Wellengleichung (2.16). Bei korrekter Herleitung gemäß Abschnitt 2.1 mit $v_0(x) \neq 0$ jedoch würden in der Gleichung erster Ordnung zur Eulergleichung (2.15) die zusätzlichen Terme $(v_0 \cdot v_1)e$ und $(v_1 \cdot v_0)e$ auftauchen, so daß die Wellengleichung (2.16) *nicht* gültig wäre.

Warum liefert die Herleitung aus [MI86] jedoch bei der korrekten Eulergleichung das richtige Ergebnis? Dies liegt daran, daß die zusätzlichen Terme $\rho_0(v_1 \cdot \nabla)v_0$ und $\rho_1(v_0 \cdot \nabla)v_0$ beim Schritt von (2.11) nach (2.13) wegen (2.7) vernachlässigt werden. Der Fehler, der in [MI86] gemacht wird, wird somit *zufällig* wieder ausgeglichen. Dies wird natürlich auch der Grund sein, weshalb er den Autoren unterlaufen konnte.

Kapitel 3

Eigenschaften der Wellengleichung

3.1 Eindeutigkeit, Existenz und Regularität von Lösungen des direkten Problems

Die in Abschnitt 2.1 hergeleitete Gleichung

$$u_{tt} + \tilde{\mu}(x) \cdot \nabla u_t - c^2(x)\Delta u = 0 \tag{3.1}$$

ist bei $\tilde{\mu} = 0$ die (klassische) Wellengleichung. Für konstante Schallgeschwindigkeit c lassen sich die Lösungen der Wellengleichung mit Hilfe der Kirchhoffschen Formeln angeben, falls der Ortsraum höchstens die Dimension drei hat. Wir geben diese Formeln für $n = 2$ und $n = 3$ in Satz 3.3.1 an.

Bereits 1936 haben Krzyżański und Schauder in [KS36] einen Beweis für die Existenz einer Lösung der Differentialgleichung (3.1) angegeben. Der Beweis im Stile der dreißiger Jahre ist aber kaum nachvollziehbar, da sehr große Sprünge gemacht werden und die verwendeten Normen und Funktionenräume unklar bleiben.

Nur wenige Autoren haben sich später wieder mit so allgemeinen hyperbolischen Differentialgleichungen beschäftigt. Courant betrachtet in [CH62] das Cauchyproblem für Systeme erster Ordnung. Hierauf ist unser Problem leicht zurückzuführen. Er führt aber keinen Existenzbeweis für das gemischte Anfangswert– Randwertproblem. Mizohata betrachtet in [Miz73] das Cauchyproblem für die Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Hörmander beweist in [Hör83, Theorem 24.1.1] die eindeutige Lösbarkeit des Dirichletproblems unter der Voraussetzung, daß die Koeffizienten und der Rand des Gebietes unendlich oft differenzierbar sind. Das Neumannproblem behandelt er nicht.

Eskin beweist in [Esk85] die Existenzaussage für das Neumannproblem bei strikt hyperbolischen Differentialgleichungen. Dies deckt zwar unsere Differentialgleichung mit $\tilde{\mu} \neq 0$ ab, jedoch wird ebenso wie bei Hörmander vorausgesetzt, daß die Koeffizienten der Differentialgleichung unendlich oft differenzierbar sind.

Wir benötigen für die Analyse des inversen Problems Existenz–, Eindeutigkeits– und Regularitätsaussagen für die Lösung von (3.1) mit einer zusätzlichen Inhomogenität $q(x,t) \in L^2\big((0,T) \times \Omega\big)$. In Beispiel 2.2 in Kapitel VI von [Sho77] setzt Showalter für q stetige Differenzierbarkeit bezüglich der Zeitvariablen t voraus, außerdem verwendet er für seine Bilinearform $a_1(\cdot,\cdot)$ V-Elliptizität, obwohl diese Bilinearform nur V-koerziv ist. In unserer Notation in Gleichung (3.26) bedeutet dies, daß er $\lambda = 0$ verwendet, obwohl $\lambda = 1$ korrekt wäre. Wir verwenden jedoch im folgenden seine Schreibweise mit den Operatoren $\mathcal{C}$ und $\mathcal{B}$, die in [LM72] und [Wlo82] nicht vorkommt.

Diese Aussagen sind in der Literatur jedoch nicht zu finden. Wir haben daher den Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis von Lions und Magenes aus [LM72] auf unser Problem übertragen. Noch umfangreicher ist der Nachweis der Regularität von Lösungen in Abhängigkeit der Regularität von Koeffizienten und Inhomogenität. Diese Aussagen sind für uns sehr wichtig, da wir für den Nachweis der Differenzierbarkeit des in Abschnitt 4.1 definierten Residuumoperators $R_j(f)$ die Abhängigkeit der Differenzierbarkeitsordnung der Lösungen von der Differenzierbarkeitsordnung der Koeffizienten und der Inhomogenität der Differentialgleichung benötigen. Daher haben wir auch die Theorie zur Regularität auf unser Problem übertragen. Zur Vereinfachung beschränken wir uns jedoch auf das homogene Neumannproblem. Wloka hat in [Wlo82] eine etwas ausführlichere Fassung der Aussagen und Beweise von Lions und Magenes gegeben. Wir orientieren uns an dieser Fassung.

Wir betrachten die Wellengleichung (3.1) in einem Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^+$. Wir interessieren uns für Lösungen der Gleichung im Zeitintervall $(0,T)$ mit $T > 0$. Zur kürzeren Schreibweise setzen wir noch $Q := \Omega \times (0,T)$.

Skizze des Beweisablaufes für die Hauptaussagen von Kapitel 3

Wir wollen die wichtigsten Schritte darstellen, die zu den Hauptaussagen dieses Kapitels, den Sätzen 3.1.7 und 3.1.12 führen. Wir verwenden hierbei die Bezeichnungen, die erst in den nächsten Abschnitten eingeführt werden. Die Seitenangaben finden sich im Symbolverzeichnis.

Zunächst klären wir in Abschnitt 3.1.1, daß die Operatoren zur Differentialgleichung (3.1) und der Gleichung (2.16), aus der (3.1) gefolgert wurde, strikt hyperbolisch sind.

In Abschnitt 3.1.2 stellen wir Hilfsaussagen zu den Räumen $W_2^k\big((0,T);W_2^l(\Omega)\big)$, Integral– und Summenabschätzungen sowie eine Energieabschätzung zur Poissongleichung bereit.

Der Satz 3.1.7, der die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage zu unserem Anfangs–Randwertproblem enthält, ist die Hauptaussage von Abschnitt 3.1.3. Hierzu betrachten wir den Gelfandschen Dreier

$$V \hookrightarrow H = L^2(\Omega) = H' \hookrightarrow V' \quad .$$

Wir dividieren die Differentialgleichung durch $c^2(x)$ und schreiben sie zunächst in der Form (3.15):

$$\rho(x)u_{tt}(x,t) + \mu(x)\cdot\nabla u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = q(x,t) \quad . \tag{3.2}$$

Mit Hilfe der in (3.20)-(3.22) definierten Operatoren $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$, der Anfangsdaten $u_0 \in V$, $u_1 \in H$ und der Inhomogenität $q \in L^2([0,T],H)$ formulieren wir das Anfangs–

Randwertproblem als Gleichung in V':

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}u_{tt}(t) + \mathcal{B}u_t(t) + \mathcal{A}u(t) = q(t) \qquad \text{in } (0,T) \quad ,\\
&u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1 \quad .
\end{aligned}$$

Gesucht ist eine eindeutige Lösung $u \in L^2\big((0,T);V\big)$ mit $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \in L^2\big((0,T);H\big)$. Wir werden sehen, daß jede solche Lösung $u_{tt} \in L^2\big((0,T);V'\big)$ erfüllt und daß $u:[0,T] \to H$ und $u_t:[0,T] \to V'$ stetig sind, so daß die Problemstellung sinnvoll ist.

Satz 3.1.7 besagt, daß obiges Problem genau eine Lösung besitzt und diese stetig von q, u_0 und u_1 abhängt. Darüberhinaus erfüllt diese Lösung die Energieabschätzung (3.30). Für den Beweis der Existenzaussage wird ein Galerkinverfahren verwendet, für die Energieabschätzung die übliche Multiplikation der Gleichung mit u_t und anschließende Integration über das Intervall $[0,T]$. Die Energieabschätzung liefert auch die Eindeutigkeit der Lösung.

Der Nachweis der Regularität in Abschnitt 3.1.4 erfolgt in einzelnen Schritten. Zunächst behandeln wir die Regularität bezüglich der Zeit. In Satz 3.1.8 werden die Voraussetzungen gegenüber Satz 3.1.7 verschärft: Es soll $q \in W_2^1\big((0,T);H\big)$ gelten und die Anfangsdaten seien einmal mehr differenzierbar. Dann gilt für die obige Lösung:

$$u \in W_2^1\big((0,T);V\big), \qquad \frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} \in L^2\big((0,T);H\big) \quad .$$

Zum Beweis wird die Differentialgleichung nach t differenziert. Auf diese Gleichung kann Satz 3.1.7 angewendet werden, so daß die Existenz einer Lösung v gesichert ist. Die Aussage folgt nun durch den Nachweis von $v = u_t$.

Für das folgende betrachten wir dann konkret unsere Differentialgleichung (3.2) mit homogenen Neumann–Randbedingungen. Hierzu wählen wir $V = W_2^1(\Omega)$. Der nächste Satz 3.1.10 verallgemeinert die Aussage von Satz 3.1.8 dahingehend, daß (verkürzt formuliert) Anfangsbedingungen und Quelle nicht nur einmal, sondern k-mal differenzierbar sein sollen. Ein Induktionsbeweis zeigt nun, daß dann die Lösung $u(x,t)$ $(k+1)$-mal bezüglich der Zeit differenziert werden kann. Der Induktionsschritt beruht hierbei im wesentlichen auf Satz 3.1.8. Darüberhinaus liefert Satz 3.1.10 eine Verallgemeinerung der Energieabschätzung, bei der alle vorhandenen Ableitungen einbezogen werden.

Die Regularität bezüglich der Ortsvariablen wird in Satz 3.1.11 behandelt. Die Voraussetzungen sind identisch mit denen von Satz 3.1.10. Es gilt für die Lösung u:

$$u \in W_2^{k-i}\big((0,T);W_2^i(\Omega)\big) \quad \text{für } i = 0,\ldots,k \quad .$$

Zum Beweis verwenden wir die Aussage, daß $u(\cdot,t)$ als Lösung von (3.2) für festes $t \in (0,T)$ das *elliptische* Problem

$$-\Delta u(x,t) = q(x,t) - \rho(x)u_{tt}(x,t) - \mu(x)\cdot\nabla u_t(x,t) \quad \text{in } Q \quad .$$

löst. Die Aussage folgt nun mit der Energieabschätzung zur Poissiongleichung in Lemma 3.1.6.

In Satz 3.1.12 fassen wir die Ergebnisse zusammen.

3.1.1 Nachweis der Hyperbolizität

Unsere Wellengleichung (3.1) unterscheidet sich durch den Term $\tilde{\mu} \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial t} u$ von der „einfachen“ Wellengleichung, die in den meisten Lehrbüchern zu partiellen Differentialgleichungen behandelt wird. Durch diesen zusätzlichen Summanden ändert sich das Hauptsymbol des zugehörigen Operators, so daß der grundlegende Charakter nicht mehr der der Wellengleichung sein muß.

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, daß der Operator zur Gleichung (3.1) — ebenso wie derjenige zur Gleichung (2.16) — strikt hyperbolisch ist. Die Bezeichnung „Wellengleichung für ein bewegtes Medium“ ist also zutreffend, denn beide Gleichungen beschreiben hyperbolische Probleme, die die Wellengleichung als Spezialfall $\tilde{\mu} = 0$ enthalten. Die folgende Definition ist der Einleitung zu Kapitel 5 aus [Fol95] entnommen.

Definition 3.1.1 *Der Operator*

$$L = \sum_{|\alpha|+j \leq m} a_{\alpha,j}(x,t) D_x^\alpha D_t^j$$

auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *heißt* strikt hyperbolisch, *falls für jedes* $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *und jedes* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\xi \neq 0$ *das* Hauptsymbol, *also das Polynom*

$$P(\tau) = \sum_{|\alpha|+j=m} a_{\alpha,j}(x,t) \xi^\alpha \tau^j$$

genau m paarweise verschiedene reelle Nullstellen besitzt.

Die Gleichung (3.1) wurde gewonnen aus Gleichung (2.16) durch Vernachlässigen des Terms $\big(v_0 \cdot \nabla\big)(v_0 \cdot \nabla u)$, der Ableitungen zweiter Ordnung enthält. Wir verwenden hier die Bezeichnung $\tilde{\mu}(x) = 2v_0(x)$. Da die höchsten vorkommenden Ableitungen die Ordnung 2 haben, ist $m = 2$. Wir können (2.16) schreiben als $L_1 u = 0$ mit

$$\begin{aligned} L_1 u &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\tilde{\mu} \cdot \nabla\right)^2 u - c^2 \Delta u \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \tilde{\mu} \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial t} + \big(\tfrac{1}{2}\tilde{\mu} \cdot \nabla\big)\tfrac{1}{2}\tilde{\mu} \cdot \nabla - c^2 \Delta\right) u \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \tilde{\mu} \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial t} + \tfrac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n \tilde{\mu}_i \tilde{\mu}_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \tfrac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n \tilde{\mu}_i \frac{\partial \tilde{\mu}_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - c^2 \Delta\right) u \quad . \end{aligned}$$

Da der vorletzte Term lediglich Ableitungen erster Ordnung enthält, ist das Hauptsymbol zu L_1 gegeben durch

$$\begin{aligned} P_1(\tau) &= \tau^2 + \tilde{\mu} \cdot \xi\, \tau + \tfrac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n \tilde{\mu}_i \tilde{\mu}_j \xi_i \xi_j - c^2 |\xi|^2 \\ &= \tau^2 + \tilde{\mu} \cdot \xi\, \tau + \tfrac{1}{4}\big(\tilde{\mu} \cdot \xi\big)^2 - c^2 |\xi|^2 \\ &= \big(\tau + \tfrac{1}{2}\tilde{\mu} \cdot \xi\big)^2 - c^2 |\xi|^2 \quad . \end{aligned}$$

Wir verwenden hierbei die Schreibweise $\xi \cdot \xi = |\xi|^2$. Damit hat $P_1(\tau)$ für $c(x) > 0$ und $\xi \neq 0$ die beiden reellen, verschiedenen Nullstellen $\tau_\pm = -\frac{1}{2}\tilde{\mu} \cdot \xi \pm c|\xi|$. Der Operator L_1 ist also strikt hyperbolisch.

Gleichung (3.1) läßt sich schreiben als $L_2 u = 0$ mit

$$L_2 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \tilde{\mu} \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial t} - c^2 \Delta \right) u \quad .$$

Damit ist das Hauptsymbol gegeben durch

$$\begin{aligned} P_2(\tau) &= \tau^2 + \tilde{\mu} \cdot \xi \tau - c^2 |\xi|^2 \\ &= \left(\tau + \tfrac{1}{2}\tilde{\mu} \cdot \xi\right)^2 - c^2|\xi|^2 - \tfrac{1}{4}(\tilde{\mu} \cdot \xi)^2 \quad . \end{aligned}$$

Die Nullstellen $\tau_\pm = -\frac{1}{2}\tilde{\mu} \cdot \xi \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\tilde{\mu} \cdot \xi)^2 + c^2|\xi|^2}$ von $P_2(\tau)$ sind für $c(x) > 0$ und $\xi \neq 0$ reell und verschiedenen. Auch der Operator L_2 ist strikt hyperbolisch.

3.1.2 Mathematische Hilfsmittel

Wir nennen zunächst einige Abschätzungen, die für die Beweise in den Abschnitten 3.1.3 und 3.1.4 benötigt werden.

Für Sobolevräume verwenden wir die in [Wlo82, Kapitel I, §3] benutzte Bezeichnung $W_p^l(\Omega)$. Hierbei enthält $W_p^l(\Omega)$ diejenigen reellwertigen Funktionen, die l verallgemeinerte Ableitungen besitzen wobei die l'te Ableitung in $L^p(\Omega)$ liegt. Die Norm von $\varphi \in W_p^l(\Omega)$ bezeichnen wir mit $\|\varphi\|_{l,p,\Omega}$. Wir werden $p = 2$ und $p = \infty$ verwenden.

Bei der Untersuchung der Regularität in Abschnitt 3.1.4 werden wir Fälle betrachten, bei denen die Lösung der Wellengleichung $u(x,t)$ in den Orts- und der Zeitvariablen unterschiedlich häufig differenzierbar ist. Eine bequeme Schreibweise für Funktionen mit dieser Eigenschaft bieten die Räume $W_2^k\big((0,T); W_2^l(\Omega)\big)$, $k, l \in \mathbb{N}$. Dies sind die Sobolevräume der k-mal (verallgemeinert) differenzierbaren Funktionen mit Werten in $W_2^l(\Omega)$.

Um die Räume $W_2^k\big((0,T); W_2^l(\Omega)\big)$ definieren zu können, muß das Integral über Funktionen $f : (0,T) \to W_2^l(\Omega)$ definiert werden. Dies ist ein Spezialfall des Bochner–Integrals, das wir im Anhang kurz einführen. Dort betrachten wir auch Distributionen mit Werten in Hilberträumen, um schließlich in Definition A.1.19 die Räume $W_2^k\big((0,T); W_2^l(\Omega)\big)$ einführen zu können. Für unsere Anwendung wichtig ist dann wiederum die Isomorphie

$$\bigcap_{l=0}^{k} W_2^{k-l}\big((0,T); W_2^l(\Omega)\big) \;\cong\; W_2^k\big(\Omega \times (0,T)\big) \quad , \quad k \in \mathbb{N} \quad . \tag{3.3}$$

In Satz 27.8 in [Wlo82] wird nur eine Teilaussage von (3.3) nachgewiesen, daher beweisen wir diese Aussage unter Satz 3.1.4.

Schließlich geben wir eine Energieabschätzung für die Lösung eines Randwertproblems der Poissongleichung an.

Integral– und Summenabschätzungen

Bemerkung 3.1.2 *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und X ein separabler Hilbertraum.*
Für $f \in L^2\big((a,b)\big)$ gilt:

$$\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \quad . \tag{3.4}$$

Für $g \in L^2\big((a,b), X\big)$ folgt damit

$$\left\| \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \right\|_X^2 \leq (b-a) \int_a^b \|g(t)\|_X^2\,\mathrm{d}x \quad . \tag{3.5}$$

<u>*Beweis:*</u> Die Abschätzung (3.4) folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für den Raum $L^2\big((a,b)\big)$, wobei diese auf die Funktion mit dem konstanten Wert 1 und auf f anzuwenden ist. Mit Hilfe des Satzes A.1.8 folgt dann (3.5) aus (3.4) mit $f(t) = \|g(t)\|_X$.

Die Voraussetzung der Separabilität von X ist eigentlich unnötig. Sie wurde im Anhang zur Verkürzung generell verwendet. □

In diesem Kapitel wird die Abschätzung von Normen von Funktionen gegen die Normen anderer Funktionen eine wesentliche Rolle spielen. Häufig ist es bequemer, anstelle der Normen ihre Quadrate zu verwenden. Die folgende Bemerkung besagt, daß dies gleichwertig ist.

Bemerkung 3.1.3 *Seien $C > 0$, $m \in \mathbb{N}$ und $\gamma, a_1, \ldots, a_m \geq 0$. Dann ist*

$$\sum_{i=1}^m a_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^m a_i \right)^2 \leq m \sum_{i=1}^m a_i^2$$

und damit gelten die Folgerungen

$$\gamma^2 \leq C \sum_{i=1}^m a_i^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma \leq \sqrt{C} \sum_{i=1}^m a_i \tag{3.6}$$

und

$$\gamma \leq C \sum_{i=1}^m a_i \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 \leq mC^2 \sum_{i=1}^m a_i^2 \quad . \tag{3.7}$$

Für Elemente $w_1, \ldots, w_m \in X$ eines Hilbertraums X gilt entsprechend

$$\left\| \sum_{i=1}^m w_i \right\|_X^2 \leq m \sum_{i=1}^m \|w_i\|_X^2 \quad . \tag{3.8}$$

Der <u>*Beweis*</u> ist elementar.

Die Räume $W_2^k\big((0,T);W_2^l(\Omega)\big)$

Wie bereits in der Einführung dieses Abschnitts angekündigt, soll nun die Isomorphie (3.3) bewiesen werden. Dieses Resultat ist eher trivial als spektakulär, es konnte in der Literatur jedoch so nicht gefunden werden. Wloka beweist in Satz 27.8 in [Wlo82] eine abgeschwächte Form dieser Aussage.

Wir erinnern daran, daß das Skalarprodukt in $W_2^l(\Omega)$, $l \in \mathbb{N}$ gegeben ist durch

$$(\varphi,\psi)_{l,2,\Omega} = \sum_{|\alpha|\le l} \int_\Omega D_x^\alpha \varphi \; D_x^\alpha \psi \,\mathrm{d}x \quad , \quad \varphi,\psi \in W_2^l(\Omega) \quad .$$

Entsprechend ergibt sich das Skalarprodukt in $W_2^k\big((0,T);W_2^l(\Omega)\big)$, $k,l \in \mathbb{N}$ zu

$$(u,v)_{\substack{k,2,(0,T)\\ l,2,\Omega}} \;=\; \sum_{i=0}^{k} \int_0^T \big(D_t^i u(t), D_t^i v(t)\big)_{l,2,\Omega}\,\mathrm{d}t \quad .$$

Satz 3.1.4 *Der Raum $W_k := \bigcap_{i=0}^{k} W_2^{k-i}\big((0,T);W_2^i(\Omega)\big)$ ist mit dem Skalarprodukt*

$$(u,v)_{W_k} := \sum_{j=0}^{k} (u,v)_{\substack{k-j,2,(0,T)\\ j,2,\Omega}}$$

ein Hilbertraum. Die Abbildung

$$\zeta : W_2^k(Q) \to W_k, \quad u \mapsto \zeta(u) \quad \text{mit} \quad \zeta(u)\big(t\big)(x) = u(x,t)$$

ist ein stetiger Isomorphismus mit stetiger Umkehrfunktion. Es gilt für $u \in W_2^k(Q)$:

$$\|u\|_{k,2,Q} \le \|\zeta(u)\|_{W_k} \le (k+1)\|u\|_{k,2,Q} \quad .$$

Beweis: Die Hilbertraumstruktur von W_k ergibt sich direkt aus den Eigenschaften der endlich vielen Hilberträume, als deren Schnitt W_k definiert ist.

Die Elemente von W_k sind wie üblich als Äquivalenzklassen von Funktionen aufzufassen, die jeweils fast überall gleiche Werte haben. Diese Werte sind wiederum Äquivalenzklassen. Es ist klar, daß ζ Äquivalenzklassen auf Äquivalenzklassen abbildet. Die Umkehrabbildung zu ζ bezeichnen wir als κ:

$$\kappa : W_k \to W_2^k(Q), \quad \tilde u \mapsto \kappa(\tilde u) \quad \text{mit} \quad \kappa\big(\tilde u\big)(x,t) = \tilde u\big(t\big)(x).$$

Die Abbildungen κ und ζ sind linear. Wir müssen noch ihre Stetigkeit zeigen:

$$\begin{aligned}\|\tilde u\|_{W_k}^2 &= \sum_{j=0}^{k} \|\tilde u\|^2_{\substack{k-j,2,(0,T)\\ j,2,\Omega}} \\ &= \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{k-j} \int_0^T \|D_t^i \tilde u(t)\|^2_{j,2,\Omega}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k-j} \sum_{|\alpha|\le j} \int_0^T \int_\Omega \left| D_x^\alpha D_t^i \, \tilde{u}(t)(x) \right|^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} \sum_{|\alpha|\le j} \int_0^T \int_\Omega \left| D_x^\alpha D_t^i \, \tilde{u}(t)(x) \right|^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \qquad (3.9) \\
&\le \sum_{i=0}^{k} (k-i+1) \sum_{|\alpha|\le k-i} \int_0^T \int_\Omega \left| D_x^\alpha D_t^i \, \tilde{u}(t)(x) \right|^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&\le (k+1) \sum_{i=0}^{k} \sum_{|\alpha|\le k-i} \int_0^T \int_\Omega \left| D_x^\alpha D_t^i \, \tilde{u}(t)(x) \right|^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&= (k+1) \sum_{i=0}^{k} \sum_{|\alpha|\le k-i} \int_0^T \int_\Omega \left| D_x^\alpha D_t^i \, \kappa(\tilde{u})(x,t) \right|^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&= (k+1) \, \|\kappa(\tilde{u})\|_{k,2,Q}^2
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{k,2,Q}^2 &= \sum_{i=0}^{k} \sum_{|\alpha|\le k-i} \int_0^T \int_\Omega \left| D_x^\alpha D_t^i \, u(x,t) \right|^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&\le \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} \sum_{|\alpha|\le j} \int_0^T \int_\Omega \left| D_x^\alpha D_t^i \, u(x,t) \right|^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} \sum_{|\alpha|\le j} \int_0^T \int_\Omega \left| D_x^\alpha D_t^i \, \zeta(u)(t)(x) \right|^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&\overset{(3.9)}{=} \|\zeta(u)\|_{W_k}^2 \quad .
\end{aligned}
$$

□

Wir benötigen weiter die Sobolevsche Ungleichung in einer Raumdimension. Der Beweis in Standardwerken wie [Wlo82] und [Ada75] ist nur auf höhere Dimensionen zugeschnitten. Wir führen ihn daher selbst.

Lemma 3.1.5 *Sei X ein Hilbertraum mit Norm $\|\cdot\|_X$ und $f \in W_2^1\big((0,T),X\big)$. Dann ist $f \in C^0\big([0,T],X\big)$ und es gilt für alle $t \in [0,T]$:*

$$
\|f(t)\|_X^2 \le c_T \|f\|^2_{1,2,\underset{X}{(0,T)}} \qquad (3.10)
$$

mit $c_T = 2\max(T, \frac{1}{T})$.

Wie üblich ist gemeint, daß ein Vertreter der Fortsetzung von f auf $[0,T]$ stetig ist und für diesen Vertreter punktweise (3.10) gilt.

Beweis: Sei zunächst $f \in W_2^1\big((0,T),X\big) \cap C^1\big([0,T],X\big)$. Es gibt ein $r \in (0,T)$ mit $\|f(r)\|_X \le \frac{1}{\sqrt{T}}\|f\|_{0,2,\underset{X}{(0,T)}}$, denn sonst würde gelten:

$$\|f\|^2_{0,2,\underset{X}{(0,T)}} = \int_0^T \|f(t)\|_X^2 \,\mathrm{d}t > \frac{1}{T}\|f\|^2_{0,2,\underset{X}{(0,T)}} \int_0^T \mathrm{d}t = \|f\|^2_{0,2,\underset{X}{(0,T)}} \quad .$$

Für $t \in (0,T)$ gilt nach Satz A.1.10, dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für das Bochner-Integral,

$$f(t) = f(r) + \int_r^t f'(s)\,\mathrm{d}s \quad .$$

Damit folgt $\|f(t)\|_X \le \|f(r)\|_X + \left\|\int_r^t f'(s)\,\mathrm{d}s\right\|_X$ und somit wegen $(\alpha+\beta)^2 \le 2\alpha^2 + 2\beta^2$ und im nächsten Schritt nach Bemerkung 3.1.2, Gleichung (3.5)

$$\begin{aligned}
\|f(t)\|_X^2 &\le 2\|f(r)\|_X^2 + 2\left\|\int_r^t f'(s)\,\mathrm{d}s\right\|_X^2 \\
&\le \frac{2}{T}\|f\|^2_{0,2,\underset{X}{(0,T)}} + 2T\int_0^T \|f'(s)\|_X^2\,\mathrm{d}s \\
&\le 2\max(T,\tfrac{1}{T})\|f\|^2_{1,2,\underset{X}{(0,T)}} \quad .
\end{aligned}$$

Da $(0,T)$ die Segmenteigenschaft erfüllt, ist $W_2^1\big((0,T),X\big) \cap C^1\big([0,T],X\big)$ dicht in $W_2^1\big((0,T),X\big)$ (vgl. Definition 2.1 und Satz 3.6 in [Wlo82]). Damit gilt (3.10). Da wir die Abschätzung punktweise gezeigt haben, gilt sie in der Supremumsnorm. In dieser findet auch der stetige Fortsetzungsprozeß bei der Vervollständigung von $W_2^1\big((0,T),X\big) \cap C^1\big([0,T],X\big)$ zu $W_2^1\big((0,T),X\big)$ statt, so daß wir einen stetigen, beschränkten Vertreter von $f(t)$ erhalten. □

Energieabschätzung zur Poissongleichung

Lemma 3.1.6 *Es sei $\lambda_0 > 0$ größer als die Koerzivitätskonstante von $-\Delta$ bezüglich der Räume V und H sowie des Gebietes Ω und kein Eigenwert von $-\Delta u + \lambda_0 u = 0$. Zu $q \in L^2(\Omega)$ sei $u \in V$ die Lösung von $-\Delta u + \lambda_0 u = q$ mit der Randbedingung $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ auf $\partial\Omega$.*

Falls nun für $i \ge 0$ gilt $q \in W_2^i(\Omega)$, so ist $u \in W_2^{i+2}(\Omega)$ und es gilt die Abschätzung

$$\|u\|^2_{i+2,2,\Omega} \le c_{i+2,\Omega}\,\|q\|^2_{i,2,\Omega} \tag{3.11}$$

für ein $c_{i+2,\Omega} > 0$, das nur *von Ω und i, nicht aber von q abhängt.*

Der *Beweis* ergibt sich etwa aus den Bemerkungen zum Lösungsoperator G_{λ_0} in § 30.3 in [Wlo82].

3.1.3 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des direkten Problems

Wir betrachten separable Hilberträume V, H mit $V \hookrightarrow H$, wobei die Einbettung stetig und injektiv sei. Weiter sei V dicht in H. Der Satz von Riesz erlaubt es uns, H mit seinem Dualraum zu identifizieren, so daß wir den Gelfandschen Dreier

$$V \hookrightarrow H = H' \hookrightarrow V' \tag{3.12}$$

betrachten können, vgl. § 17 in [Wlo82]. Damit existiert ein $C_H^V > 0$ mit

$$\forall \varphi \in V: \ \|\varphi\|_H^2 \leq C_H^V \|\varphi\|_V^2 \quad . \tag{3.13}$$

Wir werden immer

$$H = L^2(\Omega)$$

verwenden. Wir setzen weiter voraus, daß

$$V \cap C^\infty(\Omega) \text{ dicht in } V \tag{3.14}$$

gilt.

Wir kommen zur Beschreibung des Vorwärtsproblems. Gleichung (3.1) dividieren wir durch $c^2(x)$, wobei wir Positivität von $c(x)$ voraussetzen. Mit $\rho(x) := 1/c^2(x)$ und $\mu(x) = \tilde{\mu}(x)/c^2(x)$ und einer zusätzlichen Inhomogenität erhalten wir die Differentialgleichung

$$\rho(x) u_{tt}(x,t) + \mu(x) \cdot \nabla u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = q(x,t) \quad \text{in } Q \tag{3.15}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \quad \text{für } x \in \Omega \tag{3.16}$$

und betrachten die Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = 0 \quad \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \quad . \tag{3.17}$$

Gemäß Satz 3.1.4 sind die Räume $L^2\big((0,T);H\big)$ und $L^2(Q)$ isomorph. Wir verwenden für Funktionen aus diesen Räumen daher die Schreibweisen $u(t)(x)$ und $u(x,t)$ gleichberechtigt nebeneinander.

Es seien $q \in L^2\big((0,T);H\big)$ und $u_0 \in V$, $u_1 \in H$. Gemäß (3.12) ist damit auch $q \in L^2\big((0,T);V'\big)$. Wir verlangen weiter $\rho \in V$ mit $0 < \rho_0 \leq \rho(x) \leq \rho_1$ in Ω. Die Anforderungen an μ werden wir später konkretisieren. Zunächst formulieren wir unser Problem abstrakter. Wir fassen Ableitungen von L^2-Funktionen gemäß Abschnitt A.1.2 distributiv auf.

Gesucht ist eine eindeutige Lösung $u \in L^2\big((0,T);V\big)$ mit $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \in L^2\big((0,T);H\big)$ von

$$\mathcal{C}u_{tt}(t) + \mathcal{B}u_t(t) + \mathcal{A}u(t) = q(t) \qquad \text{in } (0,T) \quad , \tag{3.18}$$

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1 \quad . \tag{3.19}$$

Hierbei verwenden wir die Bilinearformen $a : V \times V \to \mathbb{R}$, $b : H \times V \to \mathbb{R}$ und die Operatoren ($\psi \in V$ beliebig)

$$\mathcal{C} \ : \ V' \to V', \quad (\mathcal{C}\varphi)(\psi) = \varphi(\rho\psi) \quad , \tag{3.20}$$

$$\mathcal{B} \ : \ H \to V', \quad (B\varphi)(\psi) = b(\varphi, \psi) \quad , \tag{3.21}$$

$$\mathcal{A} \ : \ V \to V', \quad (\mathcal{A}\varphi)(\psi) = a(\varphi, \psi) \quad . \tag{3.22}$$

(3.18) ist also eine Gleichung in V'. In Gleichung (3.29) werden wir $u_{tt} \in L^2\big((0,T), V'\big)$ nachweisen, so daß die Anwendung von $\mathcal{C}$ in (3.18) möglich ist. Aufgrund der Voraussetzungen an ρ ist $\mathcal{C}$ invertierbar und die Inverse ist gegeben durch

$$\mathcal{C}^{-1} : V' \to V', \quad (\mathcal{C}^{-1}\varphi)(\psi) = \varphi\big(\tfrac{1}{\rho}\psi\big) \quad .$$

Für ein $\varphi \in H$ wirkt $\mathcal{C}$ in der Form

$$(\mathcal{C}\varphi)(\psi) = \int\limits_{\Omega} \rho\varphi\psi \, \mathrm{d}x \quad . \tag{3.23}$$

Die Bilinearformen $a(\varphi, \psi)$ und $b(\eta, \psi)$ seien stetig, d.h.

$$\exists a_1 > 0 \qquad \forall \varphi, \psi \in V : a(\varphi, \psi) \leq a_1 \|\varphi\|_V \|\psi\|_V \quad , \tag{3.24}$$

$$\exists b_1 > 0 \qquad \forall \eta \in H, \psi \in V : b(\eta, \psi) \leq b_1 \|\eta\|_H \|\psi\|_V \quad . \tag{3.25}$$

Außerdem sei $a(\varphi, \psi)$ symmetrisch, es gelte also $a(\varphi, \psi) = a(\psi, \varphi)$, und V-koerziv, d.h.

$$\exists \alpha > 0, \lambda > 0 \, \forall \psi \in V : a(\psi, \psi) + \lambda \|\psi\|_H^2 \geq \alpha \|\psi\|_V^2 \quad . \tag{3.26}$$

Für $b(\cdot, \cdot)$ setzen wir

$$\forall \varphi \in V : b(\varphi, \varphi) \geq 0 \tag{3.27}$$

voraus. Hierdurch verkürzt sich die weitere Darstellung, diese Voraussetzung ist aber nicht essentiell. Sie besagt im wesentlichen, daß durch $\mathcal{B}$ keine Energie in das System eingebracht wird. Würden wir sie fallenlassen, so müsste bei den Energieabschätzungen auf der rechten Seite ein weiterer Term für die durch $\mathcal{B}$ eingebrachte Energie auftauchen. Wir kommen darauf auf Seite 31 zurück.

Wir verlangen von unserer Lösung u nur, daß sie $u \in L^2\big((0,T); V\big)$ und $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \in L^2\big((0,T); H\big)$ erfüllt. Damit die Forderung der Erfüllung von Anfangsdaten in (3.19) sinnvoll ist, müssen u und $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ in geeignetem Sinne stetig sein. Die Anforderungen an u besagen, daß $u \in W_2^1\big((0,T)\big)$ gelten soll, dieser Raum wird in Definition A.1.16 beschrieben. Nach Satz A.1.17 ist u demnach stetig als Abbildung $u : [0,T] \to H$.

Da wir H im Gelfandschen Dreier in V' eingebettet haben ist $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \in L^2\big((0,T); V'\big)$. Als Lösung von (3.18) erfüllt u

$$u_{tt}(t) = \mathcal{C}^{-1}\big(q(t) - \mathcal{B}u_t(t) - \mathcal{A}u(t)\big) \quad . \tag{3.28}$$

Wegen (3.24) ist die lineare Abbildung $\mathcal{A} : V \to V'$ beschränkt. Damit zeigt man sehr leicht anhand der Definitionen A.1.1, A.1.5 und gegebenenfalls des Satzes von Pettis A.1.2, daß $u \in L^2\big((0,T); V\big)$ durch $\mathcal{A}$ stetig abgebildet wird auf $\mathcal{A}u \in L^2\big((0,T); V'\big)$.

Wloka verwendet hierzu seinen Hilfssatz 26.1, bei uns ist die Situation jedoch wesentlich einfacher, da $\mathcal{A}$ nicht zeitabhängig ist. Entsprechend folgt aus (3.25), daß $u_t \in L^2\big((0,T);H\big)$ durch $\mathcal{B}$ abgebildet wird auf $\mathcal{B}u_t \in L^2\big((0,T);V'\big)$. Damit liegt das Argument von $\mathcal{C}^{-1}$ in (3.28) wegen $q \in L^2\big((0,T);H\big) \subset L^2\big((0,T);V'\big)$ in $L^2\big((0,T);V'\big)$. Trivialerweise ist $\mathcal{C}^{-1}$ durch $\frac{1}{\rho_0}$ beschränkt und damit ebenfalls stetig. Somit erhalten wir

$$u_{tt} \in L^2\big((0,T);V'\big) \quad . \tag{3.29}$$

Damit ist $u_t \in W_2^1\big((0,T);V\big)$ nach Definition A.1.19. Gemäß Lemma 3.1.5 ist damit $u_t : [0,T] \to V'$ stetig. Insgesamt sind also beide Anfangsbedingungen in (3.19) sinnvoll.

Der folgende Satz beinhaltet bereits die Antwort auf die Frage nach der eindeutigen Lösbarkeit des Problems (3.18), (3.19) im distributiven Sinne. Der Beweis ist eng an die zitierte Literatur angelehnt.

Neu sind hier die Operatoren $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Der in [LM72] und [Wlo82] betrachtete Fall ergibt sich mit $\mathcal{B} = 0$ und $\mathcal{C} = I_{V'}$.

Satz 3.1.7 *Es existiert genau eine Lösung $u \in L^2\big((0,T);V\big)$ von (3.18) mit den Anfangsbedingungen (3.19). Diese erfüllt $u_t \in L^2\big((0,T);H\big)$. Die Abbildung $\{q, u_0, u_1\} \to \{u, u_t\}$ ist stetig und linear zwischen den Räumen*

$$L^2\big((0,T);H\big) \times V \times H \to L^2\big((0,T);V\big) \times L^2\big((0,T);H\big) \quad .$$

Genauer formuliert: Es gilt für jedes $\tau \in [0,T]$

$$\|u(\tau)\|_V^2 + \|u_t(\tau)\|_H^2 \le C_0 \left(\|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2 + \int_0^T \|q(t)\|_H^2 \,\mathrm{d}t \right) \tag{3.30}$$

mit

$$C_0 = \frac{\max\big(2\lambda C_H^V + a_1, \rho_1, 1\big)\ T \exp(T + 2\lambda T^2)}{\min(\alpha, \rho_0)} \quad . \tag{3.31}$$

Die Ableitungen sind wiederum distributiv zu verstehen.

Beweis: Wir orientieren uns an [LM72, Section 3.8] und [Wlo82, § 29]. Zur Notation: Für die Zeitableitung benutzen wir der besseren Übersichtlichkeit halber in diesem Beweis den Strich $'$ anstelle des Indexes t.

I. A priori Abschätzungen

Zu Herleitung der gewünschten Abschätzung (3.40) werden wir hohe Glattheitsvoraussetzungen an die verwendete Lösung der Gleichung (3.18) verwenden. Dies ist berechtigt, da dieser Teil I des Beweises lediglich der Vorstellung des Beweisablaufes dient. Beim Existenzbeweis werden wir diese Herleitungsmethode auf Näherungslösungen der Wellengleichung anwenden, die die nötige Regularität haben.

Sei also $u \in W_2^2\big((0,T);V\big)$ Lösung von (3.18), (3.19). Wegen (3.23) gilt

$$\forall \varphi \in V: \quad \big(\rho u''(t), \varphi\big)_H + b\big(u'(t), \varphi\big) + a\big(u(t), \varphi\big) \;=\; \big(q(t)\big)(\varphi) \quad . \tag{3.32}$$

Wir benötigen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\sqrt{\rho}u'(t)\|_H^2 = 2\big(\rho u''(t), u'(t)\big)_H \quad , \tag{3.33}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a\big(u(t), u(t)\big) = 2a\big(u(t), u'(t)\big) \quad . \tag{3.34}$$

Damit Gleichung (3.34) gilt, wurde $a(\varphi, \psi)$ als symmetrisch vorausgesetzt. Wir wählen in (3.32) $\varphi = u'(t)$. Damit erhalten wir

$$\big(\rho u''(t), u'(t)\big)_H + b\big(u'(t), u'(t)\big) + a\big(u(t), u'(t)\big) = \big(q(t)\big)\big(u'(t)\big) \quad , \tag{3.35}$$

also nach Multiplikation mit 2 und Einsetzen von (3.33) und (3.34)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\sqrt{\rho}u'(t)\|_H^2 + 2b\big(u'(t), u'(t)\big) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a\big(u(t), u(t)\big) = 2\big(q(t)\big)\big(u'(t)\big) \quad .$$

Wir integrieren diese Gleichung von 0 bis $\tau \in [0, T]$

$$\int_0^\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(a\big(u(t), u(t)\big) + \|\sqrt{\rho}u'(t)\|_H^2\Big)\,\mathrm{d}t + 2\int_0^\tau b\big(u'(t), u'(t)\big)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\tau \big(q(t)\big)\big(u'(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

und erhalten damit

$$\begin{aligned} &a\big(u(\tau), u(\tau)\big) + \|\sqrt{\rho}u'(\tau)\|_H^2 \\ &\quad = a(u_0, u_0) + \|\sqrt{\rho}u_1\|_H^2 + 2\int_0^\tau \Big(\big(q(t)\big)\big(u'(t)\big) - b\big(u'(t), u'(t)\big)\Big)\,\mathrm{d}t \quad . \end{aligned}$$

Für den Ausdruck auf der linken Seite gilt nach (3.26):

$$a\big(u(\tau), u(\tau)\big) + \|\sqrt{\rho}u'(\tau)\|_H^2 \geq \alpha\|u(\tau)\|_V^2 - \lambda\|u(\tau)\|_H^2 + \rho_0\|u'(\tau)\|_H^2 \quad . \tag{3.36}$$

Da wir $H = L^2(\Omega)$ mit seinem Dualraum H' identifizieren, können wir anstelle von $\big(q(t)\big)\big(u'(t)\big)$ auch $\big(q(t), u'(t)\big)_H$ schreiben. Damit gilt $2\big(q(t)\big)\big(u'(t)\big) \leq \|q(t)\|_H^2 + \|u'(t)\|_H^2$. Beachten wir noch $b(\varphi, \varphi) \geq 0$ und (3.24), so erhalten wir für den Ausdruck auf der rechten Seite

$$\begin{aligned} &a(u_0, u_0) + \|\sqrt{\rho}u_1\|_H^2 + 2\int_0^\tau \Big(\big(q(t)\big)\big(u'(t)\big) - b\big(u'(t), u'(t)\big)\Big)\,\mathrm{d}t \\ &\quad \leq a_1\|u_0\|_V^2 + \rho_1\|u_1\|_H^2 + \int_0^\tau \big(\|q(t)\|_H^2 + \|u'(t)\|_H^2\big)\,\mathrm{d}t \quad . \end{aligned} \tag{3.37}$$

Zusammen ergeben (3.36) und (3.37)

$$\begin{aligned} &\alpha\|u(\tau)\|_V^2 + \rho_0\|u'(\tau)\|_H^2 \\ &\quad \leq \lambda\|u(\tau)\|_H^2 + a_1\|u_0\|_V^2 + \rho_1\|u_1\|_H^2 + \int_0^\tau \big(\|q(t)\|_H^2 + \|u'(t)\|_H^2\big)\,\mathrm{d}t \quad . \end{aligned} \tag{3.38}$$

Aus $\|u(\tau)\|_H \leq \|u_0\|_H + \int_0^\tau \|u'(t)\|_H \,\mathrm{d}t$ (vgl. Satz A.1.10) folgt

$$\|u(\tau)\|_H^2 \leq 2\|u_0\|_H^2 + 2\left(\int_0^\tau \|u'(t)\|_H \,\mathrm{d}t\right)^2 \leq 2\|u_0\|_H^2 + 2T\int_0^\tau \|u'(t)\|_H^2 \,\mathrm{d}t \quad , \tag{3.39}$$

wobei wir $(\beta+\gamma)^2 \leq 2\beta^2+2\gamma^2$ und Bemerkung 3.1.2, Gleichung (3.4), verwendet haben. Wir setzen $\phi(\tau) := \|u(\tau)\|_V^2 + \|u'(\tau)\|_H^2$, schätzen $\lambda\|u(\tau)\|_H^2$ in (3.38) durch (3.39) ab und erhalten mit (3.13)

$$\phi(\tau) \leq c_1\left(\|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2 + \int_0^\tau \|q(t)\|_H^2 \,\mathrm{d}t\right) + c_2\int_0^\tau \phi(t)\,\mathrm{d}t$$

mit

$$c_1 = \frac{\max\left(2\lambda C_H^V + a_1, \rho_1, 1\right)}{\min(\alpha, \rho_0)} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{2\lambda T + 1}{\min(\alpha, \rho_0)} \quad .$$

Das Lemma A.2.2 (Gronwall) liefert mit $v = \phi$, $g(\tau) = c_1\Big(\|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2 + \int_0^\tau \|q(t)\|_H^2 \,\mathrm{d}t\Big)$ und $h(\tau) = c_2$:

$$\phi(\tau) \leq c_1 \exp(c_2\tau)\left(\|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2 + \int_0^\tau \|q(t)\|_H^2 exp(-c_2 t)\,\mathrm{d}t\right)$$

und damit gilt für alle $\tau \in [0,T]$

$$\|u(\tau)\|_V^2 + \|u'(\tau)\|_H^2 \leq c_1 \exp(c_2 T)\left(\|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2 + \int_0^T \|q(t)\|_H^2 \,\mathrm{d}t\right) \quad . \tag{3.40}$$

II. Existenzbeweis

Es sei $w_1, w_2, \ldots$ eine ON-Basis von V bezüglich des Skalarproduktes $(\rho\cdot,\cdot)_H$. Wir betrachten das Problem (3.32), (3.19). Die Näherung $u_m(t)$ zu seiner Lösung sei gegeben durch

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i$$

mit

$$\big(\rho u_m''(t), w_j\big)_H + b\big(u_m'(t), w_j\big) + a\big(u_m(t), w_j\big) = \big(q(t)\big)(w_j) \qquad j = 1,\ldots m \tag{3.41}$$

und $u_m(0) = u_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \xi_{im} w_i$, $u'_m(0) = u_{1m} = \sum_{i=1}^{m} \eta_{im} w_i$, wobei in H gelten soll: $\lim_{m\to\infty} u_{0m} = u_0$ und $\lim_{m\to\infty} u_{1m} = u_1$. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\rho \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i, w_j\right)_H + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} b\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i, w_j\right) + a\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i, w_j\right) \\ &\quad = \big(q(t)\big)(w_j) \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} (\rho w_i, w_j)_H \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} g_{im}(t) + \sum_{i=1}^{m} b(w_i, w_j) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_{im}(t) + \sum_{i=1}^{m} a(w_i, w_j) g_{im}(t) \\ &= \big(q(t)\big)(w_j) \quad . \end{aligned} \tag{3.42}$$

Um dies in Matrixschreibweise zu formulieren definieren wir

$$\begin{aligned} B_m &= \big(b(w_i, w_j)\big) \in \mathbb{R}^{m\times m} \quad , \\ A_m &= \big(a(w_i, w_j)\big) \in \mathbb{R}^{m\times m} \quad , \\ G_m(t) &= \big(g_{1m}(t), \ldots, g_{mm}(t)\big)^T \in \mathbb{R}^m \quad , \\ F_m(t) &= \big(\big(q(t)\big)(w_1), \ldots, \big(q(t)\big)(w_m)\big)^T \in \mathbb{R}^m \quad . \end{aligned}$$

Nach Wahl der w_i gilt $(\rho w_i, w_j)_H = \delta_{ij}$ mit dem Kroneckersymbol δ_{ij}. Damit ist unser System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (3.42) gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} G_m(t) + B_m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G_m(t) + A_m G_m(t) = F_m(t)$$

mit $G_m(0) = (\xi_{1m}, \ldots, \xi_{mm})^T$ und $G'_m(0) = (\eta_{1m}, \ldots, \eta_{mm})^T$. Dieses System nimmt mit $Z_m(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G_m(t)$ die Form

$$\begin{pmatrix} G'_m(t) \\ Z'_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_m(t) \\ -B_m Z_m(t) - A_m G_m(t) + F_m(t) \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} G_m(0) \\ Z_m(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\xi_{1m}, \ldots, \xi_{mm})^T \\ (\eta_{1m}, \ldots, \eta_{mm})^T \end{pmatrix}$$

an und ist somit eindeutig lösbar. Bei der Lösung ist jedoch zu beachten, daß die rechte Seite nicht Lipschitz-stetig ist, sondern lediglich die Voraussetzungen für eine Lösung im Sinne von Carathéodory gegeben sind, vergleiche etwa § 10, Satz XIV in [Wal72].

Dieselbe Rechnung wie die Herleitung von (3.40) zeigt, daß $\|u_m(\tau)\|_V$ und $\|u'_m(\tau)\|_H$ durch eine von m unabhängige Konstante beschränkt sind:

$$\|u_m(\tau)\|_V^2 + \|u'_m(\tau)\|_H^2 \le c_1 \exp(c_2 T) \left(\epsilon + \|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2 + \int_0^T \|q(t)\|_H^2 \,\mathrm{d}t\right) \tag{3.43}$$

mit $\epsilon = \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \big(\|u_{0m}\|_V^2 + \|u_{1m}\|_H^2 - \|u_0\|_V^2 - \|u_1\|_H^2\big)$.

Hierbei wird ausgenutzt, daß $u'_m(t)$ eine Linearkombination von $w_1, \ldots, w_m$ ist, so daß wir in Gleichung (3.41) w_j durch $u'_m(t)$ ersetzen können, um wie bei Gleichung (3.35) fortzufahren.

Wir finden somit (nach Satz A.2.1) eine Teilfolge (u_i) von (u_m) und Elemente $z \in L^2\big((0,T);V\big)$ und $\tilde{z} \in L^2\big((0,T);H\big)$ mit

$$\begin{aligned} (u_i) &\overset{i\to\infty}{\longrightarrow} z \quad \text{in} \quad L^2\big((0,T);V\big) \qquad \text{und} \\ (u'_i) &\overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{z} \quad \text{in} \quad L^2\big((0,T);H\big) \quad . \end{aligned}$$

Die Konvergenz ist in beiden Fällen schwach. Es gilt $\tilde{z} = z'$.

Wir ersetzen nun (u_m) durch die konvergente Teilfolge (u_i). Durch das Streichen endlich vieler Glieder dieser Folge kann der Wert von ϵ in (3.43) beliebig verkleinert werden.

Als nächstes zeigen wir, daß z Lösung von (3.32) ist und $z(0) = u_0$ und $z'(0) = u_1$ gelten.

Sei $\vartheta \in C^2([0,T])$ mit $\vartheta(T) = 0$ und $\vartheta'(T) = 0$. Wir setzen $\vartheta_j(t) := \vartheta(t)w_j$. Die Gleichung (3.41) wird für $j = 1, \ldots m$ mit $\vartheta(t)$ multipliziert und anschließend von 0 bis T integriert:

$$\int_0^T \Big(\big(\rho u''_m(t), \vartheta_j(t)\big)_H + b\big(u'_m(t), \vartheta_j(t)\big) + a\big(u_m(t), \vartheta_j(t)\big)\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \big(q(t)\big)\big(\vartheta_j(t)\big)\,\mathrm{d}t \ .$$

Beim ersten Summanden im Integral auf der linken Seite wird zweimal partiell integriert:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \Big(\big(\rho u_m(t), \vartheta''_j(t)\big)_H + b\big(u'_m(t), \vartheta_j(t)\big) + a\big(u_m(t), \vartheta_j(t)\big)\Big)\,\mathrm{d}t \\ &\quad = \int_0^T \big(q(t)\big)\big(\vartheta_j(t)\big)\,\mathrm{d}t + \big(u_{1m}, \vartheta_j(0)\big)_H - \big(u_{0m}, \vartheta'_j(0)\big)_H \quad \text{für } j = 1, \ldots, m \quad . \end{aligned}$$

Mit $m \to \infty$ wird daraus für $j \in \mathbb{N}$ beliebig

$$\begin{aligned} &\int_0^T \Big(\big(\rho z(t), \vartheta''_j(t)\big)_H + b\big(z'(t), \vartheta_j(t)\big) + a\big(z(t), \vartheta_j(t)\big)\Big)\,\mathrm{d}t \\ &\quad = \int_0^T \big(q(t)\big)\big(\vartheta_j(t)\big)\,\mathrm{d}t + \big(u_1, \vartheta_j(0)\big)_H - \big(u_0, \vartheta'_j(0)\big)_H \quad . \end{aligned}$$

Wir integrieren wiederum zweimal partiell im ersten Summanden und erhalten

$$\int_0^T \Big(\big(\rho z''(t), \vartheta_j(t)\big)_H + b\big(z'(t), \vartheta_j(t)\big) + a\big(z(t), \vartheta_j(t)\big)\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
= & \int_0^T \big(q(t)\big)\big(\vartheta_j(t)\big)\,\mathrm{d}t + \big(u_1, \vartheta_j(0)\big)_H - \big(u_0, \vartheta_j'(0)\big)_H \\
& -\big(z(1), \vartheta_j(0)\big)_H + \big(z(0), \vartheta_j'(0)\big)_H \quad .
\end{aligned} \tag{3.44}
$$

Betrachten wir nur alle $\vartheta(t) \in C_0^\infty([0,T])$, so erhalten wir

$$
\forall \varphi \in V : \qquad \big(\rho z''(t), \varphi\big)_H + b\big(z'(t), \varphi\big) + a\big(z(t), \varphi\big) = \big(q(t)\big)(\varphi) \quad , \tag{3.45}
$$

das heißt, z ist Lösung von (3.32).

Nun sei $\vartheta(t)$ wieder aus $C^1([0,T])$ beliebig mit $\vartheta(T) = 0$. Zusammen zeigen (3.44) und (3.45), daß für $j \in \mathbb{N}$ beliebig gilt:

$$
\begin{aligned}
\big(z(0), \vartheta_j'(0)\big)_H &= \big(u_0, \vartheta_j'(0)\big)_H \quad \text{und} \\
\big(z'(0), \vartheta_j(0)\big)_H &= \big(u_1, \vartheta_j(0)\big)_H \quad ,
\end{aligned}
$$

also $z(0) = u_0$ und $z'(0) = u_1$.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Lösung stetig von den Anfangsdaten und der Inhomogenität abhängt.

Integration von (3.43) liefert

$$
\begin{aligned}
& \int_0^T \|u_m(t)\|_V^2\,\mathrm{d}t + \int_0^T \|u_m'(t)\|_H^2\,\mathrm{d}t \\
& \quad \le \; c_1 T \exp(c_2 T) \left(\epsilon + \|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2 + \int_0^T \|q(t)\|_H^2\,\mathrm{d}t \right)
\end{aligned}
$$

und damit wegen der schwachen Konvergenz und der Definition von C_0 in (3.31)

$$
\int_0^T \|z(t)\|_V^2\,\mathrm{d}t + \int_0^T \|z'(t)\|_H^2\,\mathrm{d}t \le C_0 \left(\|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2 + \int_0^T \|q(t)\|_H^2\,\mathrm{d}t \right) \quad , \tag{3.46}
$$

da ϵ als beliebig klein angenommen werden kann.

III. Eindeutigkeit

Die Abschätzung (3.46) liefert auch die Eindeutigkeit der Lösung von (3.18), (3.19), denn die Differenz zweier Lösungen ist Lösung des homogenen Problems, also Lösung für $u_0 = 0$, $u_1 = 0$ und $q = 0$. Nach (3.46) ist jedoch $z = 0$ die einzige Lösung des homogenen Problems, womit die Eindeutigkeit gezeigt ist. $\square$

3.1.4 Regularität der Lösung des direkten Problems

Für den Nachweis der Differenzierbarkeit eines bei der Lösung des inversen Problems wichtigen Operators in Abschnitt 4.4 werden wir auch Regularitätsaussagen für die Lösung unserer Wellengleichung benötigen.

Wir wollen also untersuchen, inwieweit bessere Glattheitseigenschaften der Koeffizienten zu glatteren Lösungen führen.

Der erste Schritt bei der Behandlung der Regularität ist die Differenzierbarkeit nach t. Satz 3.1.8 besagt, daß die Lösung der Wellengleichung einmal mehr bezüglich t differenziert werden kann, wenn q, u_0 und u_1 einmal öfter differenzierbar sind, als in Satz 3.1.7 gefordert. Diese Aussage wird im Beweis von Satz 3.1.10 beim Induktionsschritt verwendet werden, um zu zeigen, daß die Lösung um so glatter bezüglich t ist, je glatter q, u_0 und u_1 sind. In Satz 3.1.11 wird die Regularität bezüglich der Ortsvariablen behandelt und in Satz 3.1.12 fassen wir die Ergebnisse zusammen.

Satz 3.1.8 *Die Voraussetzungen von Satz 3.1.7 seien erfüllt und u sei die Lösung aus Satz 3.1.7. Wir betrachten den Fall, daß zusätzlich $q \in W_2^1\big((0,T);H\big)$ gilt. Weiterhin seien die Kompatibilitätsbedingungen*

$$u_1 \in V \quad \text{und} \quad u_2 := \mathcal{C}^{-1}\big(q(0) - \mathcal{B}u_1 - \mathcal{A}u_0\big) \in H$$

erfüllt. Dann gilt für die Lösung u

$$u \in W_2^1\big((0,T);V\big), \quad \frac{\mathrm{d}^2 u(t)}{\mathrm{d}t^2} \in L^2\big((0,T);H\big) \quad .$$

Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\mathcal{C}v_{tt}(t) + \mathcal{B}v_t(t) + \mathcal{A}u(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} \quad , \tag{3.47}$$

$$v(0) = u_1, \quad v_t(0) = u_2 \tag{3.48}$$

ist gegeben durch $v = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

<u>*Beweis:*</u>

Gemäß der Voraussetzung an q ist $q_t \in L^2\big((0,T);H\big)$. Nach Satz 3.1.7 existiert genau eine Lösung v von (3.47), (3.48) und für diese Lösung gilt

$$v \in L^2\big((0,T);V\big), \quad v_t \in L^2\big((0,T);H\big) \quad . \tag{3.49}$$

Wir betrachten die mit dem Bochner-Integral definierte Hilfsfunktion

$$w(t) := u(0) + \int_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad .$$

Nach (3.48) und (3.49) gilt

$$\begin{array}{rcl} w \in C([0,T];V) & \subset & L^2\big((0,T);V\big) \quad , \\ w_t = v \in L^2\big((0,T);V\big) & \subset & L^2\big((0,T);H\big) \quad , \\ w_{tt} = v_t \in L^2\big((0,T);H\big) & \subset & L^2\big((0,T);V'\big) \quad , \\ w(0) = u(0) = u_0 & , & w_t(0) = v(0) = u_1 \quad . \end{array}$$

Wir integrieren (3.47) und erhalten wegen (3.48)

$$\begin{aligned} \mathcal{C}w_{tt}(t) &= \mathcal{C}v_t(t) \\ &= \mathcal{C}v_t(0) - \int_0^t \mathcal{C}v_{tt}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \mathcal{C}v_t(0) - \int_0^t \big(\mathcal{B}v_t(\tau) + \mathcal{A}v(\tau) - q_t(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau \\ &= q(0) - \mathcal{B}u_1 - \mathcal{A}u_0 - \int_0^t \big(\mathcal{B}v_t(\tau) + \mathcal{A}v(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau + q(t) - q(0) \quad . \end{aligned}$$

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} -\int_0^t \big(\mathcal{A}v(\tau) + \mathcal{B}v_t(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau &= -\int_0^t \big(\mathcal{A}w_t(\tau) + \mathcal{B}w_{tt}(\tau)\big)\,\mathrm{d}t \\ &= -\mathcal{A}w(t) + \mathcal{A}u_0 - \mathcal{B}w_t(t) + \mathcal{B}u_1 \end{aligned}$$

also

$$\mathcal{C}w_{tt} = \mathcal{C}v_t = -\mathcal{B}w_t - \mathcal{A}w + q(t) \quad . \tag{3.50}$$

Wir subtrahieren (3.18) von (3.50) und erhalten

$$\mathcal{C}(w-u)_{tt} = -\mathcal{B}(w-u)_t - \mathcal{A}(w-u)$$

und die Anfangsbedingungen

$$\big(w-u\big)(0) = 0, \quad \big(w-u\big)_t(0) = 0 \quad .$$

Damit können wir Satz 3.1.7 auf $(w-u)$ anwenden und erhalten wegen der eindeutigen Lösbarkeit der homogenen Gleichung

$$w = u \text{ in } [0,T]$$

und

$$v = w_t = u_t \text{ in } [0,T] \quad .$$

Wegen der Glattheit von $v = u_t$ folgt damit die Aussage.

□

Bei der Betrachtung einer „konkreten“ Differentialgleichung wenden wir uns direkt der Differentialgleichung dieser Arbeit in der Formulierung (3.15)-(3.17) zu. Es wäre auch möglich, allgemeinere Differentialgleichungen zu betrachten. Dies geschieht etwa in [Wlo82] durch allgemeinere elliptische Operatoren anstelle von Δu und allgemeinere Randbedingungen. Da diese Arbeit jedoch vor allem dem inversen Problem gewidmet ist, verzichten wir hier zugunsten der Kürze auf eine möglichst allgemeine Darstellung.

Da wir uns nur für den Fall von Neumann-Randbedingungen interessieren, wählen wir

$$V = W_2^1(\Omega) \quad .$$

Nach den Sätzen 3.1 und 3.5 aus [Wlo82] ist V separabel und erfüllt die Voraussetzung (3.14). Wie bereits in der Einleitung von Abschnitt 3.1 gesagt, ist $H = L^2(\Omega)$.

Um Gleichung (3.15) in der Form (3.18) behandeln zu können, müssen wir die Operatoren $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ definieren. $\mathcal{A}$ ist gegeben durch (3.22) mit

$$a(\varphi, \psi) = \int\limits_\Omega \nabla\varphi(x) \cdot \nabla\psi(x)\,\mathrm{d}x \quad . \tag{3.51}$$

Die Voraussetzungen (3.24) und (3.26) an $a(\varphi, \psi)$ sind mit $a_1 = 1$, $\lambda = 1$ und $\alpha = 1$ erfüllt. Wir werden sehen, daß mit der Wahl von V und $a(\varphi, \psi)$ auch die Randbedingungen festgelegt sind.

Es sei $\nu = \nu(x)$ die äußere Normale an $\partial\Omega$. Für $\mu : \Omega \to \mathbb{R}^n$ aus (3.15) setzen wir voraus, daß $\mu_i \in \mathbb{W}_2^1(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$ und

$$\nu \cdot \mu|_{\partial\Omega} = 0 \tag{3.52}$$

gelten. Am Rande des Gebietes bewege sich das Medium also parallel zum Rand.

Für $\mathcal{B} : H \to V'$, $b : H \times V \to \mathbb{R}$ wählen wir

$$\big(\mathcal{B}\varphi\big)(\psi) = b(\varphi, \psi) := -\int\limits_\Omega \varphi(x)\,\nabla \cdot \big(\mu(x)\psi(x)\big)\,\mathrm{d}x \quad , \qquad \varphi \in H,\ \psi \in V \ . \tag{3.53}$$

Für $\varphi \in V$ gilt wegen der Voraussetzung (3.52) gemäß Korollar A.2.5, Gleichung (A.1) für $\psi \in V$ beliebig

$$\big(\mathcal{B}\varphi\big)(\psi) = b(\varphi, \psi) = \int\limits_\Omega \big(\mu(x) \cdot \nabla\varphi(x)\big)\,\psi(x)\,\mathrm{d}x \quad .$$

Es muß sichergestellt werden, daß die Voraussetzung (3.27) an $b(\cdot, \cdot)$ erfüllt ist. Korollar A.2.5, Gleichung (A.2) liefert bei Beachtung von (3.52)

$$2\int\limits_\Omega \varphi(\mu \cdot \nabla\varphi)\,\mathrm{d}x + \int\limits_\Omega \varphi^2(\mathrm{div}\ \mu)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial\Omega} (\mu \cdot \nu)\varphi^2\,\mathrm{d}s = 0 \quad .$$

Damit ist $b(\varphi,\varphi)\geq 0$, falls

$$\operatorname{div}\mu(x)\leq 0 \quad \text{für } x\in\Omega \quad . \tag{3.54}$$

Die Voraussetzung $b(\varphi,\varphi)\geq 0$, und damit (3.54), wird zur Herleitung der Energieabschätzung (3.30) benötigt. Sie besagt, daß μ keine Quellen besitzen darf. Somit wird dem System aufgrund der Mediumsgeschwindigkeit also keine Energie hinzugefügt. Ohne die Forderung (3.52) müsste auch $(\mu\cdot\nu)\big|_{\partial\Omega}\geq 0$ vorausgesetzt werden, damit auch durch den Rand $\partial\Omega$ keine Energie in das System transportiert wird.

Wir setzen für das folgende die Gültigkeit von (3.52) und (3.54) voraus.

Der Operator $\mathcal{C}$ ist gemäß (3.20) definiert. Ebenso, wie wir $H=L^2(\Omega)$ mit seinem Dualraum identifizieren, unterscheiden wir auch nicht zwischen der Funktion $q(x,t)\in L^2(Q)$ und dem Funktional $q(\psi)=\int\limits_Q q(x,t)\psi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ auf $L^2(Q)$.

Wir kontrollieren, ob das Problem (3.18), (3.19) somit die verallgemeinerten Lösungen von (3.15)-(3.17) beschreibt. Hierzu sei $\psi\in V=W_2^1(\Omega)$ beliebig und $u\in W_2^2(Q)$ eine Lösung von (3.18), (3.19). Wir werden später sehen, daß es solche glatten Lösungen bei stärkeren Voraussetzungen an die Koeffizienten, die Inhomogenität und die Anfangsdaten wirklich gibt.

Die Funktion u erfüllt (3.18) und damit gilt für $\psi\in V$ beliebig (wir können (3.23) verwenden):

$$\begin{aligned}
\int\limits_Q \rho u_{tt}\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int\limits_Q(\mu\cdot\nabla u_t)\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int\limits_Q\nabla u\cdot\nabla\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-\int\limits_Q q\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= 0,\\
\Leftrightarrow \int\limits_Q\Big(\rho u_{tt}+(\mu\cdot\nabla u_t)-q\Big)\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-\int\limits_Q\psi\,\Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int\limits_{\partial\Omega\times(0,T)}\frac{\partial u}{\partial\nu}\psi\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t &= 0,\\
\Leftrightarrow \int\limits_Q\Big(\rho u_{tt}+(\mu\cdot\nabla u_t)-\Delta u-q\Big)\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int\limits_{\partial\Omega\times(0,T)}\frac{\partial u}{\partial\nu}\psi\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t &= 0.
\end{aligned}$$

Dies kann nur für alle $\psi\in V$ erfüllt sein, wenn (3.15) und (3.17) gelten. Die Anfangsbedingungen sind ohnehin identisch.

Für den Satz 3.1.10 benötigen wir das nächste technische Lemma.

Lemma 3.1.9 *Es seien $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$ und $K\geq 1$. Für $i\in\{0,\dots,k\}$ und $m\in\{0,\dots,k-i\}$ seien $q_{i,m}$ und $a_{i,m}$ reelle, nicht–negative Zahlen. Für $i<0$ oder $m<0$ sei $a_{i,m}=0$. Für $i\in\{2,\dots,k\}$ und $m\in\{0,\dots,k-i\}$ gelte*

$$a_{i,m}\leq K\big(q_{i,m}+a_{i-1,m+1}+a_{i-2,m+2}\big) \quad . \tag{3.55}$$

Dann ist für $i\in\{0,\dots,k\}$ und $m\in\{0,\dots,k-i\}$

$$a_{i,m}\leq\max\big(1,(2K)^{i-1}\big)\left(\sum_{j=0}^{i-2}q_{i-j,m+j}+a_{1,m+i-1}+a_{0,m+i}\right) \quad . \tag{3.56}$$

<u>*Beweis:*</u> Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über i. Die Fälle $i = 0$ und $i = 1$ gelten für alle $m \geq 0$ trivialerweise. Für $0 \leq i' < i$ sei (3.56) bereits für $m \in \{0, \dots, k-i'\}$ gezeigt. Insbesondere gelte (3.56) also für die Indexpaare $i-1, m+1$ und $i-2, m+2$ anstelle von i, m. Wir schreiben diese Voraussetzungen hin und indizieren die Summe über j sofort um:

$$\begin{aligned} a_{i-2,m+2} &\leq \max\left(1, (2K)^{i-3}\right) \left(\sum_{j=2}^{i-2} q_{i-j,m+j} + a_{1,m+i-1} + a_{0,m+i} \right) , \\ a_{i-1,m+1} &\leq \max\left(1, (2K)^{i-2}\right) \left(\sum_{j=1}^{i-2} q_{i-j,m+j} + a_{1,m+i-1} + a_{0,m+i} \right) . \end{aligned}$$

Nach der Rekursionsformel (3.55) gilt nun

$$\begin{aligned} a_{i,m} &\leq K\big(q_{i,m} + a_{i-1,m+1} + a_{i-2,m+2}\big) \\ &\leq \max\left(1, (2K)^{i-2}\right) K \left(q_{i,m} + \sum_{j=1}^{i-2} q_{i-j,m+j} + \sum_{j=2}^{i-2} q_{i-j,m+j} + 2a_{1,m+i-1} + 2a_{0,m+i} \right) \\ &\leq \max\left(1, (2K)^{i-1}\right) \left(\sum_{j=0}^{i-2} q_{i-j,m+j} + a_{1,m+i-1} + a_{0,m+i} \right) . \end{aligned}$$

□

Die Abschätzung (3.56) ist in Bezug auf den Koeffizienten sicherlich nicht scharf, für unsere Zwecke wird sie jedoch ausreichen.
Als Anwendung von Satz 3.1.8 erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 3.1.10 *Wir betrachten mit den in (3.51), (3.53) und (3.20) definierten Operatoren $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ die hyperbolische Gleichung (3.18) mit den Anfangsbedingungen (3.19). Es sei $k \geq 2$ und $\Omega \in C^{k+2}$, $\rho \in W_\infty^{k-2}(\Omega)$, $\mu \in \left(W_\infty^{k-1}(\Omega)\right)^n$. Für $k = 2$ gelte $\rho \in W_\infty^1(\Omega)$*

Zusätzlich sei $u_0 \in W_2^k(\Omega)$, $\left.\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0$, $u_1 \in W_2^{k-1}(\Omega)$, $q \in W_2^j\big((0,T); W^{k-1-j}(\Omega)\big)$, $j = 0, \dots, k-1$. Für $i \in \{2, \dots, k\}$ sei $u_i \in W_2^{k-i}(\Omega)$ definiert durch

$$u_i := \frac{1}{\rho(x)} \left(\frac{\mathrm{d}^{i-2} q}{\mathrm{d}t^{i-2}}(0) - \mu \cdot \nabla u_{i-1} + \Delta u_{i-2} \right) .$$

Dann gilt für die eindeutige Lösung u von (3.18) und (3.19) und damit von (3.15)-(3.17):

$$u \in W_2^{k-1}\big((0,T); V\big), \quad \frac{\mathrm{d}^k u(t)}{\mathrm{d}t^k} \in L^2\big((0,T); H\big)$$

und

$$\|u\|^2_{\substack{k-1,2,(0,T)\\1,2,\Omega}} + \|u\|^2_{\substack{k,2,(0,T)\\0,2,\Omega}} \leq C_k \left(\|u_0\|^2_{k,2,\Omega} + \|u_1\|^2_{k-1,2,\Omega} + \sum_{j=0}^{k-1} \|q\|^2_{\substack{k-j-1,2,(0,T)\\j,2,\Omega}} \right) . \quad (3.57)$$

Hierbei ist $C_k = 4kT\left(6\left\|\frac{1}{\rho(x)}\right\|^2_{1,\infty,\Omega}\left(c_T^2 + n\sum_{j=1}^n \|\mu_j\|^2_{1,\infty,\Omega}\right)+2\right)^{k-1} C_0$. *Es ist* $v^{(k-1)} = \frac{\mathrm{d}^{k-1}u}{\mathrm{d}t^{k-1}}$ *die Lösung von*

$$\mathcal{C}v_{tt}(t) + \mathcal{B}v_t(t) + \mathcal{A}v(t) = \frac{\mathrm{d}^{k-1}q(t)}{\mathrm{d}t^{k-1}} \tag{3.58}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$v(0) = u_{k-1}, \quad v_t(0) = u_k \quad . \tag{3.59}$$

Beweis:

Die Voraussetzungen zu Satz 3.1.7 sind nach Wahl der Räume V und H und der Operatoren $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ erfüllt. Damit haben wir eine eindeutige Lösung des Problems (3.18), (3.19).

Induktiv erhält man für $i \in \{2,\ldots,k\}$, daß wegen $u_{i-2} \in W_2^{k-(i-2)}(\Omega)$ und $u_{i-1} \in W_2^{k-(i-1)}(\Omega)$ wiederum $u_i \in W_2^{k-i}(\Omega)$ gilt. Wegen $\rho \in W_\infty^{k-2}$ und $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ verschlechtert der Faktor $1/\rho(x)$ die Glattheit von u_i nicht.

Bevor wir zum eigentlichen Beweis kommen, leiten wir die Abschätzung (3.60) für $\|u_i\|^2_{m,2,\Omega}$ her.

Nach den Bemerkungen 3.1.3 und 3.1.5 gilt für $i \in \{2,\ldots,k\}$ und $m \in \{0,\ldots,k-i\}$:

$$\begin{aligned}
\|u_i\|^2_{m,2,\Omega} &\overset{(3.8)}{\leq} 3\left\|\tfrac{1}{\rho(x)}\right\|^2_{m,\infty,\Omega}\left(\left\|\frac{\mathrm{d}^{i-2}q}{\mathrm{d}t^{i-2}}(0)\right\|^2_{m,2,\Omega} + \|\mu\cdot\nabla u_{i-1}\|^2_{m,2,\Omega} + \|\Delta u_{i-2}\|^2_{m,2,\Omega}\right) \\
&\overset{(3.10)}{\leq} 3\left\|\tfrac{1}{\rho(x)}\right\|^2_{m,\infty,\Omega}\left(c_T^2\left\|\frac{\mathrm{d}^{i-2}q}{\mathrm{d}t^{i-2}}\right\|^2_{\substack{1,2,(0,T)\\ m,2,\Omega}}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + n\sum_{j=1}^n \|\mu_j\|^2_{m,\infty,\Omega}\|u_{i-1}\|^2_{m+1,2,\Omega} + \|u_{i-2}\|^2_{m+2,2,\Omega}\right) \\
&\leq K_m\left(\left\|\frac{\mathrm{d}^{i-2}q}{\mathrm{d}t^{i-2}}\right\|^2_{\substack{1,2,(0,T)\\ m,2,\Omega}} + \|u_{i-1}\|^2_{m+1,2,\Omega} + \|u_{i-2}\|^2_{m+2,2,\Omega}\right) \quad ,
\end{aligned}$$

mit

$$K_m = 3\left\|\tfrac{1}{\rho(x)}\right\|^2_{m,\infty,\Omega}\left(c_T^2 \;+\; n\sum_{j=1}^n \|\mu_j\|^2_{m,\infty,\Omega}\right) \quad .$$

Hierbei ist $c_T = 2\max(T, \frac{1}{T})$ nach Lemma 3.1.5. Bei der Einführung von K_m haben wir $c_T^2 \geq 1$ benutzt. Wegen $i \geq 2$ ist $m \leq k-2$ und damit $K_m \leq K_{k-2}$ für alle verwendeten m. Mit

$$K = 1 + K_{k-2}, \quad a_{i,m} = \|u_i\|^2_{m,2,\Omega} \quad \text{und} \quad q_{i,m} = \left\|\frac{\mathrm{d}^{i-2}q}{\mathrm{d}t^{i-2}}\right\|^2_{\substack{1,2,(0,T)\\ m,2,\Omega}}$$

liefert Lemma 3.1.9 für $i \in \{0,\dots,k\}$ und $m \in \{0,\dots,k-i\}$:

$$\|u_i\|^2_{m,2,\Omega} \leq (2K)^{i-1} \left(\sum_{j=0}^{i-2} \left\| \frac{\mathrm{d}^{i-j-2} q}{\mathrm{d}t^{i-j-2}} \right\|^2_{\substack{1,2,(0,T)\\ m+j,2,\Omega}} + \|u_1\|^2_{m+i-1,2,\Omega} + \|u_0\|^2_{m+i,2,\Omega} \right) . \tag{3.60}$$

Wir führen den Beweis des Satzes per vollständiger Induktion über k. Der Satz ist für $k \geq 2$ formuliert, da einige Voraussetzungen nur für $k \geq 2$ ausreichend sind. Unter den Voraussetzungen bei $k = 2$ gilt der Satz jedoch auch mit der Aussage für $k = 1$. Dies ergibt sich direkt aus Satz 3.1.7. Wir können den Induktionsbeweis daher mit dem Schritt $k-1 \mapsto k$ für $k \geq 2$ führen und die Aussage des Satzes für $k = 1$ aus der Induktionsannahme voraussetzen.

Um noch die Abschätzung (3.57) bei $k = 1$ in der gewünschten Form zu erhalten, integrieren wir Gleichung (3.30) von 0 bis T über τ:

$$\|u\|^2_{\substack{0,2,(0,T)\\ 1,2,\Omega}} + \|u\|^2_{\substack{1,2,(0,T)\\ 0,2,\Omega}} \leq C_1 \left(\|u_0\|^2_{1,2,\Omega} + \|u_1\|^2_{0,2,\Omega} + \|q\|^2_{\substack{0,2,(0,T)\\ 0,2,\Omega}} \right) \tag{3.61}$$

mit $C_1 = 2TC_0$. Hierbei erhalten wir den Faktor T aufgrund der Integration. Die Zahl 2 kommt hinzu, weil der Ausdruck $\|u\|^2_{\substack{0,2,(0,T)\\ 0,2,\Omega}}$ in obiger Formulierung in beiden Summanden auf der linken Seite auftaucht, in Abschätzung (3.30) jedoch nur einmal.

Wir führen nun den Induktionsschritt $k-1 \mapsto k$ für $k \geq 2$.

Es ist laut Induktionsvoraussetzung $\frac{\mathrm{d}^{k-2} u}{\mathrm{d}t^{k-2}} = v^{(k-2)}$ die Lösung von

$$\mathcal{C} v_{tt}(t) + \mathcal{B} v_t(t) + \mathcal{A} v(t) = \frac{\mathrm{d}^{k-2} q(t)}{\mathrm{d}t^{k-2}}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$v(0) = u_{k-2}, \quad v_t(0) = u_{k-1} \quad .$$

Auf dieses Problem wenden wir Satz 3.1.8 an. Anstelle der dortigen Bezeichner q, u_0, u_1 und u_2 verwenden wir $\tilde{q}$, $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$ und $\tilde{u}_2$. Mit $\tilde{q} = \frac{\mathrm{d}^{k-2} q}{\mathrm{d}t^{k-2}} \in W_2^1\big((0,T); H\big)$, $\tilde{u}_0 = u_{k-2} \in W_2^2(\Omega)$, $\tilde{u}_1 = u_{k-1} \in V = W_2^1(\Omega)$ und $\tilde{u}_2 = u_k \in H = L^2(\Omega)$ liefert Satz 3.1.8

$$v^{(k-2)} \in W_2^1\big((0,T); V\big), \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} v^{(k-2)}(t) \in L^2\big((0,T); H\big)$$

und damit

$$u \in W_2^{k-1}\big((0,T); V\big), \quad \frac{\mathrm{d}^k u(t)}{\mathrm{d}t^k} \in L^2\big((0,T); H\big)$$

und $v^{(k-1)} = \frac{\mathrm{d}v^{(k-2)}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^{k-1} u}{\mathrm{d}t^{k-1}}$ erfüllt die Gleichung (3.58) mit den Anfangsbedingungen (3.59). Als Lösung von (3.58), (3.59) erfüllt $v^{(k-1)} = \frac{\mathrm{d}^{k-1} u}{\mathrm{d}t^{k-1}}$ die Abschätzung aus

Satz 3.1.7 in der Formulierung von Ungleichung (3.61):

$$\left\|\frac{\mathrm{d}^{k-1}u}{\mathrm{d}t^{k-1}}\right\|^2_{\substack{0,2,(0,T)\\1,2,\Omega}} + \left\|\frac{\mathrm{d}^{k-1}u}{\mathrm{d}t^{k-1}}\right\|^2_{\substack{1,2,(0,T)\\0,2,\Omega}}$$
$$\leq C_1\left(\|u_{k-1}\|^2_{1,2,\Omega} + \|u_k\|^2_{0,2,\Omega} + \left\|\frac{\mathrm{d}^{k-1}q}{\mathrm{d}t^{k-1}}\right\|^2_{\substack{0,2,(0,T)\\0,2,\Omega}}\right) \quad . \tag{3.62}$$

Nach (3.60) gilt

$$\|u_{k-1}\|^2_{1,2,\Omega} \leq (2K)^{k-2}\left(\sum_{j=0}^{k-3}\left\|\frac{\mathrm{d}^{k-j-3}q}{\mathrm{d}t^{k-j-3}}\right\|^2_{\substack{1,2,(0,T)\\j+1,2,\Omega}} + \|u_1\|^2_{k-1,2,\Omega} + \|u_0\|^2_{k,2,\Omega}\right) \tag{3.63}$$

und

$$\|u_k\|^2_{0,2,\Omega} \leq (2K)^{k-1}\left(\sum_{j=0}^{k-2}\left\|\frac{\mathrm{d}^{k-j-2}q}{\mathrm{d}t^{k-j-2}}\right\|^2_{\substack{1,2,(0,T)\\j,2,\Omega}} + \|u_1\|^2_{k-1,2,\Omega} + \|u_0\|^2_{k,2,\Omega}\right) \quad . \tag{3.64}$$

Eine Indexverschiebung zeigt, daß die Summe in (3.63) nur Summanden enthält, die auch in der Summe in (3.64) auftauchen. Der Summand $\|\frac{\mathrm{d}^{k-1}q}{\mathrm{d}t^{k-1}}\|^2_{\substack{0,2,(0,T)\\0,2,\Omega}}$ aus (3.62) kommt in der Summe in (3.63) nicht vor. In der Summe in (3.64) taucht er aber auf. Da wir die Summen zusammen abschätzen, schlagen wir diesen Summanden zu der Summe in (3.63) dazu und müssen ihn im folgenden nicht mehr beachten. Zusammen erhalten wir

$$\left\|\frac{\mathrm{d}^{k-1}u}{\mathrm{d}t^{k-1}}\right\|^2_{\substack{0,2,(0,T)\\1,2,\Omega}} + \left\|\frac{\mathrm{d}^{k-1}u}{\mathrm{d}t^{k-1}}\right\|^2_{\substack{1,2,(0,T)\\0,2,\Omega}}$$
$$\leq 2C_1(2K)^{k-1}\left(\|u_0\|^2_{k,2,\Omega} + \|u_1\|^2_{k-1,2,\Omega} + \sum_{j=0}^{k-2}\left\|\frac{\mathrm{d}^{k-j-2}q}{\mathrm{d}t^{k-j-2}}\right\|^2_{\substack{1,2,(0,T)\\j,2,\Omega}}\right) \quad .$$

Zusätzlich haben wir aus der Induktionsvoraussetzung die Abschätzung (3.57) für $k-1$ anstelle von k:

$$\|u\|^2_{\substack{k-2,2,(0,T)\\1,2,\Omega}} + \|u\|^2_{\substack{k-1,2,(0,T)\\0,2,\Omega}} \leq C_{k-1}\left(\|u_0\|^2_{k-1,2,\Omega} + \|u_1\|^2_{k-2,2,\Omega} + \sum_{j=0}^{k-2}\|q\|^2_{\substack{k-j-2,2,(0,T)\\j,2,\Omega}}\right)$$

und somit gilt

$$\|u\|^2_{\substack{k-1,2,(0,T)\\1,2,\Omega}} + \|u\|^2_{\substack{k,2,(0,T)\\0,2,\Omega}} \leq \tilde{C}_k\left(\|u_0\|^2_{k,2,\Omega} + \|u_1\|^2_{k-1,2,\Omega} + \sum_{j=0}^{k-1}\|q\|^2_{\substack{k-j-1,2,(0,T)\\j,2,\Omega}}\right)$$

mit $\tilde{C}_k = C_{k-1} + 2C_1(2K)^{k-1}$.

Es bleibt noch $\tilde{C}_k \leq C_k$ nachzuweisen. Es ist $C_k = 4kT(2K)^{k-1}C_0$ für $k \geq 2$ und $C_1 = 2TC_0$. Den Nachweis führen wir ebenfalls per Induktion über k. Der Fall $k = 2$ ist klar. Für $k > 2$ gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_k &= C_{k-1} + 2(2K)^{k-1}C_1 \\
&= 2(k-1)(2K)^{k-2}C_1 + 2(2K)^{k-1}C_1 \\
&= 2\big((k-1)(2K)^{k-2} + (2K)^{k-1}\big)C_1 \\
&\leq 2k(2K)^{k-1}C_1 \\
&= C_k \quad .
\end{aligned}$$

□

Damit haben wir eine höhere Regularität der Lösung u bezüglich der Zeit, falls die Koeffizienten, die Inhomogenität und die Anfangswerte glatter sind als in Satz 3.1.7 verlangt. Die Beweisidee war im wesentlichen die Differentiation der Gleichung bezüglich t und die Anwendung von Satz 3.1.7 auf die so entstandene Gleichung. Für die Regularität bezüglich der Ortsvariablen fassen wir u als Lösung eines elliptischen Problems auf, das entsteht, wenn wir die Terme, die zeitliche Ableitungen von u enthalten, auf die rechte Seite der Gleichung schreiben. Hierzu benutzen wir im Beweis des folgenden Satzes das Lemma 3.1.6.

Satz 3.1.11 *Es sei $k \geq 2$. Die Voraussetzungen von Satz 3.1.10 seien erfüllt.*
Dann gilt für die eindeutige Lösung u von (3.18), (3.19):

$$u \in W_2^{k-i}\big((0,T); W_2^i(\Omega)\big) \quad \text{für } i = 0, \ldots, k \quad .$$

Mit $\kappa_i = c_{i,\Omega}\left(\|\rho\|^2_{i-2,\infty,\Omega} + \sum_{j=1}^{n}\|\mu_j\|^2_{i-2,\infty,\Omega} + \lambda_0^2\right)$ *und* $C_{k,i} = (2\kappa_i)^i C_k$ *ist weiterhin*

$$\|u\|^2_{\substack{k-i,2,(0,T)\\ i,2,\Omega}} \leq C_{k,i}\left(\|u_0\|^2_{k,2,\Omega} + \|u_1\|^2_{k-1,2,\Omega} + \sum_{j=0}^{k-1}\|q\|^2_{\substack{k-j-1,2,(0,T)\\ j,2,\Omega}}\right) \quad . \tag{3.65}$$

<u>*Beweis:*</u> Sei $t \in (0,T)$ fest. λ_0 sei wie in der Voraussetzung zu Lemma 3.1.6 gegeben. Als Lösung von (3.18), (3.19) ist u auch Lösung von (3.15)-(3.17) und damit erfüllt $u(\cdot,t) \in W_2^2(\Omega)$ die Gleichung

$$-\Delta u(x,t) + \lambda_0 u(x,t) = \tilde{q}(x,t)$$

mit

$$\tilde{q}(x,t) = q(x,t) - \rho(x)u_{tt}(x,t) - \mu(x)\cdot\nabla u_t(x,t) + \lambda_0 u(x,t) \tag{3.66}$$

und homogenen Neumann-Randbedingungen.

Nach den Voraussetzungen gilt $\tilde{q}(t) \in L^2(\Omega)$ für festes $t \in (0,T)$. Wir zeigen nun die Behauptung für festes $k \geq 2$ per vollständiger Induktion über i. Für den Nachweis bei i setzen wir die Aussage für $i-1$ und $i-2$ voraus.

Satz 3.1.10 liefert die gewünschte Aussage bereits für $i = 0$ und $i = 1$ bei $k \geq 2$ beliebig. Der Fall $k = 1$ ist durch Satz 3.1.7 abgedeckt.

Für den Induktionsschritt sei $i \in \{2, \ldots, k\}$ und es gelten die Induktionsannahmen

$$u \in W_2^{k-(i-1)}\big((0,T); W_2^{i-1}(\Omega) \cap W_2^2(\tfrac{\partial}{\partial\nu})\big) \cap W_2^{k-(i-2)}\big((0,T); W_2^{i-2}(\Omega) \cap W_2^2(\tfrac{\partial}{\partial\nu})\big) ,$$

mit

$$W_2^2(\tfrac{\partial}{\partial\nu}) = \left\{\varphi \in W_2^2(\Omega) : \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|_{\partial\Omega} = 0\right\} \quad .$$

Wegen (3.66) ist $\tilde{q} \in W_2^{k-i}\big((0,T); W_2^{i-2}(\Omega)\big)$. Das Lemma 3.1.6 liefert $u(\cdot,t) \in W_2^i(\Omega)$. Um $u \in W_2^{k-i}\big((0,T); W_2^i(\Omega)\big)$ folgern zu können, müssen wir noch zeigen, daß die lineare Abbildung

$$L : W_2^{k-i}\big((0,T); W_2^{i-2}(\Omega)\big) \to W_2^{k-i}\big((0,T); W_2^i(\Omega)\big), \quad \tilde{q} \mapsto u$$

beschränkt ist. Es ist

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{\substack{k-i,2,(0,T)\\ i,2,\Omega}} &= \int_0^T \sum_{j=1}^{k-i} \left\| \frac{\mathrm{d}^j\big(L\tilde{q}\big)(t)}{\mathrm{d}t^j} \right\|^2_{i,2,\Omega} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \sum_{j=1}^{k-i} \left\| L\frac{\mathrm{d}^j\tilde{q}(t)}{\mathrm{d}t^j} \right\|^2_{i,2,\Omega} \mathrm{d}t \\
&\overset{(3.11)}{\leq} c_{i,\Omega} \int_0^T \sum_{j=1}^{k-i} \left\| \frac{\mathrm{d}^j\tilde{q}(t)}{\mathrm{d}t^j} \right\|^2_{i-2,2,\Omega} \mathrm{d}t \\
&\leq c_{i,\Omega}\, \|\tilde{q}\|^2_{\substack{k-i,2,(0,T)\\ i-2,2,\Omega}} \quad .
\end{aligned}$$

Also gilt

$$u \in W_2^{k-i}\big((0,T); W_2^i(\Omega)\big) \quad .$$

Wir schätzen die Normen von u weiter ab. Bei dem mit $(*)$ gekennzeichneten Schritt wird $\|u\|^2_{\substack{k-i,2,(0,T)\\ i-2,2,\Omega}} \leq \|u\|^2_{\substack{k-(i-2),2,(0,T)\\ i-2,2,\Omega}}$ ausgenutzt.

$$\begin{aligned}
&\|u\|^2_{\substack{k-i,2,(0,T)\\ i,2,\Omega}} \\
&\leq c_{i,\Omega}\, \|\tilde{q}\|^2_{\substack{k-i,2,(0,T)\\ i-2,2,\Omega}} \\
&= c_{i,\Omega}\, \|q - \rho u_{tt} - \mu \cdot \nabla u_t + \lambda_0 u\|^2_{\substack{k-i,2,(0,T)\\ i-2,2,\Omega}} \\
&\leq c_{i,\Omega} \Bigg(\|q\|^2_{\substack{k-i,2,(0,T)\\ i-2,2,\Omega}} + \|\rho\|^2_{i-2,\infty,\Omega} \|u_{tt}\|^2_{\substack{k-i,2,(0,T)\\ i-2,2,\Omega}} \\
&\qquad\qquad + \sum_{j=1}^{n} \|\mu_j\|^2_{i-2,\infty,\Omega} \|\nabla u_t\|^2_{\substack{k-i,2,(0,T)\\ i-2,2,\Omega}} + \lambda_0^2 \|u\|^2_{\substack{k-i,2,(0,T)\\ i-2,2,\Omega}} \Bigg)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(*)}{\leq} \underbrace{c_{i,\Omega}\left(\|\rho\|^2_{i-2,\infty,\Omega} + \sum_{j=1}^{n} \|\mu_j\|^2_{i-2,\infty,\Omega} + \lambda_0^2\right)}_{=\kappa_i} \times \\
&\qquad\qquad \times \left(\|q\|^2_{\substack{k-i,2,(0,T)\\ i-2,2,\Omega}} + \|u\|^2_{\substack{k-(i-2),2,(0,T)\\ i-2,2,\Omega}} + \|u\|^2_{\substack{k-(i-1),2,(0,T)\\ i-1,2,\Omega}}\right) \\
&\leq \kappa_i\left(\|q\|^2_{\substack{k-i,2,(0,T)\\ i-2,2,\Omega}} + (C_{k,i-2}+C_{k,i-1})\left(\|u_0\|^2_{k,2,\Omega} + \|u_1\|^2_{k-1,2,\Omega} + \sum_{j=0}^{k-1}\|q\|^2_{\substack{k-j-1,2,(0,T)\\ j,2,\Omega}}\right)\right) \\
&\leq \underbrace{\kappa_i(1+C_{k,i-2}+C_{k,i-1})}_{=:\tilde{C}_{k,i}}\left(\|u_0\|^2_{k,2,\Omega} + \|u_1\|^2_{k-1,2,\Omega} + \sum_{j=0}^{k-1}\|q\|^2_{\substack{k-j-1,2,(0,T)\\ j,2,\Omega}}\right) \quad .
\end{aligned}
$$

Zum Nachweis von (3.65) muß nun noch $\tilde{C}_{k,i} \leq C_{k,i}$ nachgewiesen werden. Für $i = 0$ und $i = 1$ ist nichts zu zeigen. Man beachte $\kappa_j \geq \kappa_{j-1}$ bei $j \in \{1, \ldots, k\}$. Für $i \in \{2, \ldots, k\}$ folgt per Induktion:

$$
\begin{aligned}
\tilde{C}_{k,i} &= \kappa_i(1 + C_{k,i-2} + C_{k,i-1}) \\
&= \kappa_i\big(1 + (2\kappa_{i-2})^{i-2}C_k + (2\kappa_{i-1})^{i-1}C_k\big) \\
&\leq \kappa_i^i(1 + 2^{i-2} + 2^{i-1})C_k \\
&\leq (2\kappa_i)^i C_k \quad .
\end{aligned}
$$

□

Wir können nun als Ergebnis den Existenz–, Eindeutigkeits– und Regularitätssatz für unser hyperbolisches Problem formulieren.

Satz 3.1.12 *Sei $k \geq 1$. Es sei $\Omega \in C^{k+2}$, $T > 0$ und $Q = \Omega \times (0,T)$.*

Für $k \in \{1,2\}$ sei $\rho \in W^1_\infty(\Omega)$ mit $\frac{1}{\rho} \in W^1_\infty(\Omega)$ und bei $k \geq 3$ sei $\rho \in W^{k-2}_\infty(\Omega)$ mit $\frac{1}{\rho} \in W^{k-2}_\infty(\Omega)$. Es gelte $0 < \rho_0 \leq \rho \leq \rho_1$. Weiter gelte $\mu \in \big(W^{k-1}_\infty(\Omega)\big)^n$ mit $\operatorname{div}\mu = 0$, $\nu \cdot \mu|_{\partial\Omega} = 0$ und $q \in W^{k-1}_2(Q)$. Schließlich seien $u_0 \in W^k_2(\Omega)$ und $u_1 \in W^{k-1}_2(\Omega)$ mit $\left.\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0$ gegeben.

Dann existiert genau ein $u \in W^1_2(Q)$, welches das gemischte Anfangswert– Randwertproblem

$$
\left.
\begin{aligned}
\rho(x)u_{tt}(x,t) + \mu(x)\cdot\nabla u_t(x,t) - \Delta u(x,t) &= q(x,t) && \text{in } Q \quad , \\
u(x,0) &= u_0(x) && \text{in } \Omega \quad , \\
u_t(x,0) &= u_1(x) && \text{in } \Omega \quad , \\
\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times (0,T)
\end{aligned}
\right\} \quad (3.67)
$$

erfüllt. Es ist $u \in W^k_2(Q)$ und es gilt

$$
\|u\|_{k,2,Q} \leq C\big(\|u_0\|_{k,2,\Omega} + \|u_1\|_{k-1,2,\Omega} + \|q\|_{k-1,2,Q}\big)
$$

mit

$$C = \begin{cases} \sqrt{C_0} & \text{, falls } k = 1 \\ \sqrt{(2\kappa_k)^k C_k} & \text{, falls } k \geq 2 \end{cases} \tag{3.68}$$

und

$$\begin{aligned}
\kappa_k &= c_{k,\Omega} \left(\|\rho\|^2_{k-2,\infty,\Omega} + \sum_{j=1}^{n} \|\mu_j\|^2_{k-2,\infty,\Omega} + \lambda_0^2 \right) \quad , \\
c_{k,\Omega}, \lambda_0 & \quad \text{aus Lemma 3.1.6} \quad , \\
C_k &= 4kT \left(6 \left\| \tfrac{1}{\rho(x)} \right\|^2_{1,\infty,\Omega} \left(c_T^2 + n \sum_{j=1}^{n} \|\mu_j\|^2_{1,\infty,\Omega} \right) + 2 \right)^{k-1} C_0 \quad , \\
c_T &= 2 \max(T, \tfrac{1}{T}) \quad \text{nach Lemma 3.1.5} \quad , \\
C_0 &= \frac{\max(3, \rho_1)\; T \exp(T + 2T^2)}{\min(1, \rho_0)} \quad .
\end{aligned}$$

Beweis: Für den Fall $k = 1$ wird hier mit Hilfe der Isomorphien aus Satz 3.1.4 nur die Aussage von Satz 3.1.7 wiederholt. Für $k \geq 2$ ergibt sich die Aussage wiederum mit Hilfe von Satz 3.1.4 direkt aus Satz 3.1.11. Die Wurzel in Gleichung (3.68) erklärt sich aus der Folgerung (3.6) in Bemerkung 3.1.3.

Bei der Angabe von C_0 wurde $a_1 = 1$, $\lambda = 1$ und $\alpha = 1$ benutzt, vgl. Seite 30. Wir haben $H = L^2(\Omega)$ und $V = W_2^1(\Omega)$ und damit $C_H^V = 1$, vgl. (3.13) und (3.31). □

Im Fall $k = 1$ treten in (3.67) Ableitungen von u auf, die nicht existieren. In diesem Fall ist (3.67) im Sinne von Satz 3.1.7 zu verstehen.

3.2 Betrachtung der Schallaufwege

3.2.1 Herleitung der verallgemeinerten Eikonalgleichung mittels einer Progressive Wave Expansion

Im Falle der Wellengleichung bei ruhendem Medium lassen sich die Laufwege des schnellsten Teiles des Schallsignals anhand der Charakteristiken der Eikonalgleichung berechnen. Für akustische Meßmethoden sind diese Pfade wichtig, da bei Laufzeitmessungen nur Informationen über die Teile des Gebietes gewonnen werden können, die von diesen Pfaden auch wirklich getroffen werden. Falls die Abweichung der Pfade von der geraden Verbindungslinie zwischen Sender und Empfänger die Größenordnung der möglichen Ortsauflösung erreicht, so müssen diese Pfade auch bei der Rekonstruktion berücksichtigt werden. In Kapitel 5 werden wir anhand der Simulation einer Messung in einem Feuerraum mit Deckenfeuerung in der Nähe der Brenner zeigen, daß diese Probleme bei industriellen Anwendungen tatsächlich auftreten.

Wenn das Medium, in dem sich die Schallwelle ausbreitet, nicht ruht, so ist die Situation etwas komplizierter, denn die Umkehrbarkeit der Schallaufwege ist nicht mehr gegeben. Wir wollen im folgenden die verallgemeinerte Eikonalgleichung herleiten, deren

Charakteristiken in diesem Fall die Schallaufwege beschreiben. Wir verwenden hierzu die „Progressive Wave Expansion“ (vgl. [RCD84]), nehmen also an, daß das Schallsignal von einer Quelle der Form $\delta(x - x^S)\delta(t)$ erzeugt wird.

Mit $H(t)$ bezeichnen wir die Heaviside–Funktion in t. Die Schallwelle u erfülle die Wellengleichung

$$\rho u_{tt} + \mu \cdot \nabla u_t - \Delta u = \delta(x - x^S)\delta(t) \tag{3.69}$$

mit homogenen Anfangsdaten. Der Einfachheit halber betrachten wir die Lösung in $\Omega = \mathbb{R}^n$. Nun können wir die Welle zerlegen in die δ-Funktion, ihre Stammfunktion — die Heaviside-Funktion — und einen Restterm. Die Funktion $\varphi(x)$ beschreibt die Wellenfront. Die Restterme $R_i(x,t)$ vernachlässigen wir:

$$u(x,t) = A(x)\delta\big(t - \varphi(x)\big) + B(x)H\big(t - \varphi(x)\big) + R_1(x,t) \quad .$$

Die Ableitungen sind nun gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} u_t &=& A\delta' + B\delta + CH + R_2(x,t) \quad , \\ u_{tt} &=& A\delta'' + B\delta' + C\delta + R_3(x,t) \quad , \\ \nabla u &=& (\nabla A)\delta + A\delta'(-\nabla\varphi) + (\nabla B)H + B\delta(-\nabla\varphi) + R_4(x,t) \quad , \\ \nabla u_t &=& (\nabla A)\delta' + A\delta''(-\nabla\varphi) + (\nabla B)\delta + B\delta'(-\nabla\varphi) + R_5(x,t) \quad , \\ \Delta u &=& A\delta''(-\nabla\varphi)(-\nabla\varphi) + R_6(x,t) \quad . \end{array}$$

Bei Δu haben wir nur noch den Term berücksichtigt, der im folgenden wirklich auftritt. Dies setzen wir in die Gleichung (3.69) ein:

$$\begin{aligned} \rho(x)&\Big(A\delta'' + B\delta' + C\delta + R_3(x,t)\Big) \\ &+ \mu \cdot \Big((\nabla A)\delta' + A\delta''(-\nabla\varphi) + (\nabla B)\delta + B\delta'(-\nabla\varphi) + R_5(x,t)\Big) \\ &- \Big(A\delta''(-\nabla\varphi)(-\nabla\varphi) + R_6(x,t)\Big) \\ =\ & \delta(x - x^S)\delta(t) \quad . \end{aligned}$$

Nun führen wir einen Koeffizientenvergleich für δ'' durch und erhalten:

$$\delta'' : \quad \rho A + \mu \cdot (-\nabla\varphi)A = A|\nabla\varphi|^2 \quad .$$

Damit erhalten wir die verallgemeinerte Eikonalgleichung für ein bewegtes Medium:

$$\rho - \mu \cdot \nabla\varphi = |\nabla\varphi|^2 \quad . \tag{3.70}$$

Alternativ läßt sich die Gleichung auch mit den Methoden der geometrischen Optik herleiten.

3.2.2 Lösung der verallgemeinerten Eikonalgleichung

Es sollen die Charakteristiken der verallgemeinerten Eikonalgleichung (3.70) bestimmt werden. Wir führen dies exemplarisch für zwei Raumdimensionen vor und bezeichnen die Koordinaten mit x, y anstelle von x_1, x_2:

$$\rho(x,y) - \mu(x,y) \cdot \nabla\varphi(x,y) = |\nabla\varphi(x,y)|^2 \quad . \tag{3.71}$$

Eine Variable als Index bedeutet in diesem Abschnitt die Ableitung nach dieser Variablen. Die allgemeine Form der charakteristischen Gleichungen für eine Differentialgleichung $F(x,y,\varphi,p,q) = 0$, $p = \varphi_x$, $q = \varphi_y$ lautet:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= F_p \quad , \\
\dot{y} &= F_q \quad , \\
\dot{z} &= pF_p + qF_q \quad , \\
\dot{p} &= -F_x - F_\varphi p \quad , \\
\dot{q} &= -F_y - F_\varphi q \quad .
\end{aligned}$$

Wir schreiben Gleichung (3.71) in der Form

$$(\varphi_x)^2 + (\varphi_y)^2 + \mu \cdot \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix} - \rho = 0 \quad .$$

Mit $\mu(x,y) = (\mu_1, \mu_2)^t$ läßt sich dies schreiben als

$$F(x,y,\varphi,p,q) = p^2 + q^2 + \mu_1(x,y)p + \mu_2(x,y)q - \rho(x,y) = 0 \quad . \tag{3.72}$$

Das charakteristische System zu (3.72) lautet also

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= 2p + \mu_1(x,y) \quad , \\
\dot{y} &= 2q + \mu_2(x,y) \quad , \\
\dot{z} &= 2p^2 + \mu_1(x,y)p + 2q^2 + \mu_2(x,y)q \\
&= p^2 + q^2 + \rho(x,y) \quad , \\
\dot{p} &= -\frac{\partial \mu_1}{\partial x}p + 2\rho\frac{\partial \rho}{\partial x} \quad , \\
\dot{q} &= -\frac{\partial \mu_2}{\partial y}q + 2\rho\frac{\partial \rho}{\partial y} \quad .
\end{aligned}$$

Für den Weg $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)^t$ ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \mu(x,y) \quad , \\
\ddot{\gamma}(t) &= 2\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu(x,y) \\
&= -2\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mu_1}{\partial x}p \\ \dfrac{\partial \mu_2}{\partial y}q \end{pmatrix} + 4n\nabla n + \dot{x}\frac{\partial \mu}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial \mu}{\partial y}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\mu_1}{\partial x}p \\ \dfrac{\partial\mu_2}{\partial y}q \end{pmatrix} + 4n\nabla n + 2(2p+\mu_1)\frac{\partial\mu}{\partial x} + 2(2q+\mu_2)\frac{\partial\mu}{\partial y} \\
&= 4n\nabla n + 2\begin{pmatrix} \mu_1\dfrac{\partial\mu_1}{\partial x} + (q+\mu_2)\dfrac{\partial\mu_1}{\partial y} \\ \mu_2\dfrac{\partial\mu_2}{\partial y} + (p+\mu_1)\dfrac{\partial\mu_2}{\partial x} \end{pmatrix} \\
&= 4n\nabla n + 2\mu_1\frac{\partial\mu}{\partial x} + 2\mu_2\frac{\partial\mu}{\partial y} + 2\begin{pmatrix} q\dfrac{\partial\mu_1}{\partial y} \\ p\dfrac{\partial\mu_2}{\partial x} \end{pmatrix} \quad .
\end{aligned}
$$

Mit $\mu = 0$ erhalten wir daraus wieder die Formel für die Charakteristiken der Wellengleichung bei ruhendem Medium, wie sie z.B. in [Sch80] verwendet wird.

3.3 Umwandlung dreidimensionaler in zweidimensionale Daten

Wir betrachten ein dreidimensionales akustisches Experiment im gesamten $\mathbb{R}^3$. Im Gegensatz zum Rest dieser Arbeit müssen wir von einem ruhenden Medium ausgehen, es gelte also $\mu = 0$. Die gemessenen Daten sollen so aufbereitet werden, daß sie näherungsweise als Lösung eines zweidimensionalen Experimentes angesehen werden können. Für dieses läßt sich dann das inverse Problem der Wellengleichung wesentlich weniger rechenintensiv lösen. Bei konstanter Schallgeschwindigkeit und ruhendem Medium kann die Lösung der Wellengleichung mittels der Kirchhoffschen Formel angegeben werden.

Abbildung 3.1: Approximation der 3D-Wellenausbreitung durch ein zweidimensionales Modell.

Die Idee läßt sich anhand von Abbildung 3.1 darstellen. Wir nehmen an, die Schallgeschwindigkeit sei konstant. Eine im Ort dreidimensionale Kugelwelle werde im Ursprung erzeugt und an einer Empfängerposition x^E in der xy–Ebene gemessen. Die Quelle wird also im Ort als δ-förmig angenommen, in der Zeit als eine Funktion $\alpha(t)$. Nach endlicher

Zeit hat der Wellenzug die Position x^E passiert. Aus den aufgenommenen Daten kann nun bestimmt werden, welches Signal eine Linienquelle auf der vertikalen Achse mit derselben Zeitcharakteristik $\alpha(t)$ erzeugt hätte, denn diese setzt sich nach dem Huygenschen Prinzip aus Punktquellen an jeder Stelle der Achse zusammen. Da die Schallgeschwindigkeit als konstant angenommen wird, kommt das Signal von einer Position $(0,0,s)$ nur später bei x^E an, unterliegt aber sonst keiner Änderung. Die Integration über alle angenommenen Senderpositionen $(0,0,s)$ liefert also die Zylinderwelle, die von der Linienquelle erzeugt wird. Diese Zylinderwelle ist jedoch in vertikaler Richtung konstant und ihre Projektion auf die xy–Ebene gehorcht der zweidimensionalen Wellengleichung.

Somit können wir also unter den Annahmen einer konstanten Schallgeschwindigkeit und $\Omega = \mathbb{R}^n$ aus den Meßdaten der dreidimensionalen Kugelwelle solche berechnen, die bei zweidimensionaler Wellenausbreitung entstanden wären.

Falls die Schallgeschwindigkeit näherungsweise konstant ist und die Reflektionen an den Wänden noch in das Modell eingebaut werden, sollte es möglich sein, aus diesen Daten zweidimensionale Rekonstruktionen zu erzeugen, die Aussagen über die Schallgeschwindigkeit erlauben.

Wir leiten an dieser Stelle nur die entsprechende Transformationsformel her. Eine numerische Validierung erfolgt in dieser Arbeit nicht. Eine ähnliche Umwandlung der Daten ist in der Geophysik jedoch üblich.

Wir zitieren zunächst die Kirchhoffschen Formeln für zwei und drei Raumdimensionen. Diese Formeln lassen sich aus den Sätze (5.15), (5.17) und (5.25) aus [Fol95] ableiten, allerdings wird dort $c = 1$ gesetzt.

Satz 3.3.1 *(Kirchhoffsche Formeln)*
Es seien $n \in \{2,3\}$, $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $q \in C^2\big(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)\big)$. Die Lösung $u \in C^2\big(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)\big)$ der Anfangswertaufgabe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \Delta u(x,t) = q(x,t) \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \quad ,$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= u_1(x) \end{aligned}\right\} \text{in } \mathbb{R}^n$$

mit $c \in \mathbb{R}^+$ ist gegeben durch:

i) im Fall $n = 2$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi c} \int\limits_{|y|<ct} \frac{u_1(x+y)}{\sqrt{c^2t^2 - |y|^2}} \,\mathrm{d}y + \frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{|y|<ct} \frac{u_0(x+y)}{\sqrt{c^2t^2-|y|^2}} \,\mathrm{d}y \\ &\quad + \frac{1}{2\pi c} \int\limits_{|y|<ct} \int\limits_0^{t-|y|/c} \frac{q(x+y,\tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - |y|^2}} \,\mathrm{d}\tau \,\mathrm{d}y \quad , \end{aligned} \tag{3.73}$$

ii) im Fall $n = 3$

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c} \int\limits_{|x-y|=ct} \frac{u_1(y)}{|x-y|} \,\mathrm{d}\sigma(y) + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{|x-y|=ct} \frac{u_0(y)}{|x-y|} \,\mathrm{d}\sigma(y)$$
$$+ \frac{1}{4\pi c^2} \int\limits_{|x-y|\le ct} \frac{q(y, t-|y-x|/c)}{|x-y|} \,\mathrm{d}y \quad . \tag{3.74}$$

Wir betrachten eine punktförmige Schallquelle mit dem Sendesignal $\alpha(t)$ in $(0,0,s) \in \mathbb{R}^3$ und einen Empfänger in $x^E = (x_1^E, x_2^E, 0) \in \mathbb{R}^3$. Es sei $r = \sqrt{(x_1^E)^2 + (x_2^E)^2}$ und T sei so groß, daß $\operatorname{supp} \alpha \subset \,]0, T - dist(S,E)/c[$ gilt. u_s sei Lösung des Anfangswert–Randwertproblems

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta_3 u &= \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3 - s)\; \alpha(t) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3 \times (0,T) \quad , \\ u &= 0, \quad u_t = 0 \qquad\qquad\quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3 \times \{0\} \quad . \end{aligned}$$

Bei diesem dreidimensionalen Experiment wird gemäß (3.74) das Signal u_s gemessen:

$$\begin{aligned} u_s(x;t) &= \frac{1}{4\pi c^2} \int\limits_{|y|\le ct} \frac{\delta(x_1+y_1)\delta(x_2+y_2)\delta(x_3+y_3-s)\alpha(t-|y|/c)}{|y|} \,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\alpha\big(t - \sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3-s)^2}/c\big)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3-s)^2}} \; H\Big(ct - \sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3-s)^2}\Big). \end{aligned}$$

An der Empfängerposition $x = x^E$ in der x_1/x_2–Ebene lautet das Signal also

$$u_s(x^E;t) = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\alpha\big(t - \sqrt{r^2+s^2}/c\big)}{\sqrt{r^2+s^2}} \; H\Big(ct - \sqrt{r^2+s^2}\Big) \quad . \tag{3.75}$$

Tatsächlich liegen nur die Daten für $s = 0$ vor,

$$u_{s=0}(x^E;t) = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\alpha(t - r/c)}{r} H(ct - r) \quad ,$$

jedoch können wir mit

$$u_s(x^E;t) = \frac{r}{\sqrt{r^2+s^2}} \; u_{s=0}\left(x^E; t + \frac{r - \sqrt{r^2+s^2}}{c}\right) \tag{3.76}$$

die Daten $u_s(x^E;t)$ aus $u_{s=0}(x^E;t)$ erhalten. Wir definieren nun

$$u_{(2)}(x_1,x_2;t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_s(x_1,x_2,0;t)\,\mathrm{d}s \tag{3.77}$$

und zeigen, daß $u_{(2)}$ mit der Lösung der zweidimensionalen Wellengleichung übereinstimmt. Die Lösung u_K des Problems

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta_2 u &= \delta(x_1)\delta(x_2)\; \alpha(t) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^2 \times (0,T) \quad , \\ u &= 0, \quad u_t = 0 \qquad\quad \text{in} \quad \mathbb{R}^2 \times \{0\} \end{aligned}$$

ist gemäß (3.73) gegeben durch

$$u_K(x_1,x_2;t) = \frac{H(ct-|x|)}{2\pi c} \int\limits_0^{t-|x|/c} \frac{\alpha(\tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2-|x|^2}}\,\mathrm{d}\tau \quad .$$

Einsetzen von (3.75) in (3.77) liefert

$$\begin{aligned}
u_{(2)}(x_1,x_2;t) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\alpha\big(t-\sqrt{r^2+s^2}/c\big)}{\sqrt{r^2+s^2}} H(ct-\sqrt{r^2+s^2})\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{H(c^2t^2-r^2)}{2\pi c^2} \int\limits_0^{\sqrt{c^2t^2-r^2}} \frac{\alpha\big(t-\sqrt{r^2+s^2}/c\big)}{\sqrt{r^2+s^2}}\,\mathrm{d}s \\
&\qquad \textit{Substitution: } a=\sqrt{r^2+s^2},\ \frac{\partial a}{\partial s} = s/\sqrt{r^2+s^2} \\
&= \frac{H(c^2t^2-r^2)}{2\pi c^2} \int\limits_r^{ct} \frac{\alpha(t-a/c)}{\sqrt{a^2-r^2}}\,\mathrm{d}a \\
&\qquad \textit{Substitution: } \tau = t-a/c,\ \frac{\partial \tau}{\partial a} = -1/c \\
&= \frac{H(ct-r)}{2\pi c} \int\limits_0^{t-r/c} \frac{\alpha(\tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2-r^2}}\,\mathrm{d}\tau \\
&= u_K(x_1,x_2;t) \quad .
\end{aligned}$$

Wir fassen zusammen:

Das dreidimensionale Problem ist gegeben durch die Lösung $u(x_1,x_2,x_3;t)$ von ($\Omega_3 \subset \mathbb{R}^3$)

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2(x_1,x_2,x_3)\Delta_3 u &= q_3(x)\,\alpha(t) \quad && \text{in } \Omega_3 \times (0,T) \quad , \\
u = 0,\quad u_t &= 0 && \text{in } \Omega_3 \times \{0\} \quad , \\
\frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_3 \times (0,T) \quad .
\end{aligned}$$

Aus den gemessenen Daten $u_{s=0}(x^E;t)$ kann mit (3.76) und (3.77) näherungsweise $u_{(2)}(x^E;t)$ berechnet werden. Die Lösung des inversen Problems der zweidimensionalen Wellengleichung ($\Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2(x_1,x_2)\Delta_2 u &= q_2(x)\,\alpha(t) \quad && \text{in } \Omega_2 \times (0,T) \quad , \\
u = 0,\quad u_t &= 0 && \text{in } \Omega_2 \times \{0\} \quad , \\
\frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_2 \times (0,T)
\end{aligned}$$

mit der Verwendung der Daten $u_2(x^E;t)$ sollte Informationen über die tatsächliche Schallgeschwindigkeit in der Meßebene liefern, wobei natürlich mehrere Sender und Empfänger nötig sind.

Bei der Anwendung dieses Konzeptes treten Probleme auf. Die Schallgeschwindigkeit ist inhomogen, und zwar in allen drei Raumdimensionen. Objekte, die knapp oberhalb oder unterhalb der Meßebene liegen, werden bei der Verwendung der vorgestellten Transformation in die Meßebene abgebildet. Die Reflektionen an den Wänden sind ebenfalls noch nicht berücksichtigt, da obiges Modell von $\Omega = \mathbb{R}^n$ ausgeht. Schließlich ist die tatsächliche Schallquelle nur näherungsweise punktförmig. Diese Näherung gilt aber noch weniger als in der Geophysik, da die Schallsignale durch ein Rohr mit 7 cm Durchmesser in den Kessel geleitet werden und die Schallquelle damit bereits die Größe von besonders kurzen Wellenlängen besitzt. Schließlich konnte die Bewegung des Mediums nicht berücksichtigt werden.

Kapitel 4

Lösungsverfahren für das inverse Problem

4.1 Formulierung des inversen Problems

Wir kommen nun zur Formulierung der inversen Probleme. Wir werden Rückpropagationsverfahren für zwei Problemstellungen aufstellen. Im einen Fall ist die Schallgeschwindigkeit gesucht, im anderen der Zeitanteil der Quelle.

Hierzu schreiben wir das direkte Problem in der Form: Gesucht ist u_j als Lösung des Anfangswert- Randwertproblems

$$u_{tt} + \tilde{\mu}(x) \cdot \nabla u_t - \big(1 + f(x)\big)\Delta u = q_j(x)\alpha(t) \qquad \text{in } Q,\ j \in \{1, \dots, p\} \tag{4.1}$$

mit homogenen Anfangsbedingungen in Ω und homogenen Neumann-Randbedingungen in $\partial\Omega \times (0, T)$. Es ist $\tilde{\mu}(x) = 2v_0(x) = c^2(x)\mu(x)$ die doppelte Mediumsgeschwindigkeit. Wir schreiben $c^2(x) = 1 + f(x)$, da wir bei den numerischen Experimenten davon ausgehen werden, daß die Hintergrundschallgeschwindigkeit durch $c_0 = 1$ gegeben und $f(x)$ zu rekonstruieren ist.

Die Anzahl der bei der Messung verwendeten Schallquellen bezeichnen wir mit p. Entsprechend muß (4.1) für p verschiedene Quellen q_j gelöst werden. Da die Quellen baugleich sind und sich nur durch die Position und die Schallabgaberichtung unterscheiden, gehen wir davon aus, daß der Zeitanteil $\alpha(t)$ bei allen Quellen gleich ist. Wir nehmen $\tilde{\mu}(x)$ und $q_j(x)$ als gegeben an. Bei $\tilde{\mu}(x)$ ist dies berechtigt, da aus der Vektortomographie bereits eine Näherung an die Gasgeschwindigkeit bestimmt werden kann. Weiter setzen wir

$$\tilde{\mu} \in W^2_\infty(\Omega) \quad , \qquad \nu \cdot \tilde{\mu}|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \mu \leq 0$$

voraus, um gemäß Satz 3.1.12 Lösungen der Wellengleichung mit der nötigen Regularität betrachten zu können. Bei der Schallpyrometrie in Braunkohle-Dampferzeugern liegt die Schallgeschwindigkeit bei etwa 700 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, die Gasgeschwindigkeit unter 20 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Bei Anwendungen in der Ozeanographie ist der Unterschied noch größer. Wegen $\|\tilde{\mu}\|_{(L^\infty(\Omega))^n} \ll \|c\|_{L^\infty(\Omega)}$ ist die Näherung aus der Laufzeitauswertung also sicherlich hinreichend. Es sollte aber beachtet werden, daß bereits die in (4.1) verwendete Schreibweise der Quelle als Produkt von $q_j(x)$ und $\alpha(t)$ eine Zusatzannahme bedeutet, die zwar auch in der Geophysik üblich ist, vgl. etwa [BBB+97], aus unserer Herleitung der Wellengleichung in Kapitel 2 jedoch noch nicht hervorgeht.

Zunächst betrachten wir den Fall, daß $\alpha(t)$ bekannt ist und nur $f(x)$ gesucht wird. Es sei also $u_j(f)$ die Lösung des Problems (4.1). Mit den Mikrofonen wird der Schalldruck an Positionen am Rand von Ω gemessen, so daß Meßdaten vorliegen, die ohne Beachtung von Meß- und Modellfehlern als

$$g_j(x,t) = u_j\big(f_M\big)(x,t) \qquad x \in \Gamma,\ t \in (0,T),\ j = 1,\dots,p$$

mit $\Gamma \subset \partial\Omega$ geschrieben werden können. Hierbei bezeichnet f_M die gesuchte Größe f, wie sie bei der Messung tatsächlich vorlag.

Setzen wir $q_j(x)\alpha(t) \in W_2^1(Q)$ und $f \in W_2^1(\Omega)$ voraus, so haben wir laut Satz 3.1.12 Lösungen $u_j \in W_2^2(Q)$ von (4.1). Wir nehmen zunächst $g_j(x,t) \in W_2^{1/2}\big(\partial\Omega \times (0,T)\big)$ an und betrachten das Residuum

$$R : F \to Z\ , \quad R(f) = \sum_{j=1}^{p} \Big(u_j(f)(x,t) - g_j(x,t)\Big) \tag{4.2}$$

mit $F = W_\infty^1(\Omega)$, $Z = W_2^{1/2}\big(\partial\Omega \times (0,T)\big)$. Gesucht ist eine Funktion $f \in F$, für die $\|R(f)\|_Z$ möglichst klein ist.

Wir werden einen Algorithmus herleiten, der an das Kaczmarz-Verfahren angelehnt ist und betrachten die p Residuen getrennt. Für $j = 1,\dots,p$ sei also

$$R_j(f) := u_j\big(f\big)(x,t) - g_j(x,t) \quad .$$

Nachdem wir in Abschnitt 4.1 das inverse Problem formuliert haben, werden wir in Abschnitt 4.3 unser Propagations– Rückpropagationsverfahren vorstellen. Für dieses Verfahren wird die Fréchet-Ableitung von $R_j(f)$ benötigt. Wir beweisen in 4.4, daß diese existiert und geben sie an. In Abschnitt 4.5 wird der für das Propagations– Rückpropagationsverfahren benötigte adjungierte Operator zur Fréchet-Ableitungen von $R_j(f)$ angegeben. Außerdem betrachten wir dort das Problem der Rekonstruktion des Zeitanteils der Schallquelle.

Bevor wir mit diesem Programm fortfahren werden wir im folgenden Abschnitt 4.2 zunächst die Vorgehensweise in der Geophysik studieren.

4.2 Behandlung des inversen Problems der Wellengleichung in der Geophysik

4.2.1 Least-Squares Verfahren

Anfang der achtziger Jahre wurde vorgeschlagen, Least-Squares Verfahren für die Lösung des inversen Problems der Wellengleichung, das in der Geophysik vorkommt, einzusetzen.

Eine der ersten systematischen Beschreibungen ist in [Tar84] gegeben. Numerische Ergebnisse werden in [GVT86] vorgestellt. In beiden Texten wird die akustische Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{K(x)}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho(x)}\operatorname{grad}\right)\right)u(x,t) \;=\; \delta(x-x_s)S(t)$$

verwendet. Hierbei ist $\rho(x)$ die Dichte des Mediums und $K(x)$ der „Bulk Modulus". Die Schallgeschwindigkeit $c(x)$ ist gegeben durch

$$c^2(x) = \frac{K(x)}{\rho_0(x)} \quad . \tag{4.3}$$

In [Tar84] betrachtet Tarantola die Dichte ρ, den Bulk Modulus K und den Zeitanteil der Quelle $S(t)$ als unbekannt und formuliert den Algorithmus für die Suche nach dem Vektor aller drei Größen. Bei der Vorstellung erster numerischer Ergebnisse aufgrund von simulierten Daten in [GVT86] werden $\rho(x)$ und $S(t)$ als bekannt vorausgesetzt. Gleichung (4.3) zeigt, daß damit praktisch die Schallgeschwindigkeit rekonstruiert werden soll, ähnlich wie unser in Abschnitt 4.5.1 vorgeschlagenes Verfahren dies tut.

Wir beziehen uns im folgenden auf den Text [GVT86], um die für uns nicht benötigte allgemeine Darstellung aus [Tar84] mit all ihren Bezeichnungen nicht einführen zu müssen. Tarantola führt das Verfahren als Abstiegsverfahren ein, mit dem die Funktion

$$S = \sum_{s=1}^{NS} \int_0^T \sum_{r=1}^{NR} \left(u_{\text{obs}}(x_r,t;x_s) - u_{\text{cal}}(x_r,t;x_s)\right)^2 \mathrm{d}t \tag{4.4}$$

minimiert werden soll. Hierbei ist $u_{\text{obs}}(x_r,t;x_s)$ der gemessene Wert von u an der Stelle x_r bei Verwendung der Quelle in Position x_s. Entsprechend gibt $u_{\text{cal}}(x_r,t;x_s)$ den mit der aktuellen Näherung an K rekonstruierten Wert an. NS ist die Anzahl der Quellen, NR die Anzahl der Meßpunkte.

Es ist zu beachten, daß die Funktion S die Summe über sämtliche Quellen enthält, dies ist ein wichtiger Unterschied zu unserem Ansatz.

Zu einer aktuellen Näherung $K_n(x)$ soll eine verbesserte Näherung $K_{n+1}(x)$ in der Form $K_{n+1}(x) = K_n(x) + \alpha_n\gamma_n(x)$ gefunden werden. Für den Gradienten γ erhält Tarantola

$$\gamma_n(x) = \frac{1}{K_n^2(x)} \sum_{s=1}^{NS} U(x,x_s) \tag{4.5}$$

mit

$$U(x,x_s) = \int_0^T \frac{\partial u_n(x,t;x_s)}{\partial t}\frac{\partial \psi(x,t;x_s)}{\partial t}\,\mathrm{d}t \quad .$$

Hierbei ist ψ unsere Funktion z aus Satz 4.5.1. Mit $NS = 1$ kommt man nun durch eine partielle Integration leicht auf die in Satz 4.5.1 angegebene Adjungierte des Residuumoperators. Obwohl sie voneinander unabhängig hergeleitet wurden, stimmen das

Verfahren von Tarantola und unser Verfahren also zum großen Teil überein. Jedoch verwenden wir ein Einzelschrittverfahren, während Tarantola ein Gesamtschrittverfahren vorschlägt. Die Herleitung von Tarantola enthält Lücken, da die Lösbarkeit der auftretenden Differentialgleichungen nicht kontrolliert wird und die Fréchet-Differenzierbarkeit des Residuumoperators ohne Begründung angenommen wird. In diesem Sinne kann ein Teil unserer Arbeit also als nachträgliche Rechtfertigung der in der Geophysik verbreiteten Vorgehensweise angesehen werden, wobei wir allerdings als Quelle keine Deltafunktion in den Ortsvariablen zulassen. Für den Skalar α wird in [GVT86] ein ähnlicher Wert angegeben wie in [Nat96].

Die numerischen Ergebnisse in [GVT86] zeigen, daß bei der Rekonstruktion von K Objekte, die weiter von der Quellen in x_s entfernt liegen, im „Update“ $U(x, x_s)$ schwächer vorkommen, als Objekte nahe bei x_s. Es wird daher eine als „Vorkonditionierung“ bezeichnete Korrektur in Gleichung (4.5) eingebaut:

$$\gamma_n(x) = \frac{1}{K_n^2(x)} \sum_{s=1}^{NS} \|x - x_s\|^{1/2} U(x, x_s) \quad .$$

In Gleichung (6) in [GVT86] ist diese Korrektur falsch angegeben, die dortige Korrektur bewirkt das Gegenteil des gewünschten Effekts.

Bei unserer Anwendung hat sich die Korrektur weder als störend, noch als hilfreich erwiesen. Da nicht — wie in der Geophysik — alle Sender und Empfänger an einer oder höchstens zwei Seiten des Rekonstruktionsgebietes liegen, sondern das Gebiet umgeben, arbeitet unser Verfahren ohne die Korrektur ebensogut wie mit der Korrektur.

In [PDT90] wird die Anwendung der Methode auf Meßdaten vorgestellt. Hierbei wird ein maritimer Datensatz verwendet, wobei bekannt ist, daß die reale Schallgeschwindigkeit schichtförmig aufgebaut ist, sich also nur mit der Tiefe ändert. Es wurde daher nur eine Messung mit einer Quelle jedoch zahlreichen Empfängern durchgeführt. Die Darstellung des Ergebnisses erfolgt eindimensional. Wiederum wurde nur der Bulk Modulus rekonstruiert, die Dichte wurde aufgrund eines näherungsweise geltenden Zusammenhangs von Bulk Modulus und Dichte angepaßt. Die Rekonstruktion wird mit einer Auswertung der Laufzeiten von reflektierten Wellen verglichen und zeigt Übereinstimmungen.

4.2.2 Das Problem der lokalen Minima

Seit Beginn der achtziger Jahre ist an dem Problem der Auswertung seismischer Daten intensiv gearbeitet worden. Zahlreiche Autoren haben Verfahren vorgeschlagen und zum Teil auch bereits an Meßdaten validiert. Auf Arbeiten von drei Forschergruppen wollen wir im folgenden eingehen: Die Gruppen um G.T. Schuster, G. Chavent und W.W. Symes. Es gibt zahlreiche weitere Gruppen, wir werden uns hier jedoch auf die drei genannten beschränken.

Alle Autoren, die sich mit der Anwendung von „Waveform Inversion“ auf tatsächliche Meßdaten beschäftigt haben, mußten ein Zusatzproblem lösen, das bei den Simulationen in [GVT86] nicht auftrat: Lokale Minima der zu minimierenden Funktion. Diese treten auf, weil die seismischen Meßdaten im wesentlichen hochfrequent sind. Wenn nun die

Näherung an den niederfrequenten Teil der Schallgeschwindigkeit noch nicht sehr gut ist, so kommen Phasenverschiebungen bei der Auswertung des zu minimierenden Funktionals (bei uns $R(f)$) vor. Wir sind bereits in der Einleitung anhand von Abbildung 1.1 auf eine solche Phasenverschiebung eingegangen. Dort ging es um die nicht-Berücksichtigung der Gasgeschwindigkeit als Ursache. Natürlich führt ein ungenaues Modell für die Hintergrundschallgeschwindigkeit zu den gleichen Schwierigkeiten, wenn auch die Ursache eine andere ist. Wenn dieses Problem nicht gelöst wird, bleibt der Algorithmus in einem lokalen Minimum hängen und liefert ein Ergebnis, das nichts oder nur sehr wenig mit der realen Schallgeschwindigkeit zu tun hat. In den drei Gruppen wird dieses Problem unterschiedlich angegangen.

Schuster et al.: Wave-equation Traveltime and Waveform Inversion (WTW)

In den Veröffentlichungen von Schuster und anderen wurde nach Wissen des Autors erstmals die erfolgreiche Rekonstruktion anhand von Cross-Borehole Daten aus seismischen Meßdaten dargestellt. In [ZCL+95] wurde hierfür die akustische Wellengleichung verwendet, mit der auch wir arbeiten, da wir uns für die Schallausbreitung in einem Gas interessieren. In [ZSHH97] gelang die Rekonstruktion auch bei der Simulation elastischer Wellenausbreitung. Das Verfahren wird als „WTW"-Methode bezeichnet: Wave-equation Traveltime and Waveform inversion. Die Autoren bauen auf der Arbeit von Tarantola auf. Anstelle des Funktionals S in (4.4) minimieren sie jedoch das Funktional

$$
\begin{aligned}
E \;=\; & \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{NS}\sum_{r=1}^{NR}\Bigg((1-\alpha)\big(\tau_{\mathrm{cal}}(x_r;x_s)-\tau_{\mathrm{obs}}(x_r;x_s)\big)^2 \\
& \qquad + \alpha\int_0^T \big(u_{\mathrm{cal}}(x_r,t;x_s)-u_{\mathrm{obs}}(x_r,t;x_s)\big)^2\,\mathrm{d}t\Bigg) \quad ,
\end{aligned}
$$

bei dem τ_{cal} und τ_{obs} die simulierten bzw. gemessenen Schallaufzeiten bezeichnen. Der Parameter α dient der Gewichtung der beiden Ausdrücke. Es ist klar, daß α erst dann nahe bei 1 gewählt werden kann, wenn bereits eine gute Näherung für die Schallgeschwindigkeit vorliegt, da vorher Phasenverschiebungen auftreten können. In der Tat wählen die Autoren zunächst $\alpha = 0$, um eine erste Approximation zu erhalten und anschließend $\alpha = 1$. Hierbei iterieren sie ihr Verfahren für die Lösung des Laufzeitproblems so lange, bis auch die hochfrequenten Anteile keine Phasenverschiebung mehr aufweisen. Im Prinzip stimmt die Vorgehensweise also mit unserer überein: Aus den Laufzeitdaten wird ein Startbild für die Inversion der zeitaufgelösten Gesamtdaten gewonnen. Lediglich die Wahl der Regularisierung für die Lösung des Laufzeitproblems wurde bei uns nicht an die zeitaufgelösten Daten gekoppelt.

G. Chavent et al.: Migration-Based TravelTime (MBTT)

Auch für G. Chavent ist das Problem der lokalen Minima zentral. Das in seiner Arbeitsgruppe entwickelte Verfahren heißt MBTT: Migration-Based TravelTime.

Wiederum geht es vor allem darum, ein gutes Startbild für das Kleinste-Quadrate Verfahren zu erhalten, denn wenn ein Modell für die Schallgeschwindigkeit gefunden wurde, das nahe genug an der durchmessenen Schallgeschwindigkeit liegt, um keine lokalen Minima mehr fürchten zu müssen, dann ist die Kleinste-Quadrate Methode das Mittel der Wahl.

Bei der Herleitung der Verfahren geht Chavent von den diskretisierten Problemen aus, er verwendet also nur endlich dimensionale Hilberträume. Damit umgeht er auch die Frage der Differenzierbarkeit des Residuenoperators, mit der wir uns in Abschnitt 4.4 beschäftigen.

Anstelle der Schallgeschwindigkeit c betrachtet er die Langsamkeit $\nu(x) = 1/c(x)$. Der Raum V, in dem ν betrachte wird, ist letzten Endes ein Raum bilinearer Funktionen auf dem Gitter, das zur Diskretisierung verwendet wird. Er wird in die Summe $V = V_s + V_r$ zerlegt, wobei der Unterraum V_s („s“ steht für „smooth“) glatte Funktionen aus V enthält und V_r („r“ steht für „rough“) zum Beispiel schnell oszillierende Anteile abdeckt.

Wir zerlegen die Langsamkeit entsprechend: $\nu = \nu_s + \nu_r$. Die Funktionen in V_s sind vor allem für die Art der *Weiterleitung* der Energie bei der akustischen Wellenausbreitung verantwortlich, daher wir ν_s als „Propagator“ bezeichnet. Die Funktionen in V_r sorgen dagegen für die Streuung, insbesondere die in der Geophysik wichtigen Reflektionen, daher heißt ν_r auch „Reflektivity“.

Für den Propagator verwendet Chavent ein Multiscale-Verfahren (vgl. [BSZC95]), bei dem zunächst der Niederfrequenzanteil der Daten erfüllt werden soll. Hierzu wird die Wellengleichung auf sehr groben Gittern diskretisiert und dann schrittweise verfeinert. So soll erreicht werden, daß das Verfahren nicht in einem lokalen Minimum stecken bleibt oder zumindest, daß es ein lokales Minimum in unmittelbarer Nähe des globalen Minimums findet. In [Cha96] wird auf Seite 4 jedoch notiert, daß diesem Verfahren der oft sehr geringe Niederfrequenzanteil in seismischen Datensätzen entgegensteht. Dennoch wird das Verfahren auch in [CCG98] verwendet.

Zur Rekonstruktion des Reflektors nennt Chavent in [Cha96] zwei gangbare Wege: Zum einen das von Symes entwickelte Verfahren DSO, auf das wir später noch zurückkommen, zum anderen die Speicherung des Reflektors nicht im Modell-, sondern im Datenraum. Chavent greift damit eine Idee aus [BCL79] erneut auf. Es wird nicht ν_r als Funktion der Ortsvariablen x rekonstruiert, sondern eine Funktion, die dasselbe Format hat wie die Daten, also – nach unserer Notation – auf der Mannigfaltigkeit $\partial\Omega \times (0, T)$ lebt. Diese Funktion ist weitgehend unabhängig von der Genauigkeit der Rekonstruktion des Propagators und somit weniger anfällig gegenüber lokalen Minima. Mit den Daten selbst ist für diese Funktion auch bereits ein hervorragender Startwert gegeben, vgl. [Cha96]. Eine Anwendung auf Meßdaten findet sich in [PdRC99].

Als Vorteil seines Verfahrens gegenüber einfacheren und gegenüber DSO benennt G. Chavent in [Cha96] die Anwendbarkeit auch in komplizierten geologischen Situationen und der geringere Rechenaufwand im Vergleich zu DSO.

W.W. Symes et al.: Differential Semblance Optimization (DSO)

Auch W.W. Symes teilt den bzw. die gesuchten Parameter in zwei Gruppen ein: Parameter in einem Hilbertraum X, die einen linearen Einfluß auf den Residuenoperator haben und solche in einem Hilbertraum Y mit einem nichtlinearen Einfluß. Wir verwenden die Bezeichnungen aus [GST95]. Hierbei ist A die Vorwärtsabbildung, die bezüglich $x \in X$ nichtlinear ist und auf $y \in Y$ linear wirkt. Sie wird daher $A(x)y$ geschrieben. Der Raum Y wird so groß gewählt, daß nicht alle Elemente aus Y physikalisch sinnvoll sind. Die Einschränkung auf einen sinnvollen Teilraum sei als Kern einer linearen Abbildung W gegeben. Das Least-Squares Problem aus Abschnitt 4.2.1 läßt sich daher schreiben als

$$\min_{x \in X} J_\infty(x)$$

mit

$$J_\infty(x) = \min \left\{ \left\|A(x)y - d\right\|^2 \, : \, Wy = 0 \right\} \quad .$$

W.W. Symes betrachtet statt dessen das Problem

$$\min_{x \in X} J_r(x)$$

mit

$$J_r(x) = \min \left\{ \left\|A(x)y - d\right\|^2 + r^2 \|Wy\|^2 \, : \, y \in Y \right\} \quad .$$

Für großes r nähert sich $J_r(x)$ an $J_\infty(x)$ an, da die Forderung, daß $\|Wy\|^2$ klein ist, ein großes Gewicht bekommt. Der Term $\|Wy\|^2$ wird als „Differential Semblance“-Term bezeichnet, weil die Bedingung $Wy = 0$ bei einigen Anwendungen eine Differenzierbarkeitsbedingung ist. In [GST95] wird gezeigt, daß für kleines r das innere Minimierungsproblem zur Bestimmung von $J_r(x)$ für festes $x \in X$ mit Hilfe eines in gewissem Sinne dualen Problems gelöst werden kann und das äußere Problem nicht die lokalen Minima aufweist, wie dies bei $J_\infty(x)$ der Fall ist. Die Vergrößerung von Y zu einem Raum, der auch nicht-physikalische Lösungen enthält, geschieht durch das Hinzufügen so vieler Parameter, wie Messungen erfolgt sind. Die Bedingung $Wy = 0$ besagt dann, daß eine einzige Lösung für alle Messungen gefunden werden muß. Chavent widmet sich in [Cha96] in Abschnitt 6 auch dem DSO-Verfahren. Als wichtigsten Nachteil nennt er den sehr hohen Rechenaufwand. Laut Chavent muß das innere Problem sogar bei einer leichten Änderung von x_{k+1} gegenüber x_k komplett neu gelöst werden. Der Anfangswert $\tilde{y}_{k+1} = 0$ ist sogar in diesem Fall besser als die Lösung y_k zu x_k, weil sich die Lösungen y_{k+1} und y_k aufgrund der Phasenverschiebungen sehr stark unterscheiden können.

4.2.3 Arbeiten zum theoretischen Fundament der Methoden

G. Chavent et al. 1979

Eine der ersten Arbeiten zur Analyse des inversen Problems zur Wellengleichung ist [BCL79]. Während sich G. Chavent in seinen aktuellen Arbeiten nicht mit Fragen wie der Differenzierbarkeit der Vorwärtsabbildung und der stetigen Abhängigkeit von den Daten beschäftigt, sondern sich stattdessen auf die diskrete, endlichdimensionale Formulierung des Problems konzentriert, wurden in dieser Arbeit zur eindimensionalen Wellengleichung auch solche theoretischen Fragen behandelt.

Betrachtet wird ein inverses Problem zur eindimensionalen Wellengleichung in der Form

$$\rho(z)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu(z)\frac{\partial y}{\partial z}\right) = 0 \quad \text{für } z > 0, t \in (0,T)$$

mit homogenen Anfangsbedingungen und einer Quelle in $z = 0$:

$$-\mu(0)\frac{\partial y}{\partial z}(0,t) = g(t) \quad .$$

Gemessen wird die zurückgestreute Welle ebenfalls in $z = 0$: $Y(\rho,\mu;t) := y(0,t)$. Dieses Problem ist aufgrund von geophysikalischen Anwendungen interessant. Die Autoren zeigen ähnlich wie wir in Kapitel 3 mittels eines Galerkinverfahrens und einer Energieabschätzung die eindeutige Lösbarkeit dieses im Raum eindimensionalen Problems und eine Regularitätsaussage durch einmalige Differentiation der Gleichung bezüglich t.

Das inverse Problem lautet

$$\min_{(\rho,\mu)\in\Sigma} J(\rho,\mu)$$

mit

$$J(\rho,\mu) = \int_0^T \big(Y(\rho,\mu;t) - Y_d(t)\big)^2 \,\mathrm{d}t \quad ,$$

wobei wir mit $Y_d(t)$ die Meßdaten bezeichnen und mit Σ die Menge der physikalisch zulässigen Paare (ρ,μ).

Das inverse Problem ist in dieser Form nicht eindeutig lösbar, da es Äquivalenzklassen von Paaren (ρ,μ) gibt, bei denen alle Paare einer Äquivalenzklasse zu identischen „Daten“ $Y(\rho,\mu)$ führen.

Die Autoren geben zwei sinnvolle Typen von Vertreter der Äquivalenzklassen an, einen von beiden stellen wir hier kurz vor. Die Schallgeschwindigkeit $c(z)$ ist gegeben durch

$$c(z) = \sqrt{\mu(z)\rho^{-1}(z)} \quad . \tag{4.6}$$

Wir ersetzen z durch eine neue Variable x, die definiert wird mittels

$$x(z) = \int_0^z \frac{1}{c(z')}\,\mathrm{d}z' \quad .$$

Wegen $c(z) > 0$ ist $x(z)$ invertierbar. Physikalisch ist $x(z)$ die Laufzeit eines Schallsignals von der Tiefe 0 bis zur Tiefe z. Nun wird die Schallimpedanz zur Laufzeit x definiert durch

$$\sigma(x) := \sqrt{\rho\big(z(x)\big)\mu\big(z(x)\big)} \quad .$$

Bei der Lösung des inversen Problems sollen nun nicht mehr die Paare (ρ, μ) bestimmt werden, sondern nur noch die Äquivalenzklassenvertreter $\sigma(x)$. Die Schallgeschwindigkeit ist somit nicht rekonstruierbar, die Schallwellen im (x,t)-Raum haben die Schallgeschwindigkeit 1. Gleichung (4.6) zeigt somit, daß durch diese Koordinatentransformation $\mu = \rho$ vorausgesetzt wird.

Zur Laufzeit $X \geq 0$ und dem Paar (ρ, μ) sei $Z(X)$ die zugehörige Tiefe. Für den Raum Σ werden die beiden folgenden Räume verwendet (der Index b steht für „bounded“):

$$\Sigma_b^X = \Big\{(\rho,\mu) \in L^\infty\big((0,Z(X))\big)^2 \;\;\Big|\;\; 0 < \rho_- \leq \rho(x) \leq \rho_+, \\ 0 < \mu_- \leq \mu(x) \leq \mu_+ \text{ f.ü. auf }]0, Z(X)[\Big\}$$

und

$$\dot{\Sigma}_b^X = \big\{\sigma \in L^\infty\big(]0,Z(X)[\big) \big| 0 < \sigma_- \leq \sigma(x) \leq \sigma_+ \text{ f.ü. auf } (0,X)\big\} \quad .$$

In Theorem 5 zeigen die Autoren, daß die Vorwärtsabbildung $(\rho, \mu) \to Y$ bei Wahl einer geeigneten Metrik auf Σ_b^X mit $X = T/2$ unter der Voraussetzung $g \in W_1^3\big((0,T)\big)$ Lipschitz-stetig ist. Theorem 6 besagt, daß das inverse Problem

$$\min_{(\rho,\mu)\in\dot{\Sigma}_b^X} J(\rho,\mu) \quad \text{mit} \;\; J(\rho,\mu) = \int_0^T \big(Y(\sigma;t) - Y_d(t)\big)^2 \,\mathrm{d}t \quad ,$$

mindestens eine Lösung besitzt.

Als nächstes betrachten die Autoren in [BCL79] den Fall, daß $\sigma(x)$ auf Intervallen der Breite Δ stückweise konstant ist. Die Wellengleichung läßt sich dann mit dem Charakteristikenverfahren exakt lösen und die Daten liefern Informationen über die Reflektionskoeffizienten an den Sprungstellen von $\sigma(x)$.

Das inverse Problem kann so auf ein endlichdimensionales reduziert werden. Für dieses Problem wird auch ein Stabilitätsresultat geliefert.

Schließlich werden numerische Ergebnisse zur Lösung des endlichdimensionalen Problems präsentiert.

R.M. Lewis und W.W. Symes 1991

In [LS91] betrachten R.M. Lewis und W.W. Symes die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2(z)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

im Halbraum $\{z > 0\}$ mit den Anfangs- und Randbedingungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(0,t)}{\partial z} &= f(t) \qquad \text{für } t \geq 0 \quad , \\ u(z,t) &= 0 \qquad \text{für } t < 0 \quad . \end{aligned}$$

Bei der Quelle $f(t)$ interessieren sie sich für den Fall $f(t) = -\delta(t)$. Die „Progressive Wave Expansion“ von u zeigt, daß sich die Daten $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial t}$ für das inverse Problem in der Form

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} = \text{Konstante} \times \delta(t) + v(t)$$

schreiben lassen. Nun wird die Abbildung $F : c \mapsto v$ betrachten. Lewis und Symes zeigen, daß sie als Abbildung $W_2^2(\Omega) \to L^2([0,T])$ Lipschitz-stetig und als Abbildung $W_2^3(\Omega) \to L^2([0,T])$ differenzierbar ist, wobei die Ableitung wiederum Lipschitz-stetig ist.

G. Bao und W.W. Symes 1997

In [BS97] und [Bao98] betrachten G. Bao und W.W. Symes die Differentialgleichung

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta - \nabla\sigma \cdot \nabla\right) u = f \quad .$$

Die Autoren interessieren sich für den Fall $f = \delta(x,t)$ und beweisen unter anderem die Fréchet-Differenzierbarkeit der Vorwärtsabbildung, jedoch nur für den Fall $c = 1$. Die Schwierigkeiten haben hierbei ihren Grund in den Anforderungen an die Inhomogenität und die Koeffizienten: Die Inhomogenität ist die Deltafunktion $f(x,t) = \delta(x,t)$ und die Koeffizienten sind nicht notwendig stetig. Hierdurch werden die Beweise für die Vorwärtsabbildung wesentlich komplizierter als bei unserem Problem.

4.2.4 Rekonstruktion der Mediumsgeschwindigkeit

Ein naheliegender Schritt im Anschluß an die Entwicklung von Verfahren zur Vektortomographie, mit der aus *Laufzeitmessungen* die Bewegungsgeschwindigkeit des Mediums bestimmt wird, ist die Rekonstruktion auch der Mediumsgeschwindigkeit durch die *Lösung eines inversen Problems einer Differentialgleichung.* Wir setzen die Bewegungsgeschwindigkeit $v_0(x) = \frac{1}{2}\tilde{\mu}(x)$ allein aufgrund der Rekonstruktion aus Laufzeitmessungen als bekannt voraus. Unser Verfahren läßt sich leicht dahingehend verallgemeinern, daß auch $\mu(x)$ aus den Daten rekonstruiert wird. Dies erscheint jedoch nicht sinnvoll, da die Mediumsgeschwindigkeit in allen bekannten Anwendungen (Zerstörungsfreie Prüfung und Ozeanographie) sehr viel kleiner ist als die Schallgeschwindigkeit.

Unabhängig voneinander haben zum einen D. Rouseff und K.B. Winters in [RW94] und zum anderen M.N. Rychagov und H. Ermert in [RE96] ein Verfahren zur Rekonstruktion der Mediumsgeschwindigkeit über die Lösung den inversen Problems einer Verallgemeinerung der Helmholtzgleichung vorgestellt. Beide betrachten (in unserer Notation) die Gleichung

$$\Delta v + k^2\big(1 + f(x)\big)v - ik\tilde{\mu}(x)\nabla v = 0 \quad , \tag{4.7}$$

die sich mit $v(x,t) = u(x,t)e^{-ikt}$ aus (4.1) ergibt. Sie leiten Rückpropagationsverfahren zur Rekonstruktion von f und v her, die die Born Approximation verwenden und an

Veröffentlichungen unter anderem von Devaney angelehnt sind. Für die Rekonstruktion von $\tilde{\mu}(x)$ mittels Vektortomographie muß vorausgesetzt werden, daß $\tilde{\mu}(x)$ quellenfrei ist, also div $\tilde{\mu}(x) = 0$. Ein wichtiger Vorteil bei der Rekonstruktion von $\tilde{\mu}(x)$ über die Lösung des Inversen Problems liegt darin, daß diese Voraussetzung nicht mehr nötig ist, vgl. [RW94]. In aktuellen Veröffentlichungen zeigen M.N. Rychagov und H. Ermert Ergebnisse von Laborexperimenten zur Vektortomographie, das inverse Problem zu (4.7) wird dabei jedoch nicht gelöst. Da als Schallquelle kurze Ultraschallpulse verwendet werden, würde sich eine Verallgemeinerung unseres Verfahrens mit einer Rekonstruktion im Zeitbereich eher anbieten als die Lösung über das inverse Problem zu (4.7).

4.3 Allgemeine Herleitung des Rückpropagationsverfahrens

Wir kommen nun zurück zu unserer Problemformulierung und der Minimierung des Residuenoperators R, der in die Operatoren R_j zerlegt wurde. Wir werden ein iteratives Verfahren vorstellen, das auf das Kaczmarz-Verfahren zurückgeht, das von S. Kaczmarz 1937 für lineare Gleichungssystem entwickelt wurde und später für die Computertomographie eingesetzt wird, vergleiche hierzu etwa [Nat86].

Sei nun $j \in \{1, \dots, p\}$ fest. Wir betrachten einen Einzelschritt des Verfahrens. Zu einer gegebenen Approximation f an die gesuchte Funktion f_M suchen wir einen „Update“ h mit $R_j(f+h) \approx 0$. Hierzu nehmen wir R_j als Fréchet-differenzierbar an. Den Beweis der Fréchet-Differenzierbarkeit führen wir in Abschnitt 4.4.4. Die Definition der Fréchet-Ableitung liefert uns die Problemformulierung

$$0 \stackrel{!}{=} R_j(f+h) \approx R_j(f) + R_j'(f)[h]$$

und damit

$$R_j'(f)[h] = -R_j(f) \quad . \tag{4.8}$$

$R_j'(f)$ ist eine Abbildungen zwischen zwei Hilberträumen: $R_j'(f) : F \to Z$. In (4.2) hatten wir $F = W_\infty^1(\Omega)$, $Z = W_2^{1/2}\big(\partial\Omega \times (0,T)\big)$ eingeführt. Im folgenden brauchen wir auf F eine Hilbertraumstruktur. Wir verwenden daher formal zum Beispiel $F = W_2^1(\Omega)$, auch wenn wir für die Lösung von (4.1) $f \in W_\infty^1(\Omega)$ voraussetzen müssen. Bei allen tatsächlichen Anwendungen wird dies erfüllt sein. Die Adjungierte $R_j'(f)^* : Z \to F$ ist definiert durch

$$\forall h \in F\ \forall g \in Z\ :\ \big(R_j'(f)[h], g\big)_Z = \big(h, R_j'(f)^*[g]\big)_F \quad .$$

Wir verwenden bei jedem einzelnen Schritt nur einen kleinen Teil unserer Daten und gehen daher davon aus, daß die Gleichung (4.8) unterbestimmt ist. Damit erhalten wir für ihre Kleinste-Quadrate Lösung h:

$$h = -R_j'(f)^*\big(R_j'(f)R_j'(f)^*\big)^{-1} R_j(f) \quad .$$

Wir suchen eine stark regularisierte Tikhonoff-Phillips Lösung. Für $\lambda > 0$ wollen wir also lösen:

$$h_\lambda = -R_j'(f)^*\bigl(R_j'(f)R_j'(f)^* + \lambda I_Z\bigr)^{-1} R_j(f) \quad .$$

Regularisieren wir extrem stark, d.h. mit $\lambda \gg 1$, so ist die Abbildung $R_j'(f)R_j'(f)^*$ in der Klammer vernachlässigbar und wir erhalten

$$h_{\lambda\gg 1} = -\lambda^{-1} R_j'(f)^*[R_j(f)] \quad .$$

Wir werden später sehen, daß wir somit eine Formel für einen Update erhalten haben, die sich ohne extrem hohen Rechenaufwand berechnen läßt. Jedoch soll für λ nicht ein sehr großer Wert verwendet werden, wie dies bei obiger Herleitung angenommen wurde, sondern wir ersetzen λ^{-1} durch einen Relaxationsparameter ω, der experimentell bestimmt wird.

Wir ersetzen die aktuelle Approximation f also durch $f - \omega R_j'(f)^* R_j(f)$. In [Nat96] wurde gezeigt, daß für kleines ω angenommen werden kann, daß $f - \omega R_j'(f)^* R_j(f)$ eine bessere Approximation ist als f. Um einen optimalen Relaxationsparameter zu wählen, approximieren wir die Funktion

$$r(\omega) := \bigl\| R_j\bigl(f - \omega R_j'(f)^* R_j(f)\bigr)\bigr\|^2_{L^2(\partial\Omega\times(0,T))}$$

für kleine ω durch eine Parabel und benutzen die Position ihres Scheitelpunktes als ω_{opt}. Hierfür werden vier Werte $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4$ fest gewählt und durch Lösung des direkten Problems werden $r(\omega_2)$ und $r(\omega_3)$ bestimmt. Ist $r(\omega_2) < r(\omega_3)$, so wird auch $r(\omega_1)$ bestimmt, ansonsten $r(\omega_4)$. Durch diese Auswahl wird die Wahrscheinlichkeit erhöht, daß sich der Scheitel zwischen den getesteten Werten ω_i befindet. Nun wird durch die drei Punkte $\bigl(\omega_i, r(\omega_i)\bigr)$ eine Parabel gelegt und ihre Scheitelposition dient als ω_{opt}.

Das iterative Verfahren sieht nun so aus:

Startwert: f^0
Für $i = 1, \ldots,$ Anzahl-Iterationen {
  $f_0 = f^{i-1}$
  Für $j = 1, \ldots, p$ {
    Bestimme ω_{opt}
    $f_j = f_{j-1} - \omega_{\text{opt}} R_j'(f)^*\bigl[R_j(f)\bigr]$
  }
  $f_i = f^p$
}

Als Reihenfolge für die innere Iteration wird hierbei nicht — wie oben vereinfachend beschrieben — die numerische Reihenfolge verwendet, sondern aufgrund von Erfahrungen mit dem Kaczmarz-Verfahren eine zufällige.

Zur Berechnung von $R_j(f)$ muß eine Lösung des direkten Problems durchgeführt werden. Wir werden in Abschnitt 4.5.1 sehen, daß zur Berechnung von $R_j'(f)^*\bigl[R_j(f)\bigr]$ zwei weitere „Vorwärtslösungen“ nötig sind. Zu diesen 3 Berechnungen kommen die drei

Auswertungen von $r(\omega)$ zur Bestimmung von ω_{opt}. Diese optimale Wahl verdoppelt also den Rechenaufwand im Vergleich zu einer konstanten Wahl von ω.

Bei numerischen Experimenten schwankte der Wert von ω_{opt} häufig um mehr als einen Faktor 2. Erfahrungsgemäß ist die Konvergenzgeschwindigkeit bei unserer Wahl — bezogen auf die Rechenzeit — mit der Konvergenzgeschwindigkeit bei einer guten, aber konstanten Wahl von ω vergleichbar. Allerdings ist die Wahl der vier Werte $\omega_1, \ldots, \omega_4$ wesentlich weniger kritisch als die Wahl eines einzigen festen Relaxationsparameters ω. Üblicherweise wird $\omega_i = 2\omega_{i-1}$ für $i = 2, 3, 4$ gewählt. Ist $\omega_{\text{opt}} > 2\omega_4$ so verwenden wir aus Stabilitätsgründen $2\omega_4$.

Als iteratives Verfahren für ein nichtlineares Problem ist auch unsere Methode auf eine Anfangsapproximation angewiesen. Bei den numerischen Beispielen aufgrund von Simulationen kann dies für f die Nullfunktion sein, in der Anwendung wird man auf Rekonstruktionen aus Laufzeitdaten zurückgreifen, wie dies auch in der Gruppe von T. Schuster getan wird. In [Sie94] haben wir ein Kollokationsverfahren für die Auswertung von Laufzeitdaten entwickelt und in [SD96] und in [SD95] veröffentlicht. In [Sie97] zeigen wir mögliche Probleme bei reinen Laufzeitauswertungen auf, die mit der Behandlung des inversen Problems der Wellengleichung gelöst werden können. Wir kommen hierauf in Kapitel 5 zurück. Wir gehen davon aus, daß das Kollokationsverfahren zur Lieferung eines Startbildes in unserem Fall ausreichend ist.

Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, daß für das Problem der Rekonstruktion der Schallgeschwindigkeit die Fréchet-Ableitung $R_j'(f)$ tatsächlich existiert. Die Adjungierte $R_j'(f)^*$ betrachten wir dann in Abschnitt 4.5.

4.4 Differenzierbarkeit des Operators R_j

Der Nachweis der Differenzierbarkeit von ähnlichen Residuumoperatoren kommt bereits in mehreren Arbeiten vor. In [CW90] wurde er bereits als eigenständiges Problem behandelt.

Es zeigt sich, daß im vorliegenden Fall der Wellengleichung der Ansatz aus [CW90], den wir in Abschnitt 4.4.1 vorstellen, nicht anwendbar ist. Stattdessen verwenden wir die von O. Dorn in [Dor97] verwendete Idee, die dort für ein inverses Problem zur Transportgleichung entwickelt wurde. Diese Beweisidee läßt sich leicht auf bilineare inverse Probleme verallgemeinern, wie sie in [Nat96] behandelt werden. Zur Anwendung auf das inverse Problem der Wellengleichung wird dann allerdings noch eine etwas schärfere Bedingung an den Quellterm in der Differentialgleichung gestellt.

Da wir die Gasgeschwindigkeit als gegeben voraussetzen, ist sie bei der Frage der Differenzierbarkeit nicht von Bedeutung, wenn wir $v \in \left(W_2^3(\Omega)\right)^n$ voraussetzen. Wir beschränken uns in Abschnitt 4.4 daher auf den Fall $v = 0$. Das Symbol v wird stattdessen für spezielle Lösungen der Wellengleichung verwendet.

4.4.1 Ein Satz von T.J. Connolly und D.J.N. Wall zum Nachweis der Differenzierbarkeit

Wir beziehen uns auf Theorem 2.1 aus [CW90]. Diese Aussagen werden hier mit unseren Bezeichnungen zitiert:

Satz 4.4.1 *Betrachte die Abbildung $\xi : F \times U \mapsto Y$ mit Banachräumen F, U, Y. Es gebe eine offene Teilmenge $F_0 \subset F$ mit der Eigenschaft, daß für jedes $f \in F_0$ die Gleichung $\xi(f,u) = 0$ eine eindeutige Lösung $u = u(f)$ besitzt. Dann folgt:*

(a) Die Abbildung $f \mapsto u(f), f \in F_0$ ist stetig, falls die folgenden drei Aussagen erfüllt sind:

(i) $\xi(f,u)$ ist stetig in f und u,

(ii) $\xi_u(f,u)$ ist stetig in f und u,

(iii) $[\xi_u(f,u)]^{-1}$ existiert und ist eine beschränkte Abbildung $Y \to U$.

(b) Die Abbildung aus (a) ist Fréchet differenzierbar, falls die Bedingungen aus (a) erfüllt sind und $\xi_f(f,u)$ stetig in f und u ist. Die Ableitung ist gegeben durch

$$u'(f) = -[\xi_u(f,u)]^{-1}\xi_f(f,u) \quad , \quad u = u(f) \quad .$$

Es sei bereits an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß dieser Satz in *(a)(iii)* nur die Beschränktheit von $[\xi_u(f,u)]^{-1}$ voraussetzt, also

$$\left\|[\xi_u(f,u)]^{-1}(g)\right\|_U \le C_f \|g\|_Y \quad . \tag{4.9}$$

Die Abhängigkeit von C_f von f ist hierbei beliebig. Dies ist ein Vorteil dieses Satzes gegenüber unserer Beweismethode, die eine gleichmäßige Beschränktheit in einer beliebig kleinen Umgebung von f voraussetzt.

Der Grund liegt darin, daß im Beweis von Satz 4.4.1 die Abschätzung (4.9) immer nur an der Stelle f, für die die Fréchet-Differenzierbarkeit nachzuweisen ist, verwendet wird. Nachzulesen ist dies im Beweis von Theorem 12.4.1 aus [Wou77], auf das sich Connolly und Wall berufen.

4.4.2 Verallgemeinerung des Beweises von O. Dorn und V.P. Palamodov für bilineare inverse Probleme

Wir verwenden die Bezeichnungen aus [Nat96] und formulieren hinreichende Anforderungen an die Operatoren um Fréchet-Differenzierbarkeit zu garantieren. Der Index j, der in [Nat96] die jeweils betrachtete Quelle bezeichnet, wird hier der Übersichtlichkeit halber weggelassen.

Wir betrachten Banachräume F, U, Y und Z, Elemente $a \in Y$, $c \in Z$ sowie die Operatoren

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{A} & : & U \to Y & \text{(linear)} \\ \mathcal{B} & : & F \times U \to Y & \text{(bilinear)} \\ b & : & F \to Y & \text{(linear)} \\ \mathcal{C} & : & U \to Z & \text{(linear)} \\ \mathcal{D} & : & F \times U \to Z & \text{(bilinear)} \\ d & : & F \to Z & \text{(linear)} \end{array}$$

Das direkte Problem sei gegeben durch die Gleichung

$$\mathcal{A}u + \mathcal{B}(f,u) = a + bf \quad , \tag{4.10}$$

und die Datengleichung, welche die Messungen beschreibt, durch

$$\mathcal{C}u + \mathcal{D}(f,u) = c + df \quad .$$

Für $f \in F$ sei $u(f) \in U$ eine Lösung von (4.10). Wir definieren den Residuumoperator $R : F \to Z$ durch

$$R(f) = \mathcal{C}u(f) + \mathcal{D}\big(f, u(f)\big) - c - df \quad . \tag{4.11}$$

Wir bezeichnen den Operator $\mathcal{B}$ als *beschränkt*, falls es eine Zahl $\mathcal{B}_0 > 0$ gibt mit

$$\|\mathcal{B}(f,u)\|_Y \le \mathcal{B}_0 \|f\|_F \, \|u\|_U \quad \forall (f,u) \in F \times U \quad .$$

Wir bezeichnen die kleinste solche Zahl mit $\|\mathcal{B}\|$.

Im folgenden Satz formulieren wir das direkte Problem mit $q \in Y$, um die Abschätzung (4.12) formulieren zu können. Wir werden später $q = a + bf$ einsetzen.

Satz 4.4.2 *Das Problem $\mathcal{A}u + \mathcal{B}(f,u) = q$ sei für jedes $f \in F$ und $q \in Y$ eindeutig lösbar. Die Lösung sei $u = u(f,q)$. Zu f gebe es ein $\epsilon > 0$ und ein $C(f) > 0$, so daß für jedes $h \in F$ mit $\|h\|_F < \epsilon$ gilt:*

$$\|u(f+h,q)\|_U \le C(f) \, \|q\|_Y \quad . \tag{4.12}$$

Die Operatoren $b, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ seien beschränkt. Dann ist der Operator R aus (4.11) Fréchet-differenzierbar und $R'(f) : F \to Z$ ist gegeben durch

$$R'(f)[h] = \mathcal{C}w + \mathcal{D}(f,w) + \mathcal{D}\big(h, u(f)\big) - dh$$

mit der Lösung w von

$$\mathcal{A}w + \mathcal{B}(f,w) = bh - \mathcal{B}\big(h, u(f)\big) \quad .$$

Der Beweis dieses Satzes ist eine direkte Verallgemeinerung des Beweises, den O. Dorn in [Dor97] für die Transportgleichung geführt hat. Die dortigen Lemmata 3 und 4 aus Kapitel 6 können fast wörtlich übernommen werden. Hierfür seien $f, h \in F$ und $\|h\|_F \le \epsilon$. Es seien $u = u(f,a)$ und $v = u(f+h,a)$. Damit erfüllen u, v und w also die Gleichungen

$$\mathcal{A}u + \mathcal{B}(f,u) = a + bf \tag{4.13}$$
$$\mathcal{A}v + \mathcal{B}(f+h,v) = a + b(f+h) \tag{4.14}$$
$$\mathcal{A}w + \mathcal{B}(f,w) = bh - \mathcal{B}(h,u) \tag{4.15}$$

Lemma 4.4.3 *Es existiert ein $C_1 > 0$ derart, daß*

$$\|v-u\|_U \le C_1\|h\|_F \quad .$$

Beweis: Betrachte die Differenz der Gleichungen (4.14) und (4.13):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(v-u)+\mathcal{B}(f,v-u) &= bh-\mathcal{B}(h,v)\\
\overset{(4.12)}{\Rightarrow} \quad \|v-u\|_U &\le C(f)\big(\|bh\|_Y+\|\mathcal{B}(h,v)\|_Y\big)\\
&\le C(f)\big(\|b\|\,\|h\|_F+\|\mathcal{B}\|\,\|v\|_U\,\|h\|_F\big)\\
&\overset{(4.12)}{\le} C(f)\Big(\|b\|+\|\mathcal{B}\|\,C(f)\big\|a+b(f+h)\big\|_Y\Big)\|h\|_F\\
&\le C_1\|h\|_F
\end{aligned}$$

mit $C_1 = C(f)\big(\|b\|+C(f)\|\mathcal{B}\|\max_{\|h\|\le 1}\{\|a+b(f+h)\|_Y\}\big)$.

Hierbei wurde die Abschätzung (4.12) für v benutzt. Dies ist die einzige Stelle, an der sie für ein $h \neq 0$ verwendet wird.

□

Lemma 4.4.4 *Sei $z = v-u-w$. Es existiert ein $C_2 > 0$ derart, daß*

$$\|z\|_U \le C_2\|h\|_F^2 \quad .$$

Beweis: Betrachte die Differenz der Gleichungen (4.14) - (4.13) - (4.15):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}z+\mathcal{B}(f,z) &= -\mathcal{B}(h,v-u)\\
\overset{(4.12)}{\Rightarrow} \quad \|z\|_U &\le C(f)\,\|\mathcal{B}(h,v-u)\|_Y\\
&\le C(f)\,\|\mathcal{B}\|\,\|v-u\|_U\,\|h\|_F\\
&\le C^2(f)\,\|\mathcal{B}\|\,C_1\,\|h\|_F^2 \qquad \text{wegen Lemma 4.4.3}\\
&\le C_2\|h\|_F^2
\end{aligned}$$

mit $C_2 = C^2(f)\,\|\mathcal{B}\|\,C_1$.

□

Beweis des Satzes:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\|h\|\to 0}\frac{1}{\|h\|_F}\big\|R(f+h)-R(f)-R'(f)[h]\big\|_Z\\
&= \lim_{\|h\|\to 0}\frac{1}{\|h\|_F}\big\|\mathcal{C}v+\mathcal{D}(f+h,v)-c-d(f+h)-\big(\mathcal{C}u+\mathcal{D}(f,u)-c-df\big)\\
&\qquad -\big(\mathcal{C}w+\mathcal{D}(f,w)+\mathcal{D}(h,u)-dh\big)\big\|_Z\\
&= \lim_{\|h\|\to 0}\frac{1}{\|h\|_F}\big\|\mathcal{C}z+\mathcal{D}(f,z)+\mathcal{D}(h,v)-\mathcal{D}(h,u)\big\|_Z\\
&= 0 \quad ,
\end{aligned}$$

da

$$\begin{array}{rclcl}
\|\mathcal{C}z\|_Z & \leq & \|\mathcal{C}\|\,\|z\|_U & \leq & \|\mathcal{C}\|\,C_2\,\|h\|_F^2 \quad , \\
\|\mathcal{D}(f,z)\|_Z & \leq & \|\mathcal{D}\|\,\|f\|_F\,\|z\|_U & \leq & \|\mathcal{D}\|\,\|f\|_F\,C_2\,\|h\|_F^2 \quad , \\
\|\mathcal{D}(h,v-u)\|_Z & \leq & \|\mathcal{D}\|\,\|h\|_F\,\|v-u\|_U & \leq & \|\mathcal{D}\|\,C_1\,\|h\|_F^2 \quad .
\end{array}$$

□

4.4.3 Nicht-Anwendbarkeit der in 4.4.1 und 4.4.2 vorgestellten Beweismethoden zur Fréchet-Differenzierbarkeit im Fall der Wellengleichung

Die Sätze 4.4.1 und 4.4.2 sind im Falle der Wellengleichung nicht anwendbar, da die Lösungen der Wellengleichung im allgemeinen nicht glatt genug sind. Wir wollen dies im folgenden erläutern. Wie in Kapitel 3 sei wieder $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \in \{2,3\}$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^4$ und $Q := \Omega \times (0,T)$.

Die natürliche Wahl von ξ aus Satz 4.4.1 ist

$$\xi(u,f) = u_{tt} - (1+f)\Delta u - q \quad .$$

Mit $Y = L^2(Q)$ kann bei der Wellengleichung gemäß Satz 3.1.12 nur $U = W_2^1(Q)$ gewählt werden, dann ist ξ aber keine Abbildung zwischen den Räumen $U \times F \to Y$ mehr. Das Dilemma ist nicht auflösbar, da die Lösungen der Wellengleichung nur um eine Differenzierbarkeitsstufe glatter sind als die Inhomogenität, in der Gleichung jedoch Ableitungen zweiter Ordnung vorkommen.

Bewiesen wird Satz 4.4.1 mit einer Fixpunktiteration, bei der $\xi(u_{j-1},f)$ im Quellterm zur Bestimmung von u_j verwendet wird. Im Falle der Wellengleichung wäre dieser Beweisansatz daher allenfalls bei der Annahme $q,f \in C^\infty$ anwendbar, da Quellterm und Lösung in diesem Fall die gleiche Glattheit aufweisen (dies folgt aus Satz 3.1.12, vergleiche auch [Isa98, Section 8.0]).

Bei der Beweismethode, die O. Dorn in [Dor97] verwendet, tritt das gleiche Problem auf. Betrachten wir etwa die einfache Wellengleichung

$$u_{tt} - (1+f)\Delta u = q$$

und wählen

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{A} & = & \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad , \\
\mathcal{B} & = & -f\Delta \quad ,
\end{array}$$

so sind die Forderung der Beschränktheit von $\mathcal{B}$ und die Abschätzung (4.12) aufgrund der mangelnden Glattheit der Lösungen der Wellengleichung nicht zusammen erfüllbar.

In diesem Fall ist die Beweisidee jedoch zu retten, weil zweite Ableitungen von u nur zweimal als Quellterme für die Wellengleichung benötigt werden, nämlich jeweils in den Beweisen der Lemmata 4.4.3 und 4.4.4. Wir können daher im folgenden Abschnitt bei leicht verschärften Anforderungen an den Quellterm die Fréchet-Differenzierbarkeit beweisen, ohne $q,f \in C^\infty$ annehmen zu müssen.

4.4.4 Nachweis der Differenzierbarkeit für die Wellengleichung mit der Methode von O. Dorn und V.P. Palamodov

Bisher haben wir in Abschnitt 4.4 das Medium als ruhend angenommen. Dies vereinfachte die Schreibweise ohne inhaltliche Komplikationen zu verschleiern. Der Satz 4.4.6 beinhaltet die Hauptaussage von Abschnitt 4.4. Der Vollständigkeit halber werden wir hierfür die Mediumsgeschwindigkeit $\frac{1}{2}\mu(x)$ nicht als Null annehmen.

Wir formulieren die in Satz 3.1.12 enthaltene Energieabschätzung zunächst in der folgenden Bemerkung in der Form, wie sie für den Beweis des Satzes zur Differenzierbarkeit benötigt wird. Hierbei betrachten wir für $k \in \mathbb{N}^+$ und $\delta > 0$ die Menge $B_{k,\delta} := \{h \in W_\infty^{k-1}(\Omega) : \|h\|_{k-1,\infty,\Omega} \le \delta\}$.

Bemerkung 4.4.5 *Seien $k \ge 1$, $f \in W_\infty^{k-1}(\Omega) \cap W_\infty^1(\Omega)$ mit $f(x) > -1$ fast überall in $\overline{\Omega}$. Weiter seien $\tilde{\mu} \in \left(W_\infty^{k-1}(\Omega)\right)^n$ mit $\operatorname{div}\tilde{\mu} = 0$ in Ω und $\nu \cdot \tilde{\mu}|_{\partial\Omega\times(0,T)=0}$, $\partial\Omega \in C^{k+2}$. Nun sei $\epsilon > 0$ so klein, daß für alle $h \in B_{k,\epsilon}$ gilt $1 + f(x) + h(x) > 0$ fast überall in $\overline{\Omega}$. Für $h \in B_{k,\epsilon}$ und $\tilde{q} \in W_2^{k-1}(Q)$ sei $u_{h,\tilde{q}}$ die Lösung von*

$$u_{tt} + \tilde{\mu} \cdot \nabla u_t - (1 + f + h)\Delta u = \tilde{q} \quad \text{in } Q \tag{4.16}$$

mit homogenen Anfangs- und Neumann-Randdaten. Dann existiert ein $C > 0$, das von k, f, μ und Q abhängt, so daß

$$\forall\, h \in B_{k,\epsilon}\ \forall\, \tilde{q} \in W_2^{k-1}(Q) :\ \|u_{h,\tilde{q}}\|_{k,2,\Omega} < C\|\tilde{q}\|_{k-1,2,Q} \tag{4.17}$$

gilt.

<u>Beweis:</u> Um Satz 3.1.12 anwenden zu können, dividieren wir Gleichung (4.16) durch $(1 + f + h)$. Wir setzen

$$\rho_h(x) = \frac{1}{1 + f(x) + h(x)}, \quad \mu_h(x) = \rho_h(x)\tilde{\mu}(x), \quad q_h(x) = \rho_h(x)\tilde{q}(x) \quad .$$

Nach den Voraussetzungen an f, h und ϵ erfüllen ρ_h, μ_h und q_h alle Voraussetzungen des Satzes 3.1.12. Also existiert eine eindeutige Lösung von

$$\rho_h(x)u_{tt}(x,t) + \mu_h(x) \cdot \nabla u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = q_h(x,t) \quad \text{in } Q$$

mit homogenen Anfangs- und Neumann-Randdaten und diese Lösung ist auch die Lösung $u_{h,\tilde{q}}$ von (4.16). Es gibt nach Satz 3.1.12 ein $C_h > 0$, das von f, h, ϵ, k und Q, nicht aber von q_h abhängt mit

$$\|u_{h,\tilde{q}}\|_{k,2,Q} \le C_h\|q_h\|_{k-1,2,Q} \quad .$$

C_h hängt stetig von $\|\rho\|_{k-1,\infty,\Omega}$ und $\|\frac{1}{\rho}\|_{1,\infty,\Omega}$ ab. Wir setzen $C_0 := \sup\limits_{h \in B_{k,\epsilon}} C_h$.

Weiter ist $\|q_h\|_{k-1,2,Q} \le \|1 + f + h\|_{k-1,\infty,\Omega}\|\,\|\tilde{q}\|_{k-1,2,Q}$. Für beliebiges, aber festes f gibt es also ein C_1 mit

$$\forall h \in B_{k,\epsilon} :\ \|1 + f + h\|_{k-1,\infty,\Omega} \le C_1 \quad .$$

Damit gilt (4.17) für $C = C_0C_1$.

□

Satz 4.4.6 *Seien $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \in \{2,3\}$ ein beschränktes Gebiet, $Q := \Omega \times (0,T)$, $\partial\Omega \in C^4$, $\mu \in \left(W^2_\infty(\Omega)\right)^n$ mit $\operatorname{div} \mu = 0$ in Ω und $\nu \cdot \mu|_{\partial\Omega\times(0,T)=0}$, $q \in W^2_2(Q)$. Zu $f \in W^2_\infty(\Omega)$ sei $u(f) \in W^2_2(Q)$ die Lösung aus Satz 3.1.12 von*

$$\begin{aligned} u_{tt} + \tilde{\mu} \cdot \nabla u_t - (1+f)\Delta u = \tilde{q} \quad & \text{in } Q \quad , \\ u = 0, \quad u_t = 0 \quad & \text{in } \Omega \times \{0\} \quad , \\ \nu \cdot \nabla u = 0 \quad & \text{auf } \partial\Omega \times (0,T) \quad . \end{aligned}$$

Der Operator

$$R : W^2_\infty(\Omega) \longrightarrow W^{1/2}_2\big(\partial\Omega \times (0,T)\big), \ f \mapsto u(f)|_{\partial\Omega\times(0,T)}$$

ist Fréchet-differenzierbar für jedes $f \in W^2_\infty(\Omega)$ mit $R'(f) = \tilde{R}(f)$, wobei $\tilde{R}(f)$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \tilde{R}(f) : W^2_\infty(\Omega) \quad & \rightarrow \quad W^{1/2}_2\big(\partial\Omega \times (0,T)\big) \quad , \\ \tilde{R}(f)[h] \quad & = \quad w|_{\partial\Omega\times(0,T)} \end{aligned}$$

mit der Lösung $w \in W^1_2(Q)$ von

$$\begin{aligned} w_{tt} + \tilde{\mu} \cdot \nabla w_t - (1+f)\Delta w = -h\Delta u(f) \quad & \text{in } Q \quad , \\ w = 0, \quad w_t = 0 \quad & \text{in } \Omega \times \{0\} \quad , \\ \nu \cdot \nabla w = 0 \quad & \text{auf } \partial\Omega \times (0,T) \quad . \end{aligned}$$

Beweis: Wir wählen $f \in W^2_\infty(\Omega)$ fest. Es gilt $u := u(f) \in W^3_2(Q)$. Es sei $h \in B_{3,\epsilon}$ wobei ϵ ebenso definiert ist wie in Bemerkung 4.4.5. w sei die Funktion w aus dem Satz zu diesem (zunächst festen) h. Wegen $h\Delta u \in L^2(Q)$ ist $w \in W^1_2(Q)$. Wir betrachten zusätzlich die Lösung $v \in W^3_2(Q)$ des Problems

$$v_{tt} + \tilde{\mu} \cdot \nabla v_t - (1+f+h)\Delta v = q$$

mit homogenen Anfangs- und Neumann-Randbedingungen. Nach (4.17) mit $k = 3$ existiert ein $C_1 > 0$ mit

$$\|v\|_{3,2,Q} \leq C_1 \|q\|_{2,2,Q} \quad . \tag{4.18}$$

Die Funktion $v - u \in W^3_2(Q)$ erfüllt in Q die Wellengleichung

$$(v-u)_{tt} + \tilde{\mu} \cdot \nabla(v-u)_t - (1+f)\Delta(v-u) = h\Delta v$$

mit homogenen Anfangs- und Randdaten. Wegen $h\Delta v \in \mathbb{W}^1_2(Q)$ liefert (4.17) mit $k = 2$ die Existenz von $C_2 > 0$ mit

$$\begin{aligned} \|v-u\|_{2,2,Q} \quad & \leq \quad C_2 \, \|h\Delta v\|_{1,2,Q} \\ & \leq \quad C_2 \, \|h\|_{1,\infty,\Omega} \, \|\Delta v\|_{1,2,Q} \\ & \leq \quad C_2 \, \|h\|_{1,\infty,\Omega} \, \|v\|_{3,2,Q} \\ & \overset{(4.18)}{\leq} \quad C_1 C_2 \, \|h\|_{1,\infty,\Omega} \, \|q\|_{2,2,Q} \quad . \end{aligned} \tag{4.19}$$

Die Funktion $v-u-w \in W_2^1(Q)$ erfüllt in Q die Wellengleichung

$$(v-u-w)_{tt} + \tilde{\mu} \cdot \nabla (v-u-w)_t - (1+f)\Delta(v-u-w) = h\Delta(v-u)$$

mit homogenen Anfangs- und Randdaten. Es ist $h\Delta(v-u) \in L^2(Q)$. Somit liefert (4.17) mit $k=1$ ein $C_3 > 0$ mit

$$\begin{aligned}
\|v-u-w\|_{1,2,Q} &\leq C_3 \, \|h\Delta(v-u)\|_{0,2,Q} \\
&\leq C_3 \, \|h\|_{0,\infty,\Omega} \, \|\Delta(v-u)\|_{0,2,Q} \\
&\leq C_3 \, \|h\|_{0,\infty,\Omega} \, \|v-u\|_{2,2,Q} \\
&\overset{(4.19)}{\leq} C_1C_2C_3 \, \|h\|_{1,\infty,\Omega} \, \|h\|_{0,\infty,\Omega} \, \|q\|_{2,2,Q} \\
&\leq C_1C_2C_3 \, \|q\|_{2,2,Q} \, \|h\|_{1,\infty,\Omega}^2 \quad . \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

Nach dieser Vorbereitung können wir nun die Fréchet-Differenzierbarkeit nachweisen:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\|h\|\to 0} \frac{1}{\|h\|_{2,\infty,\Omega}} \left\| R(f+h) - Rf - \tilde{R}(f)[h] \right\|_{1/2,2,\partial\Omega\times(0,T)} \\
&= \lim_{\|h\|\to 0} \frac{1}{\|h\|_{2,\infty,\Omega}} \left\| (v-u-w)|_{\partial\Omega\times(0,T)} \right\|_{1/2,2,\partial\Omega\times(0,T)} \\
&= 0 \quad ,
\end{aligned}$$

da wir aufgrund des Spursatzes ein $C_4 > 0$ haben mit

$$\begin{aligned}
\left\| (v-u-w)|_{\partial\Omega\times(0,T)} \right\|_{1/2,2,\partial\Omega\times(0,T)} &\leq C_4 \|v-u-w\|_{1,2,Q} \\
&\overset{(4.20)}{\leq} C_1C_2C_3C_4 \|h\|_{1,\infty,\Omega} \, \|h\|_{0,\infty,\Omega} \, \|q\|_{2,2,Q} \\
&\leq C_1C_2C_3C_4 \, \|q\|_{2,2,Q} \, \|h\|_{2,\infty,\Omega}^2 \quad .
\end{aligned}$$

Also ist R Fréchet-differenzierbar bei f und $R' = \tilde{R}$.

□

4.5 Herleitung des Lösungsverfahrens für die Wellengleichung

4.5.1 Rekonstruktion der Schallgeschwindigkeit bei bekannter Quelle

Wir konkretisieren nun das Verfahren zur Rekonstruktion der Schallgeschwindigkeit. Es wurde im wesentlichen bereits in [Nat96] beschrieben.

Das direkte Problem zur Quelle in $x = s$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
u_{tt} + \tilde{\mu}(x) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla u - \big(1 + f(x)\big)\Delta u &= q(x-s)\alpha(t) \quad \text{in } \Omega \times [0,T] \quad , \\
u = u_t &= 0 \quad \text{in } \Omega \times \{0\} \quad , \\
\frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times [0,T] \quad ,
\end{aligned}$$

mit $f(x) = 1 - c^2(x)$. Die Lösung zur Quelle $s = s_j$ bezeichnen wir als u_j, $j \in \{1, \dots, p\}$. Die Datengleichung lautet

$$u_j(x,t)|_{\partial\Omega\times[0,T]} = g_j(x,t) \quad .$$

Wiederum verwenden wir die in Abschnitt 4.4.2 eingeführten Bezeichnungen. Einige Größen werden jedoch mit dem Index $j \in \{1, \dots, p\}$ versehen, um die verwendete Quelle zu kennzeichnen.

Wir wählen

$$\begin{aligned}
F &= W^2_\infty(\Omega) \\
Z &= W_2^{1/2}(\partial\Omega \times (0,T)) \\
\mathcal{A}_j u &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \tilde{\mu}(x) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\nabla - \Delta\right) u \\
\mathcal{B}_j(f,u) &= -f\Delta u \\
a_j &= q(x - s_j)\alpha(t) \\
c_j &= g_j \quad \text{(Messung)} \\
\mathcal{C}_j u_j &= u_j|_{\partial\Omega\times[0,T]} \\
\mathcal{D}_j &= 0, \quad d_j \;=\; 0, \quad b_j \;=\; 0 \\
R_j(f) &= C_j u_j(f) - c_j \;=\; u_j(f)|_{\partial\Omega\times[0,T]} - g_j \quad .
\end{aligned}$$

Die Fréchet-Ableitung $R'_j(f) : F \longrightarrow Z$ ist laut Satz 4.4.6 gegeben durch

$$R'_j(f)[h] = w_j|_{\partial\Omega\times[0,T]} \quad ,$$

wobei w_j Lösung ist von

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2} w_j + \tilde{\mu}(x) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\nabla w_j - \big(1 + f(x)\big)\Delta w_j &= h(x)\Delta u_j(f) \quad \text{in } \Omega \times [0,T] \quad , \\
w_j = \frac{\partial w_j}{\partial t} &= 0 \text{ in } \Omega \times \{0\} \quad , \\
\frac{\partial w_j}{\partial \nu} &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \times [0,T] \quad .
\end{aligned}$$

Für das in Abschnitt 4.3 vorgestellte Verfahren benötigen wir den adjungierten Operator $R'_j(f)^* : Z \to F$. Da F bei unserer Wahl gar kein Hilbertraum ist, bietet es sich an, F durch $\tilde{F} := W^2_2(\Omega)$ zu ersetzen. Es muß also für $h \in F \cap \tilde{F}$ und $g \in Z$ gelten:

$$\big(R'_j(f)[h], g\big)_Z = \big(h, R'_j(f)^*[g]\big)_{\tilde{F}} \quad .$$

Um ein möglichst einfaches Verfahren zu erhalten, ersetzen wir die Skalarprodukte aber jeweils durch das entsprechende L^2-Skalarprodukt. $R'_j(f)^*$ erfülle also

$$\big(R'_j(f)[h], g\big)_{L^2(\partial\Omega\times(0,T))} = \big(h, R'_j(f)^*[g]\big)_{L^2(\Omega)} \quad .$$

In diesem Sinne gilt der folgende Satz.

Satz 4.5.1 *Für $f \in F$ mit $f(x) > -1$ ist der Operator $R_j'(f)^* : L^2\big(\partial\Omega \times (0,T)\big) \longrightarrow L^2(\Omega)$ gegeben durch*

$$R_j'(f)^*[g] = \int_0^T z\,\Delta u\,\mathrm{d}t \tag{4.21}$$

mit der Lösung z von

$$\left.\begin{aligned} z_{tt} + \nabla\cdot(\tilde{\mu} z_t) - \Delta\big((1+f)z\big) &= 0 && \text{in } \Omega\times[0,T] \quad , \\ z = \frac{\partial z}{\partial t} &= 0 && \text{in } \Omega\times\{T\} \quad , \\ \frac{\partial\big((1+f)z\big)}{\partial\nu} &= g(x,t) && \text{auf } \partial\Omega\times[0,T] \quad . \end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

<u>*Beweis:*</u> Für w, z gilt bei Beachtung der Anfangs- und Randbedingungen

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \int_0^T \big(w_{tt} + \tilde{\mu}(x)\cdot\nabla w_t - \big(1+f(x)\big)\Delta w\big)\,z\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \int_0^T \big(z_{tt} + \nabla\cdot(\tilde{\mu} z_t) - \Delta\big((1+f)z\big)\big)\,w\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\int_0^T w\,g\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \quad . \end{aligned}$$

Hierbei wurde auch $\tilde{\mu}\cdot\nu = 0$ auf $\partial\Omega$ benutzt. Aufgrund der Differentialgleichungen, die w und z erfüllen, gilt daher

$$\int_\Omega h \int_0^T z\Delta u\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}\int_0^T g\,R_j'(f)[h]\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \quad .$$

□

Wir merken an, daß wir uns im bisherigen Text ausschließlich mit Anfangs– Randwertproblemen mit *homogenen* Neumanndaten beschäftigt haben. Für das Problem (4.22) wurde kein Existenz– und Eindeutigkeitssatz bewiesen. Für $\tilde{\mu} = 0$ ergibt sich dieser aus Satz 30.5 in [Wlo82]. Die entsprechenden Aussagen lassen sich ebenso auf den Fall $\tilde{\mu} \neq 0$ verallgemeinern, wie wir dies in Kapitel 3 mit der Theorie für homogene Neumanndaten getan haben.

Mit dieser Formel für $R_j'(f)^*$ läßt sich das in Abschnitt 4.3 dargestellte Verfahren durchführen. Zur Berechnung der Adjungierten muß das „Endwertproblem" für z gelöst werden um das Integral in (4.21) auszuwerten. Hierfür muß auch die Lösung des Vorwärtsproblems u bekannt sein. Diese wurde bei der Durchführung des Verfahrens zwar bereits berechnet um die Residuen zu bestimmen, sie kann jedoch nicht für alle $(x,t) \in \Omega\times(0,T)$ abgespeichert werden. Daher wird sie ebenfalls nochmal durch die Lösung des entsprechenden Endwertproblems bestimmt. Die Endwerte sind dabei aufgrund der vorausgegangenen Vorwärtslösung bekannt.

4.5.2 Rekonstruktion des zeitabhängigen Anteils der Quelle bei gegebenen Koeffizienten

Bei der Anwendung der Schallpyrometrie ist das Sendesignal nicht bekannt. Es ist auch nicht meßbar, da in der Nähe des Senders aufgrund der hohen Lautstärke (> 150 dB) kein Mikrofon aufstellbar ist. Außerdem ist es so laut, daß die Näherung der linearen Akustik bei der Herleitung der Wellengleichung in Kapitel 2 nicht mehr gültig ist.

Eine Möglichkeit zur Lösung dieses Problems ist die Annahme eines Quellterms der Form $q_j(x)\alpha_j(t)$, bei dem $q_j(x)$ als bekannt angenommen und $\alpha_j(t)$ durch ein Rückpropagationsverfahren bestimmt wird. Dies erscheint sinnvoll, da die Wiederholbarkeit des Sendesignals zumindest unter Laborbedingungen sehr gut ist. Es ist also eine abwechselnde Rekonstruktion der Schallgeschwindigkeit $c(x)$ und des Sendesignals $\alpha_j(t)$ denkbar, bei der sich $c(x)$ von Messung zu Messung leicht ändern kann, während α_j bei jeder Messung gleich bleibt. Der Index j wird bei q und α im folgenden weggelassen, es wird also nur eine Einzelmessung betrachtet.

Wir stellen das Rückpropagationsverfahren für die beiden Probleme 4.5.1 und 4.5.2 auf:

Problem 4.5.1 *Bei gegebenen $v(x), c(x), q(x)$ und $g(x,t)$ berechne $\alpha(t)$ für*

$$\begin{aligned}
u_{tt} + \tilde{\mu}(x) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\nabla u - c^2(x)\Delta u &= q(x)\alpha(t) && \text{in} \quad \Omega \times [0,T] \\
u = u_t &= 0 && \text{in} \quad \Omega \times \{0\} \\
\frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 && \text{auf} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\
u &= g && \text{auf} \quad \partial\Omega \times [0,T]
\end{aligned}$$

Problem 4.5.2 *Bei gegebenen $v(x), c(x), \tilde{q}(x)$ und $g(x,t)$ berechne $\alpha(t)$ für*

$$\begin{aligned}
u_{tt} + \tilde{\mu}(x) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\nabla u - c^2(x)\Delta u &= 0 && \text{in} \quad \Omega \times [0,T] \\
u = u_t &= 0 && \text{in} \quad \Omega \times \{0\} \\
\frac{\partial u}{\partial \nu} &= \tilde{q}(x)\alpha(t) && \text{auf} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\
u &= g && \text{auf} \quad \partial\Omega \times [0,T]
\end{aligned}$$

In Problem 4.5.2 werden inhomogene Neumanndaten verwendet. Wir verweisen hierzu auf die Anmerkung im Anschluß an den Beweis von Satz 4.5.1.

Ebenso wie im vorigen Abschnitt verwenden wir anstelle der Skalarprodukte in F und Z diejenigen in $L^2\big((0,T)\big)$ und $L^2\big(\partial\Omega \times (0,T)\big)$. Die Operatoren $R_{(i)}, i = 1,2$ bei den Problemen 4.5.1 und 4.5.2 sind nun gegeben durch:

$$R_{(i)} : \alpha \quad \mapsto \quad u(\alpha)|_{\partial\Omega\times(0,T)} - g \quad ,$$

wobei wir die Abhängigkeit von g in der Schreibweise $R_{(i)}$ nicht zum Ausdruck bringen und $u(\alpha)$ die Lösung des direkten Problems zu 4.5.1 bzw. 4.5.2 (natürlich ohne die Gleichung $u = g$) ist.

Da die Operatoren $R_{(i)}$ bezüglich α affin linear sind, entfällt hier die Berechnung der Fréchet-Ableitung. Wir bezeichnen den Operator $R_{(i)}$ für $g = 0$ mit $R^0_{(i)}$ und berechnen die Adjungierte zu $R^0_{(i)}$.

Satz 4.5.2 *Der Operator $R^{0*}_{(1)} : Z \longrightarrow F$ ist gegeben durch*

$$R^{0*}_{(1)} f = \int_\Omega q(x) z(x,t)\,\mathrm{d}x$$

mit der Lösung z von

$$\begin{array}{rcll} z_{tt} + \nabla\cdot(\tilde{\mu} z_t) - \Delta(c^2 z) & = & 0 & \text{in} \quad \Omega\times(0,T) \quad , \\ z = \dfrac{\partial z}{\partial t} & = & 0 & \text{in} \quad \Omega\times\{T\} \quad , \\ \dfrac{\partial(c^2 z)}{\partial\nu} & = & f(x,t) \quad \text{auf} & \partial\Omega\times[0,T] \quad . \end{array}$$

<u>*Beweis:*</u>

Aufgrund der Anfangs– und Randbedingungen, insbesondere $\nu\cdot\tilde{\mu} = 0$, gilt

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \int_0^T \left(u_{tt} + \tilde{\mu}(x)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\nabla u - c^2(x)\Delta u \right) z\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \int_0^T \big(z_{tt} + \nabla\cdot(\tilde{\mu} z_t) - \Delta(c^2 z)\big)\, u\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\int_0^T u\frac{\partial c^2 z}{\partial \nu}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma \quad . \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen zeigen nun, daß gilt:

$$\int_\Omega \int_0^T q(x)\alpha(t) z(x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}\int_0^T u(x,t) f(x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma \quad ,$$

also

$$\big(h, R^{0*}_{(1)} f\big)_{L^2((0,T))} = \big(R^0_{(1)} h, f\big)_{L^2(\partial\Omega\times(0,T))} \quad .$$

□

Satz 4.5.3 *Der Operator $R^{0*}_{(2)} : Z \longrightarrow F$ ist gegeben durch*

$$R^{0*}_{(2)} f = \int_{\partial\Omega} \tilde{q}(x) z(x,t)\,\mathrm{d}x$$

mit der Lösung z von

$$\begin{array}{rcll} z_{tt} + \nabla\cdot(\tilde{\mu} z_t) - \Delta(c^2 z) & = & 0 & \text{in} \quad \Omega\times(0,T) \quad , \\ z = \dfrac{\partial z}{\partial t} & = & 0 & \text{in} \quad \Omega\times\{T\} \quad , \\ \dfrac{\partial(c^2 z)}{\partial\nu} & = & f(x,t) \quad \text{auf} & \partial\Omega\times[0,T] \quad . \end{array}$$

Beweis: Wir integrieren wiederum partiell und setzen die Anfangs– und Randwerte sowie die Differentialgleichungen ein:

$$\begin{aligned}
0 &= \int\limits_{\Omega}\int\limits_0^T \left(u_{tt} + \tilde{\mu}(x)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\nabla u - c^2(x)\Delta u\right) z\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{\Omega}\int\limits_0^T u\,\underbrace{\left(z_{tt} + \nabla\cdot(\tilde{\mu} z_t) - \Delta(c^2 z)\right)}_{=0}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega} \tilde{q}(x)\alpha(t)c^2(x)z(x,t)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t + \int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega} u(x,t)f(x,t)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t \\
&= -\int\limits_0^T \alpha R^{0*}_{(2)} f\,\mathrm{d}t + \int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}\left(R^0_{(2)}\alpha\right) f\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t \qquad .
\end{aligned}$$

Somit gilt also

$$\left(\alpha, R^{0*}_{(2)} f\right)_{L^2((0,T))} = \left(R^0_{(2)}\alpha, f\right)_{L^2(\partial\Omega\times(0,T))} \qquad .$$

□

Kapitel 5

Numerische Ergebnisse

5.1 Numerische Lösung der Differentialgleichungen

Es sei Ω ein Rechteck im $\mathbb{R}^2$. Wir wollen also nur *zweidimensionalen* Schallausbreitung simulieren. Das Schallsignal gehorche der Wellengleichung

$$u_{tt} + 2v(x) \cdot \nabla u_t - \big(1 + f(x)\big)\Delta u = q(x)\alpha(t) \qquad \text{in } \Omega \times (0, T) \tag{5.1}$$

mit $c^2(x) = 1 + f(x)$, der Gasgeschwindigkeit $v(x)$ und der Quelle $q(x)\alpha(t)$.

Bei Gleichung (5.1) werden die Anfangsbedingungen

$$u = 0, \quad u_t = 0 \quad \text{in } \Omega \times \{0\}$$

und Randbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times [0, T]$$

verwendet.

5.1.1 Diskretisierung der Wellengleichung für u

Die Herleitung des Differenzenschemas wird im folgenden für $\Omega \in \mathbb{R}^1$ beschrieben, die Formel selbst wieder für $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Die Diskretisierung mittels zentraler Differenzen führt auf das Molekül, das in Abbildung 5.1 links dargestellt ist.

Das Molekül M1 macht die Verwendung eines impliziten Verfahrens notwendig, da für die Gitterpunkte 1,2,3 beim entsprechenden Zeitschritt keine Werte vorliegen. Da ein implizites Verfahren bei zwei und dreidimensionalen Rechnungen mit feiner Diskretisierung zu sehr großen Gleichungssystemen führen würde, die in jedem Zeitschritt zu lösen wären, wird hier stattdessen ein Prädiktor-Korrektor Verfahren angewendet. Dabei wird die Zeitableitung in $\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla u$ beim Prädiktor-Schritt noch nicht durch zentrale Differenzen, sondern durch eine einfache Vorwärtsdifferenz innerhalb der beiden Gitterlevel mit bekannten Werten approximiert. Dies führt zum Molekül M2, das ein explizites Differenzenverfahren erlaubt.

t t

x x

Abbildung 5.1: Moleküle für die Diskretisierung der Wellengleichung bei $\Omega \in \mathbb{R}^1$. Die Gitterpunkte, die für die Berechnung von $\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla u$ benötigt werden, sind schwarz hervorgehoben.

Dieser Prädiktor-Schritt hat jedoch den Nachteil einer schlechteren Konvergenz bezüglich t, die bei $O(k)$ statt — wie bei M1 — bei $O(k^2)$ liegt. Daher werden bei Anwendung nur des Prädiktor-Schrittes extrem kleine Zeitschritte für die Einhaltung der CFL-Bedingung benötigt. Um dies zu vermeiden, wird mit dem Molekül M1 nachiteriert. Dieser Korrektor-Schritt ist gegebenenfalls mehrfach auszuführen.

Wir kommen nun zu den konkreten Diskretisierungen für die beiden Moleküle M1 und M2.

Das Rechteck wird mit einem $(n_1+2)\times(n_2+2)$-Gitter diskretisiert, Gitterkonstanten: h_1, h_2. Das Zeitintervall $[0,T]$ wird mit der Gitterkonstanten $k = T/m$, $m \in \mathbb{N}$ aufgeteilt. Es seien $\lambda_1 = k/h_1, \lambda_2 = k/h_2$.

Mit dem Molekül M1 erhält man aus Gleichung (5.1) ohne Beachtung der Quelle:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{i,j}^{(2)} - 2u_{i,j}^{(1)} + u_{i,j}^{(0)}}{k^2} &+ 2v(x_{i,j}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4h_1 k}\left(u_{i+1,j}^{(2)} - u_{i-1,j}^{(2)} - (u_{i+1,j}^{(0)} - u_{i-1,j}^{(0)})\right) \\ \frac{1}{4h_2 k}\left(u_{i,j+1}^{(2)} - u_{i,j-1}^{(2)} - (u_{i,j+1}^{(0)} - u_{i,j-1}^{(0)})\right) \end{pmatrix} \\
&= c^2(x_{i,j}) \left(\frac{u_{i+1,j}^{(1)} - 2u_{i,j}^{(1)} + u_{i-1,j}^{(1)}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1}^{(1)} - 2u_{i,j}^{(1)} + u_{i,j-1}^{(1)}}{h_2^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow u_{i,j}^{(2)} &= c^2(x_{i,j})\left(\lambda_1^2 \left(u_{i+1,j}^{(1)} + u_{i-1,j}^{(1)}\right) + \lambda_2^2 \left(u_{i,j+1}^{(1)} + u_{i,j-1}^{(1)}\right) - 2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right) u_{i,j}^{(1)} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} v(x_{i,j}) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 (u_{i+1,j}^{(2)} - u_{i-1,j}^{(2)} - u_{i+1,j}^{(0)} + u_{i-1,j}^{(0)}) \\ \lambda_2 (u_{i,j+1}^{(2)} - u_{i,j-1}^{(2)} - u_{i,j+1}^{(0)} + u_{i,j-1}^{(0)}) \end{pmatrix} + 2u_{i,j}^{(1)} - u_{i,j}^{(0)} \quad .
\end{aligned}$$

Entsprechend erhält man mit dem Molekül M2:

$$
\begin{aligned}
\frac{u_{i,j}^{(2)}-2u_{i,j}^{(1)}+u_{i,j}^{(0)}}{k^2} \quad &+ \quad 2v(x_{i,j})\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2h_1k}(u_{i+1,j}^{(1)}-u_{i-1,j}^{(1)}-(u_{i+1,j}^{(0)}-u_{i-1,j}^{(0)})) \\ \frac{1}{2h_2k}(u_{i,j+1}^{(1)}-u_{i,j-1}^{(1)}-(u_{i,j+1}^{(0)}-u_{i,j-1}^{(0)})) \end{pmatrix} \\
&= \quad c^2(x_{i,j})\left(\frac{u_{i+1,j}^{(1)}-2u_{i,j}^{(1)}+u_{i-1,j}^{(1)}}{h_1^2}+\frac{u_{i,j+1}^{(1)}-2u_{i,j}^{(1)}+u_{i,j-1}^{(1)}}{h_2^2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow u_{i,j}^{(2)} \quad &= \quad c^2(x_{i,j})\left(\lambda_1^2\left(u_{i+1,j}^{(1)}+u_{i-1,j}^{(1)}\right)+\lambda_2^2\left(u_{i,j+1}^{(1)}+u_{i,j-1}^{(1)}\right)-2\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)u_{i,j}^{(1)}\right) \\
&\quad - v(x_{i,j})\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1(u_{i+1,j}^{(1)}-u_{i-1,j}^{(1)}-u_{i+1,j}^{(0)}+u_{i-1,j}^{(0)}) \\ \lambda_2(u_{i,j+1}^{(1)}-u_{i,j-1}^{(1)}-u_{i,j+1}^{(0)}+u_{i,j-1}^{(0)}) \end{pmatrix} + 2u_{i,j}^{(1)}-u_{i,j}^{(0)} \quad .
\end{aligned}
$$

Im Gegensatz zur Diskretisierung der „einfachen“ Wellengleichung $u_{tt}=c^2(x)\Delta u$ kann hier bei der Implementierung der Speicherplatz für $u^{(2)}$ nicht eingespart werden. Dies führt bei dreidimensionaler Rechnung zu einem deutlich erhöhten Speicherbedarf.

Bei der oben beschriebenen Vorgehensweise werden zahlreiche Rechenoperationen sowohl beim Prädiktor als auch bei jedem Korrektorschritt wiederholt durchgeführt. Die folgenden Berechnungen lassen sich im vorhinein durchführen:

$$
\begin{aligned}
\psi_{i,j} \quad &= \quad c^2(x_{i,j})\left(\lambda_1^2\left(u_{i+1,j}^{(1)}+u_{i-1,j}^{(1)}\right)+\lambda_2^2\left(u_{i,j+1}^{(1)}+u_{i,j-1}^{(1)}\right)-2\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)u_{i,j}^{(1)}\right) \quad , \\
\varphi_{i,j} \quad &= \quad -v(x_{i,j})\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1(-u_{i+1,j}^{(0)}+u_{i-1,j}^{(0)}) \\ \lambda_2(-u_{i,j+1}^{(0)}+u_{i,j-1}^{(0)}) \end{pmatrix} + 2u_{i,j}^{(1)}-u_{i,j}^{(0)} \quad .
\end{aligned}
$$

Damit erhält man als Rechenvorschrift für den Prädiktor

$$
u_{i,j}^{(2)} = \psi_{i,j}+\varphi_{i,j}-v(x_{i,j})\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1(u_{i+1,j}^{(1)}-u_{i-1,j}^{(1)}) \\ \lambda_2(u_{i,j+1}^{(1)}-u_{i,j-1}^{(1)}) \end{pmatrix}
$$

und für den Korrektor

$$
u_{i,j}^{(2)} = \psi_{i,j}+0.5\left(\varphi_{i,j}-v(x_{i,j})\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1(u_{i+1,j}^{(2)}-u_{i-1,j}^{(2)}) \\ \lambda_2(u_{i,j+1}^{(2)}-u_{i,j-1}^{(2)}) \end{pmatrix}\right) \quad .
$$

Am Beispiel der Berechnung der Daten für ein Phantom wurde der Rechenzeitbedarf hierfür ermittelt:

# Korrektorschritte	0	1	2	3	10
Ohne Vorberechnung	1.5	3.2	5.1	6.9	19.2
Mit Vorberechnung	2.4	3.2	4.1	5.0	10.9

Angegeben ist die User-Zeit des gesamten Programmes auf einer Ultra-1 in Sekunden. Das Programm hat kaum etwas anderes gemacht, als das Vorwärtsproblem mehrfach zu lösen. Es zeigt sich, daß sich der erhöhte Programmieraufwand nicht lohnt, da 3 Korrektorschritte bei der vorliegenden Anwendung ausreichend zu sein scheinen. Für die Rückpropagation wird daher auf die entsprechend optimierten Algorithmen verzichtet.

Abbildung 5.2: Numerische Lösung des Vorwärtsproblems mit Quelle an der oberen Kante.

5.1.2 Diskretisierung der Wellengleichung für z

Die Funktion z löst das Anfangswert-/ Randwertproblem

$$\begin{aligned} z_{tt} + 2\nabla \cdot (v z_t) &= \Delta(c^2 z) \quad \text{in } \Omega \times [0,T] \quad , \\ z = \frac{\partial z}{\partial t} &= 0 \text{ in } \Omega \times \{T\} \quad , \\ \frac{\partial(c^2 z)}{\partial \nu} &= g(x,t) \text{ auf } \partial\Omega \times [0,T] \quad . \end{aligned}$$

Mit den Definitionen $\tilde{z}(x,t) = c^2(x) z(x,t)$ und $r(x) := v(x)/c^2(x) = \big(r_1(x), r_2(x)\big)^t$ ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{tt} + 2c^2(x)\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \big(r(x)\tilde{z}\big) &= c^2(x)\Delta\tilde{z} \quad \text{in } \Omega \times [0,T] \quad , \qquad (5.2) \\ \tilde{z} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} &= 0 \text{ in } \Omega \times \{T\} \quad , \\ \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \nu} &= g(x,t) \text{ auf } \partial\Omega \times [0,T] \quad . \end{aligned}$$

Diese Problemformulierung mit $\tilde{z} = c^2 z$ wird in diesem Fall aus rein programmiertechnischen Gründen gewählt.

Auch bei der Rückpropagation muß ein Prädiktor-Korrektor Verfahren angewendet werden. Die Moleküle sehen im wesentlichen so aus, wie in Abbildung 5.1 dargestellt, allerdings steht das Molekül M2 nun auf dem Kopf, da in der Zeit rückwärts iteriert wird. Direkte Diskretisierung von Gleichung (5.2) führt zu:

$$\begin{aligned} &\frac{\tilde{z}^{(2)}_{i,j} - 2\tilde{z}^{(1)}_{i,j} + \tilde{z}^{(0)}_{i,j}}{k^2} + 2c^2(x_{i,j})\frac{1}{2k}\Bigg(\\ &\qquad \frac{r_1(x_{i+1,j})\tilde{z}^{(2)}_{i+1,j} - r_1(x_{i-1,j})\tilde{z}^{(2)}_{i-1,j}}{2h_1} + \frac{r_2(x_{i,j+1})\tilde{z}^{(2)}_{i,j+1} - r_2(x_{i,j-1})\tilde{z}^{(2)}_{i,j-1}}{2h_2} \\ &\qquad - \frac{r_1(x_{i+1,j})\tilde{z}^{(0)}_{i+1,j} - r_1(x_{i-1,j})\tilde{z}^{(0)}_{i-1,j}}{2h_1} - \frac{r_2(x_{i,j+1})\tilde{z}^{(0)}_{i,j+1} - r_2(x_{i,j-1})\tilde{z}^{(0)}_{i,j-1}}{2h_2}\Bigg) \\ &= c^2(x_{i,j})\left(\frac{\tilde{z}^{(1)}_{i+1,j} - 2\tilde{z}^{(1)}_{i,j} + \tilde{z}^{(1)}_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{\tilde{z}^{(1)}_{i,j+1} - 2\tilde{z}^{(1)}_{i,j} + \tilde{z}^{(1)}_{i,j-1}}{h_2^2}\right) \quad , \end{aligned}$$

und damit zur Diskretisierung für den Korrektor:

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_{i,j}^{(0)} &= -\tilde{z}_{i,j}^{(2)} + 2\tilde{z}_{i,j}^{(1)} - \frac{c^2(x_{i,j})}{2}\Bigg(\\
&\quad \lambda_1 \left(r_1(x_{i+1,j})\tilde{z}_{i+1,j}^{(2)} - r_1(x_{i-1,j})\tilde{z}_{i-1,j}^{(2)} - r_1(x_{i+1,j})\tilde{z}_{i+1,j}^{(0)} + r_1(x_{i-1,j})\tilde{z}_{i-1,j}^{(0)} \right) + \\
&\quad \lambda_2 \left(r_2(x_{i,j+1})\tilde{z}_{i,j+1}^{(2)} - r_2(x_{i,j-1})\tilde{z}_{i,j-1}^{(2)} - r_2(x_{i,j+1})\tilde{z}_{i,j+1}^{(0)} + r_2(x_{i,j-1})\tilde{z}_{i,j-1}^{(0)} \right) \Bigg) \\
&+ c^2(x_{i,j}) \left(\lambda_1^2 (\tilde{z}_{i+1,j}^{(1)} - 2\tilde{z}_{i,j}^{(1)} + \tilde{z}_{i-1,j}^{(1)}) + \lambda_2^2 (\tilde{z}_{i,j+1}^{(1)} - 2\tilde{z}_{i,j}^{(1)} + \tilde{z}_{i,j-1}^{(1)}) \right) \quad .
\end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich für den Prädiktorschritt:

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_{i,j}^{(0)} &= -\tilde{z}_{i,j}^{(2)} + 2\tilde{z}_{i,j}^{(1)} - c^2(x_{i,j})\Bigg(\\
&\quad \lambda_1 \left(r_1(x_{i+1,j})\tilde{z}_{i+1,j}^{(2)} - r_1(x_{i-1,j})\tilde{z}_{i-1,j}^{(2)} - r_1(x_{i+1,j})\tilde{z}_{i+1,j}^{(1)} + r_1(x_{i-1,j})\tilde{z}_{i-1,j}^{(1)} \right) + \\
&\quad \lambda_2 \left(r_2(x_{i,j+1})\tilde{z}_{i,j+1}^{(2)} - r_2(x_{i,j-1})\tilde{z}_{i,j-1}^{(2)} - r_2(x_{i,j+1})\tilde{z}_{i,j+1}^{(1)} + r_2(x_{i,j-1})\tilde{z}_{i,j-1}^{(1)} \right) \Bigg) \\
&+ c^2(x_{i,j}) \left(\lambda_1^2 (\tilde{z}_{i+1,j}^{(1)} - 2\tilde{z}_{i,j}^{(1)} + \tilde{z}_{i-1,j}^{(1)}) + \lambda_2^2 (\tilde{z}_{i,j+1}^{(1)} - 2\tilde{z}_{i,j}^{(1)} + \tilde{z}_{i,j-1}^{(1)}) \right) \quad .
\end{aligned}$$

Bei der Rückpropagation muß nun auch u rückwärts in der Zeit berechnet werden. Der Vollständigkeit halber werden auch hierfür die entsprechenden Vorschriften angegeben. Prädiktor:

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow u_{i,j}^{(0)} &= c^2(x_{i,j})\left(\lambda_1^2 \left(u_{i+1,j}^{(1)} + u_{i-1,j}^{(1)} \right) + \lambda_2^2 \left(u_{i,j+1}^{(1)} + u_{i,j-1}^{(1)} \right) - 2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \right) u_{i,j}^{(1)} \right) \\
&\quad - v(x_{i,j}) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 (u_{i+1,j}^{(2)} - u_{i-1,j}^{(2)} - u_{i+1,j}^{(1)} + u_{i-1,j}^{(1)}) \\ \lambda_2 (u_{i,j+1}^{(2)} - u_{i,j-1}^{(2)} - u_{i,j+1}^{(1)} + u_{i,j-1}^{(1)}) \end{pmatrix} + 2u_{i,j}^{(1)} - u_{i,j}^{(2)} \quad ,
\end{aligned}$$

Korrektor:

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow u_{i,j}^{(0)} &= c^2(x_{i,j})\left(\lambda_1^2 \left(u_{i+1,j}^{(1)} + u_{i-1,j}^{(1)} \right) + \lambda_2^2 \left(u_{i,j+1}^{(1)} + u_{i,j-1}^{(1)} \right) - 2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \right) u_{i,j}^{(1)} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} v(x_{i,j}) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 (u_{i+1,j}^{(2)} - u_{i-1,j}^{(2)} - u_{i+1,j}^{(0)} + u_{i-1,j}^{(0)}) \\ \lambda_2 (u_{i,j+1}^{(2)} - u_{i,j-1}^{(2)} - u_{i,j+1}^{(0)} + u_{i,j-1}^{(0)}) \end{pmatrix} + 2u_{i,j}^{(1)} - u_{i,j}^{(2)} \quad .
\end{aligned}$$

5.2 Rekonstruktionen verschiedener Phantome

5.2.1 Vorstellung der Phantome und Startbilder

Im folgenden zeigen wir Rekonstruktionen von realistischen Funktionen $c(x)$ bei 8 bzw. 12 Meßgeräten. Wir verwenden zwei Phantome, die in Abbildung 5.4 dargestellt sind. Das erste entspricht einer realistischen Temperaturverteilung in der 54 m-Ebene eines

Abbildung 5.3: Numerische Lösung des Rückwärtsproblems zu Abbildung 5.2. Die Bilder sind mit größer werdender Zeit angeordnet. Da sie als Lösung eines Endwertproblems berechnet wurden, erfolgte die Berechnung also von rechts nach links. Im oberen Bild werden für die Rückpropagation nur die 7 Mikrofonpositionen verwendet, im unteren wurde angenommen, daß auf dem gesamten Rand gemessen wurde. Unten zeigt sich, daß sich die Welle wieder bei der Quellposition zusammenzieht. Oben ist dies aufgrund der wenigen Daten nicht zu erkennen.

Abbildung 5.4: Phantome T (links) für die Schallgeschwindigkeit in einer Tangentialfeuerung und D (rechts) in einer Deckenfeuerung. Die Skalen sind in Abbildung 5.7 bzw. Abbildung 5.15 dargestellt. In Phantom D sind die Laufwege des schnellsten Teiles des Schallsignals eingezeichnet. Die weißen Pfade zeigen exemplarisch, daß die kalten Bereiche (kleine Schallgeschwindigkeit) umgangen werden.

tangential gefeuerten 600 MW_{el}-Feuerraums. Wir bezeichnen dies als Phantom T für Tangentialfeuerung. Ein solcher Feuerraum ist in Abbildung 5.5 rechts zu sehen. Auf einer Höhe von 54 m befinden sich die 8 Meßgeräte außen an den Wänden. Die Signale müssen durch Rohre durch die Wände geführt werden. Im unteren Bereich befinden sich in jeder Wand zwei Brenner, die Luft und Kohlenstaub tangential auf einen kleinen Kreis in der Kesselmitte einblasen. Hierdurch entsteht eine deutliche horizontale

Gasgeschwindigkeit die mit Laufzeitmessungen gut zu messen ist. Knapp unterhalb der Meßebene wird kältere Ausbrandluft (ABL) in den Kessel eingeblasen. Diese sorgt in der Meßebene für kleine Zonen niedrigerer Temperatur, in denen auch die Schallgeschwindigkeit niedriger ist. Dies ist an den Seiten in Phantom T zu erkennen. Es wurde angenommen, daß eine ABL-Düse an der linken Wand außer Funktion ist.

Das zweite Phantom wurde aus einer realistischen Temperaturverteilung knapp unterhalb der Decke eines von oben gefeuerten 300 MW_{el}-Blocks berechnet. Da es eine Temperaturverteilung in einer Deckenfeuerung zeigt, bezeichnen wir es als Phantom D. Es zeigt, daß fünf Brenner arbeiten. In der Mitte jedes Brenners fällt Kohlenstaub herab, der knapp unterhalb der Decke noch nicht gezündet hat. Daher ist hier ein Bereich niedriger Temperatur. Auf einem Ring darum wird Luft eingeblasen, so daß jeweils ein heißer Ring brennenden Kohlenstaubes das kalte Gebiet des ungezündeten Brennstoffs umgibt.

Als Modell für die Gasgeschwindigkeit verwenden wir bei Phantom T die in [Sie97] vorgestellten Ergebnisse des Instituts für Verfahrenstechnik und Dampfkesselwesen, Universität Stuttgart, sowie unsere dort dargestellte, mit der Vektortomographie berechnete Laufzeitrekonstruktion. Abbildung 5.5 zeigt links oben die Gasgeschwindigkeit, die für die Berechnung der simulierten Meßdaten verwendet werden wird, und links unten die Laufzeitrekonstruktion. Bei Phantom D gehen wir von einem ruhenden Gas aus.

Wir verwenden keine realistische Schallquelle, da hierfür eine deutlich höhere Diskretisierung nötig gewesen wäre und bei der zur Zeit laufenden Neuentwicklung der Meßgeräte auch noch unklar ist, wie eine realistische Schallquelle in Zukunft beschaffen sein wird. Unsere Signale sind wesentlich niederfrequenter als das in Abbildung 1.1 gezeigte Meßsignal. Unsere Quelle stellen wir in Abschnitt 5.2.3 vor.

Startbilder

Für die Rekonstruktion mit unserem iterativen Verfahren benötigen wir einen Startwert für die Funktion $c(x)$. Dieser wird mit dem in [Sie94, SD96, SD95, Der95] vorgestellten Verfahren aus den gemessenen Schallaufzeiten ermittelt. In diesen Arbeiten wird davon ausgegangen, daß die durchschnittliche Temperatur auf den Meßpfaden, also den Verbindungslinien zwischen Sendern und Empfängern gegeben ist. Zur Ermittlung der Startbilder wird demgegenüber direkt mit der Laufzeit gearbeitet, die gleich dem Integral über den Kehrwert der Schallgeschwindigkeit entlang des Laufweges des schnellsten Teiles des Schallsignals ist.

Diese Laufwege können bei der Auswertung von Laufzeitdaten bereits zu einem Problem werden. Aufgrund der Fermatschen Beugung sind sie bei nicht konstanter Schallgeschwindigkeit im allgemeinen nicht gradlinig sondern tendieren dazu, Bögen durch Bereiche mit höherer Schallgeschwindigkeit zu machen. In extremen Fällen kann dies dazu führen, daß Teile des Rekonstruktionsgebietes von den Schallaufwegen gar nicht getroffen werden. Eine solche extreme Situation liegt bei Phantom D vor. In Abbildung 5.4 (rechts) sind die numerisch ermittelten Schallaufwege eingezeichnet. Dieses Bild wurde aus [NSD97] übernommen. Zur Berechnung der Pfade wurden die Charakteristiken der Eikonalgleichung bei ruhendem Medium berechnet, die in Abschnitt 3.2.2 für ein bewegtes Medium hergeleitet wurden.

Abbildung 5.5: Rechts ist ein 600 MW_{el} Dampferzeuger skizziert. Die Meßgeräte sind in der 54 m-Ebene eingezeichnet. Das Bild links unten wurde am Institut für Dampfkesselwesen der Universität Stuttgart durch eine Simulation der Verbrennung in einer Tangentialfeuerung gewonnen. Es zeigt eine realistische horizontale Gasgeschwindigkeit in der 54 m-Ebene. Das Bild darüber stellt eine Rekonstruktion des unteren Bildes mit der Vektortomographie dar, vergleiche [Sie97].

5.2.2 Rekonstruktionen der Schallgeschwindigkeit in bewegtem Medium

Die Daten zu Phantom T wurden mit Hilfe der in 5.2.3 beschriebenen Quelle und der in Abbildung 5.5 links oben dargestellten Gasgeschwindigkeit berechnet. Die Phasenverschiebung aufgrund der Gasgeschwindigkeit ist bei uns nur sehr gering. Um dies zu

Abbildung 5.6: Phasenverschiebung bei Simulationsdaten

zeigen, sind in Abbildung 5.6 die „Meßdaten“ für eine Mikrofonposition mit und ohne Gasgeschwindigkeit dargestellt. Der Unterschied ist viel kleiner als bei den tatsächlich gemessenen Daten in Abbildung 1.1, es wird sich aber zeigen, daß er dennoch relevant ist.

In Abbildung 5.7 sind links das Phantom T und das Startbild dargestellt, rechts davon Rekonstruktionen dieses Phantoms. In der oberen Reihe sind es Rekonstruktionen mit 8 Meßpositionen in den in Abbildung 5.5 bei der Darstellung des Originals der Gasgeschwindigkeit gezeigten Positionen. Gemessen wird dabei nur an den sieben Stationen, die gerade nicht senden, das Bild wird also rekonstruiert aus 8×7 Kurven der Art, wie sie in Abbildung 5.6 dargestellt ist. In der unteren Zeile sind Rekonstruktionen aus 12 Meßpositionen gezeigt, wobei die zusätzlichen Meßpunkte jeweils in der Mitte der Wände liegen.

In allen Fällen wurden 10 „Sweeps“ durchgeführt, d.h. die äußere Schleife in dem auf Seite 58 skizzierten Verfahren wurde 10 mal durchlaufen. Bei einer Ortsdiskretisierung von 100×100 Pixeln und 350 Zeitschritten dauert eine Rekonstruktion etwa 20 Minuten auf einer mit 300 MHz getakteten Sparc Ultra 60.

Die linke Rekonstruktion zeigt jeweils das Ergebnis einer Rechnung mit exakt bekannter Gasgeschwindigkeit (Abbildung 5.5 links oben). Für die mittleren Bilder wurde die Rekonstruktion der Gasgeschwindigkeit aus Laufzeitmessungen (englisch time-of-flight measurements, TOF) mittels der Vektortomographie verwendet. Der Unterschied ist minimal, zumindest unter diesen Bedingungen ist diese Näherung also mehr als ausreichend. Bei den Bildern rechts wurde für die Rekonstruktionen angenommen, daß das Gas ruht. Am Beispiel der Daten in Abbildung 5.6 wird klar, daß der Algorithmus also den systematischen Fehler, der durch die (bei uns nur minimale) zeitliche Verschiebung vorliegt, durch die Änderung der Schallgeschwindigkeit $c(x)$ korrigieren muß.

Mit Hilfe der Darstellung der Gasgeschwindigkeit in Abbildung 5.5 links oben ist zu erklären, daß dies prinzipiell unmöglich ist. Zwischen den Meßgeräten 3 und 8 bewegt

Abbildung 5.7: Rekonstruktion der Schallgeschwindigkeit in einer Tangentialfeuerung: Das Bild links oben zeigt eine realistische Temperaturverteilung in einem Kessel mit Tangentialfeuerung. Die kalten Stellen entstehen durch eingeblasene Ausbrandluft (ABL), die die Gastemperatur senken soll. Eine ABL-Düse auf der linken Seite ist ausgefallen. Das Bild links unten zeigt eine Rekonstruktion aus Laufzeitdaten (8 Meßgeräte). Sie dient als Startbild. Die übrigen Bilder zeigen Lösungen des inversen Problems mit 8 bzw. 12 Meßgeräten. Links wurde das korrekte Modell für die Gasgeschwindigkeit verwendet, in der Mitte die Rekonstruktion mit der Vektortomographie, rechts keine Gasgeschwindigkeit.

sich das Gas von rechts nach links. Das Schallsignal von 3 nach 8 wird hierdurch beschleunigt, das Signal von 8 nach 3 verlangsamt. Wenn bereits zufällig die korrekte Schallgeschwindigkeit gefunden wäre, so würde sie aufgrund der Daten abwechselnd als zu hoch oder zu niedrig interpretiert werden. Das iterative Verfahren kann also keinesfalls konvergieren.

Gegenüber diesem systematischen Fehler ist das Rekonstruktionsverfahren relativ unempfindlich gegen zufällige Fehler. Dies wurde in sehr einfacher Form simuliert, indem auf die Daten $g_{ji}(t)$ zu Sender j und Empfänger i ein Fehler in der Form

$$\tilde{g}_{ji}(t) := 0{,}05 \cdot \text{Zufall} + 0{,}4 \cdot \text{Zufall} \cdot g_{ji}(t) \tag{5.3}$$

addiert wurde, wobei „Zufall“ jeweils eine Zufallszahl im Intervall $[-1, 1]$ ist. Der Einfachheit halber wurde eine Gleichverteilung gewählt. Ein gestörter Datensatz ist beispielhaft in Abbildung 5.8 dargestellt.

Abbildung 5.8: Datensatz mit Fehlern

Abbildung 5.9: Rekonstruktion aus zufällig gestörten Meßdaten. Exemplarisch sind die simulierten Meßdaten für eine Mikrofonposition in Abbildung 5.8 dargestellt.

Die Rekonstruktion aus 8 Meßdaten zeigen wir in Abbildung 5.9 rechts. Daneben sind zum Vergleich nochmal das Phantom (links) und die Rekonstruktion bei Verwendung der Laufzeitrekonstruktion für die Gasgeschwindigkeit (Mitte) abgebildet.

Bei acht Meßpositionen haben wir bezüglich der vier Rekonstruktionen für die ersten 25 Sweeps jeweils den L^2-Fehler des Bildes, also die L^2-Norm des Differenzbildes aus Phantom und Rekonstruktion berechnet. Zur Normierung wurde der L^2-Fehler des Startbildes auf 1 gesetzt.

Die Ergebnisse in Abbildung 5.11 zeigen, daß die so gemessenen Unterschiede zwischen Rekonstruktion und Phantom bei der Verwendung fehlerfreier Daten und genau oder näherungsweise bekanntem $v(x)$ bei den ersten 25 Sweeps immer kleiner werden (durchgezogene und lang gestrichelte Kurven).

Bei zufällig gestörten Daten erreicht der so definierte Bildfehler bereits nach dem dritten Sweep sein Minimum und wächst dann langsam an (kurz gestrichelte Linie). Dieses Ergebnis hängt wesentlich mit sehr hochfrequenten Fehlern zusammen. In der Formel für den Update wird das Produkt $z(x,t)\Delta u(x,t)$ über die Zeit integriert, wobei u und z Lösungen der Wellengleichung sind. Die typischen Wellenlängen bei diesen Lösun-

Abbildung 5.10: L^2-Norm der Residuen von Rekonstruktion für die ersten 25 Iterationen bei 8 Meßpositionen. Durchgezogene Linie: $v(x)$ exakt bekannt, lang gestrichelte Linie: $v(x)$ aus TOF-Daten, graue Linie: $v(x) = 0$, kurz gestrichelte Linie: Fehlerhafte Daten gemäß (5.3). Zur Normierung wurde das Residuum des Bildes mit konstanter Schallgeschwindigkeit ($720\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$) auf Eins gesetzt.

gen sind kleiner als die Strecken, über die sich das Phantom $c(x)$ ändert. Der Update enthält also viele kleine Details, die als a priori-Wissen ausgeschlossen werden können. Somit ließe sich die Rekonstruktion mit fehlerbehafteten Daten durch die Einführung von Glättungen des Updates noch deutlich verbessern. Wir führen dies hier nicht vor, da die Einführung solcher Verfeinerungen des Algorithmus erst sinnvoll ist, wenn das verwendete Modell sehr nah an der Realität ist. In Kapitel 6 geben wir einen Ausblick auf die nächsten Schritte, die zur weiteren Behandlung des Problems sinnvoll sind.

Der systematische Fehler bei der Verwendung von $v(x) = 0$ zur Rekonstruktion (graue Linie) hat sein Minimum bereits nach einem Sweep und wächst dann deutlich schneller. Diese Beobachtung ist sehr wichtig, denn sie deckt sich mit dem oben beschriebenen Problem, daß Fehler aufgrund der Vernachlässigung der Gasgeschwindigkeit prinzipiell nicht durch Änderungen an der Schallgeschwindigkeit aufgefangen werden können. Eine Verfeinerung des Verfahrens, wie im vorigen Absatz für den Ausgleich zufälliger Fehler vorgeschlagen, hilft hier nicht weiter.

Hierzu ist auch eine Beobachtung wichtig, die bei den Residuen gemacht werden kann. In Abbildung 5.10 ist die L^2-Norm der Residuen, also

$$\rho = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{p} \int_0^T \left|u_j(f)(x_i,t) - g_j(x_i,t)\right|^2 \mathrm{d}t}$$

gegen die Nummer des Sweeps aufgetragen, wobei f die jeweils aktuelle Näherung nach dem Sweep ist und x_i, $i = 1, \dots, p$ die Meßpositionen bezeichnet. Bei uns ist $p = 8$. Das Lösungsverfahren wurde zur Minimierung von $R_j(f)$ entwickelt. Abbildung 5.10 zeigt

Abbildung 5.11: L^2-Norm der Differenzbilder aus Phantom und Rekonstruktion für die ersten 25 Iterationen bei 8 Meßpositionen. Durchgezogene Linie: $v(x)$ exakt bekannt, lang gestrichelte Linie: $v(x)$ aus TOF-Daten, graue Linie: $v(x) = 0$, kurz gestrichelte Linie: Fehlerhafte Daten gemäß (5.3).

jedoch, daß das Residuum tatsächlich nur in den Fällen exakter Daten und zumindest näherungsweise bekannter Schallgeschwindigkeit kleiner wird. Bei zufällig gestörten Daten und bei der Annahme $v(x) = 0$ steigt es wieder, im letzten Fall sogar relativ schnell. Der Grund hierfür ist das Einzelschrittverfahren. Tatsächlich wird bei jedem Einzelschritt das Residuum $R_j(f)$ verkleinert, indem ein günstiger Update zu f addiert wird. In den Fällen, in denen ein systematischer Fehler vorliegt oder die Daten inkonsistent sind, verschlechtert dieser Update jedoch die übrigen Residuen. Somit entfernt sich der Algorithmus in diesen Fällen sowohl bei Betrachtung des Bildfehlers als auch bei Betrachtung der Residuen vom ursprünglichen Phantom.

5.2.3 Rekonstruktionen von Schallgeschwindigkeit und Schallquelle

Wir geben uns nun sowohl für die Schallgeschwindigkeit $c(x)$ als auch für den zeitabhängigen Anteil $\alpha(t)$ der Quelle ein Phantom vor und versuchen, beides aus den „Meßdaten“, das heißt der Lösung des Vorwärtsproblems, zu rekonstruieren. Im Beispiel werden dabei 12 Sende- und Empfangseinheiten angenommen, d.h. jeweils eine Einheit sendet und 11 empfangen. Zur Rekonstruktion liegen demnach als Daten 12×11 „Mikrofonaufzeichnungen“ vor.

Für diese Untersuchung wird auf die Vorgabe einer Geschwindigkeitsverteilung $v(x)$ verzichtet, wir wählen also $v \equiv 0$.

Als Original für $c(x)$ wird unser Phantom D, also das Modell für die Schallgeschwindigkeit in einem deckengefeuerten Kessel knapp unterhalb der Brenner verwendet (siehe Abbildung 5.4, rechts). Das Phantom für $\alpha(t)$ ist in den Abbildungen 5.12 und 5.13

Abbildung 5.12: Originalkurve für $\alpha(t)$ (schwarz, durchgezogen), Startwert (gestrichelt) und Rekonstruktion (grau). Für $q(x)$ wird das korrekte Modell verwendet, vergleiche Abbildung 5.14.

jeweils als durchgezogene, schwarze Linie dargestellt.

Für unser iteratives Verfahren benötigen wir wiederum geeignete Startwerte. Für $c(x)$ ist dies die Rekonstruktion aus reinen Laufzeitdaten (Abbildung 5.15, b)) und für $\alpha(t)$ verwenden wir ein einfaches Sinus-Signal, das in der Nähe des Randes des Signalträgers glatt auf Null gedrückt wird. Es ist in den Abbildungen 5.12 und 5.13 jeweils als gestrichelte Linie eingezeichnet. Wir gehen davon aus, daß der Träger von $\alpha(t)$ bekannt ist. Dies ist realistisch, da eine reale Messung der Länge des Sendesignals weniger problematisch ist als die Messung des Signals selbst.

Es hat sich als sinnvoll herausgestellt, zunächst das Startbild für $c(x)$ als Näherung zu verwenden und *nur* $\alpha(t)$ zu bestimmen. Hierfür werden 10 Iterationen durchgeführt, die bereits zu einer guten Näherung für $\alpha(t)$ führen. Anschließend werden 10 Iterationen durchgeführt, bei denen sowohl $c(x)$ als auch $\alpha(t)$ bestimmt werden sollen. Hierbei verändert sich die Approximation an $\alpha(t)$ kaum noch.

Für die Ortsabhängigkeit des Quellsignales, $q(x)$, wird eine einfache Gaußglocke angenommen. Da diese Funktion jedoch in der Realität ebenfalls nicht meßbar ist, wird für die Rekonstruktion auch eine verfälschte Funktion $\tilde{q}(x)$ verwendet. Diese beiden Funktionen sind in Abbildung 5.14 dargestellt.

Abbildung 5.12 zeigt neben dem Phantom für $\alpha(t)$ (schwarz, durchgezogen) und der Startnäherung (gestrichelt) auch die endgültige Rekonstruktion (grau). Auf die Darstellung der Teilrekonstruktion, bei der für $c(x)$ nur das Startbild verwendet wird, haben wir verzichtet, da diese Kurve kaum von der endgültigen Rekonstruktion unterscheidbar ist. Dieses gute Ergebnis hat seinen Grund vor allem darin, daß wir davon ausgehen, daß alle Schallquellen das gleiche Sendesignal erzeugen. Falls nicht nur eines, sondern

Abbildung 5.13: Originalkurve für $\alpha(t)$ (schwarz, durchgezogen), Startwert (gestrichelt) und Rekonstruktion (grau). Für $q(x)$ wird das genäherte Modell verwendet, vergleiche Abbildung 5.14.

Abbildung 5.14: Die "korrekte" Funktion $q(x)$ (grau) sowie die verwendete Näherung $\tilde{q}(x)$ (schwarz).

12 Sendesignale zu rekonstruieren wären, so würde das Ergebnis schlechter ausfallen.

Abbildung 5.13 zeigt die entsprechende Rekonstruktion von $\alpha(t)$ bei Annahme einer falschen Ortsabhängigkeit $q(x)$. Das rekonstruierte Sendesignal unterscheidet sich vor allem in seiner Amplitude deutlich vom ursprünglichen Signal.

Die in Abbildung 5.15 dargestellten Rekonstruktionen zeigen jedoch, daß der Fehler bei der Rekonstruktion von $\alpha(t)$ bei falschem $q(x)$ kaum Auswirkungen auf die Rekonstruktion von $c(x)$ hat. Das mittlere Bild in Abbildung 5.15 zeigt die Rekonstruktion bei exakt vorgegebenen $\alpha(t)$ und $q(x)$, rechts oben die Rekonstruktion bei korrektem $q(x)$

Abbildung 5.15: a) Realistische Temperaturverteilung in einem Kessel mit Deckenfeuerung, b) Rekonstruktion aus Laufzeitdaten, c) Rekonstruktion mit korrektem $q(x)$ und bekanntem $\alpha(t)$, d) Rekonstruktion mit korrektem $q(x)$ und mitrekonstruiertem $\alpha(t)$ und e) Rekonstruktion mit ungenauem $q(x)$ und mitrekonstruiertem $\alpha(t)$. Für $q(x)$ wird die in Abbildung 5.14 gezeigte Näherung verwendet.

und rekonstruiertem $\alpha(t)$ und darunter die entsprechende Rekonstruktion bei falschem $q(x)$.

Der Querschnitt (Abbildung 5.15, unten) zeigt, daß die Qualität der Rekonstruktion bei mitberechnetem $\alpha(t)$ nur geringfügig schlechter ist als bei bekanntem Quellsignal $q(x)\alpha(t)$ und nach wie vor *wesentlich* besser als die Rekonstruktion aus Laufzeitdaten.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

Wir haben in Kapitel 2 gezeigt, daß die Schallausbreitung in einem Medium, das sich mit der Geschwindigkeit $v_0(x)$ bewegt, näherungsweise durch die hyperbolische Differentialgleichung

$$u_{tt}(x,t) + 2v_0(x) \cdot \nabla u_t(x,t) - c^2(x,t)\Delta u(x,t) = q(x)\alpha(t) \tag{6.1}$$

beschrieben wird.

Der Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis sowie Aussagen zur Regularität der Lösung dieser Differentialgleichung konnten in der Literatur nicht gefunden werden. Wir haben diese Grundlagen zu unserer Untersuchung daher in Kapitel 3 im Detail dargestellt und bewiesen. Weiterhin haben wir dort hergeleitet, wie aus Meßdaten, die ja immer auf der räumlich dreidimensionalen Schallausbreitung beruhen, Lösungen der zweidimensionalen Wellengleichung an den Empfängerpositionen berechnet werden können. Somit kann auch das inverse Problem in zwei Raumdimensionen gelöst werden. In geophysikalischen Anwendungen wurde durch ähnliche Transformationen die Rekonstruktion mittels „waveform inversion“ erst möglich, da dreidimensionale Rekonstruktionen mit heutigen Computern aus Rechenzeitgründen noch nicht durchführbar sind. Schließlich haben wir die Eikonalgleichung hergeleitet, deren Charakteristiken die Ausbreitung des schnellsten Teiles des Schallsignales in bewegtem Medium beschreiben.

Das inverse Problem der Rekonstruktion von Schallgeschwindigkeit und Zeitanteil der Schallquelle wurde in Kapitel 4 betrachtet. Wir haben zunächst den Zusammenhang zu aktuellen geophysikalischen Ansätzen dargestellt, um dann unser Verfahren allgemein herzuleiten. Es ist ein an die Kaczmarz-Methode angelehntes Einzelschrittverfahren, bei dem in jedem Schritt versucht wird, die aktuelle Approximation an den gesuchten Parameter so zu verbessern, daß das Residuum $R_j(f)$ zur Messung mit der j'ten Quelle möglichst verschwindet. Hierbei wird die Fréchet-Ableitungen $R_j'(f)$ verwendet. Die Existenz dieser Ableitungen wurde unter Benutzung der Regularitätsaussagen von Lösungen aus Kapitel 3 nachgewiesen, um dann mit Hilfe der L^2-Adjungierten von $R_j'(f)$ das Lösungsverfahren für die Schallgeschwindigkeit $c(x)$ explizit angeben zu können. Auch für die Zeitabhängigkeit der Quelle, $\alpha(t)$, wurde das Lösungsverfahren hergeleitet.

Schließlich haben wir in Kapitel 5 die verwendeten Finite-Differenzenverfahren für die Lösung des direkten Problems zu Gleichung (6.1) beschrieben und numerische Ergebnisse des Rekonstruktionsverfahrens dargestellt und diskutiert. Als Startbild wurden jeweils Rekonstruktionen aus reinen Laufzeitdaten verwendet (vgl. [SD96]). Wichtige Ergebnisse sind:

- Die Beachtung der Mediumsgeschwindigkeit ist zumindest bei der Rekonstruktion aus Daten von Tangentialfeuerungen unerläßlich, da die Meßdaten ansonsten nicht konsistent mit dem verwendeten Modell sind und zu sehr schlechten Ergebnissen führen. Die Rekonstruktion der Mediumsgeschwindigkeit, die mittels der Vektortomographie nur aus den Schallaufzeiten berechnet wurde (vgl. [Sie97]), reicht hierfür bereits aus. Die simultane Rekonstruktion von $c(x)$ und $v(x)$ ist daher nicht nötig.

- Selbst bei Messung mit nur acht Sendern und jeweils sieben Empfängern ist das Verfahren stabil gegenüber zufälligen Fehlern. Die Messung muß also nicht am gesamten Rand erfolgen. Diese Stabilität kann mit einfachen numerischen Tricks (Glättung der Rekonstruktionen) sicherlich deutlich verbessert werden. Solche Details sind jedoch nicht Aufgabe der vorliegenden Arbeit.

- Die Rekonstruktion der Schallquelle kann im wesentlichen bereits anhand des Startbildes aus der Laufzeitrekonstruktion durchgeführt werden. Wenn die Reproduzierbarkeit des Sendesignals der Quellen gut genug ist, muß die Quelle also nicht bei jeder Rekonstruktion von $c(x)$ neu mitbestimmt werden.

Ausblick

Das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren kann so leider noch nicht auf Meßdaten angewendet werden. Hierzu sind noch einige Hürden zu überwinden, die wir im folgenden zusammenfassen.

Zunächst setzen wir in dieser Arbeit voraus, daß sich die Bewegungsgeschwindigkeit des Mediums lokal kaum ändert. Ohne diese Voraussetzung müsste das System erster Ordnung (2.14), (2.15) anstelle der hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung (6.1) betrachtet werden. Diese Annahme kann eventuell beibehalten werden, da die Gasgeschwindigkeit viel kleiner ist als die Schallgeschwindigkeit, dies wäre jedoch noch durch einen Vergleich der Lösungen von (2.14), (2.15) und (6.1) zu überprüfen. Eine noch nicht beachtete Größe ist die Dämpfung des Schallsignals aufgrund der vorhandenen Kohlenstaubpartikel. Auch diese Größe läßt sich durch ein Rückpropagationsverfahren rekonstruieren. Schließlich ist noch zu klären, ob an den Wänden tatsächlich homogene Neumann-Randbedingungen vorliegen.

Für die simultane Rekonstruktion mehrerer Parameter sind besonders gute Meßdaten erforderlich und hier kommen weitere Probleme hinzu. Wegen des lauten Hintergrundgeräusches in der Kohlenstaubverbrennung, das vor allem durch die Kohlemühlen und die Ventilatoren gegeben ist, müssen die Signale sehr laut sein, um ein gutes Signal–Rauschverhältnis zu erhalten. Dies sorgt aber vor allem in der Nähe der Schallquellen dafür, daß die lineare Näherung bei der Herleitung in Kapitel 2, also die Annahme kleiner Schallamplituden, nicht mehr gegeben ist. Dieses Problem ist eventuell bereits dadurch gelöst, daß der Zeitanteil der Quelle mitrekonstruiert wird. Die Hoffnung besteht also, daß eine Quelle unter der Annahme linearer Schallausbreitung rekonstruiert wird, die in der Nähe der Quelle selbst falsch ist, in einiger Entfernung jedoch zu derselben Wellenausbreitung führt wie die reale nichtlineare Schallquelle. Hierdurch wird auch eine genaue Modellierung der Schallquelle überflüssig. Dies gilt aber nicht für die Empfängerseite. Da hier das Schallsignal des Kessels zunächst in einem Rohr durch die Wand und dann in einem kleinen, geschlossenen Raum zum Mikrofon geführt wird, ist eine genaue Modellierung der Empfangseinheiten nötig. Bei den Empfängern genügt dann aber die lineare Näherung der Schallausbreitung.

Schließlich ist die Umwandlung der Meßsignale von Lösungen der dreidimensionalen Wellengleichung in Lösungen der zweidimensionalen Wellengleichung in dieser Arbeit nur sehr kurz behandelt worden. Sie läßt sich möglicherweise noch für inhomogene Parameter verbessern. Insbesondere gilt sie aber nur für unbeschränkte Gebiete, die Effekte der Wände sind also noch zu korrigieren.

In dieser Arbeit wurden aus Rechenzeitgründen Sendesignale verwendet, die niederfrequenter sind als die Signale bestehender Meßgeräte. Unsere Rekonstruktionen mit 100×100 Pixeln und 350 Zeitschritten benötigten bei zehn Sweeps etwa 20 Minuten auf einer 300 MHz SPARC Ultra 60. Für 256×256 Pixel und 900 Zeitschritte sind es bereits 6 Stunden. Für die Rekonstruktionen werden dann zusätzliche Glättungen erforderlich, da die Formel für den Update die Vorwärtslösung u und die Rückpropagation z enthält und damit zwangsläufig zu sehr hochfrequenten Bildern führen muß. Hier wäre es sehr hilfreich, wenn die Meßgeräte Signale mit einem sehr breiten Frequenzspektrum erzeugen könnten.

Literaturverzeichnis

[Ada75] ADAMS, R.A.: *Sobolev Spaces.* Academic Press, Inc., 1975.

[Bao98] BAO, G.: *Smoothness between coefficients and boundary values for the wave equation.* SIAM J. Math. Anal., 29:380–394, 1998.

[BBB+97] BERTERO, M., D. BINDI, P. BOCCACCI, M. CATTANEO, C. EVA und V. LANZA: *Application of the projected Landweber method to the estimation of the source time function in seismology.* Inverse Problems, 13:465–486, 1997.

[BCL79] BAMBERGER, A., G. CHAVENT und P. LAILLY: *About the Stability of the Inverse Problem in 1-D Wave Equations - Application to the Interpretation of Seismic Profiles.* Appl. Math. Optim., 5:1–47, 1979.

[BS97] BAO, G. und W.W. SYMES: *Regularity of an Inverse Problem in Wave Propagation.* In: CHAVENT, G. und P.C. SABATIER (Herausgeber): *Inverse Problems of Wave Propagation and Diffraction*, Nummer 486 in *Lect. Notes Phys.*, Seiten 226–235. Springer, 1997. Proc. Aix-les-Bains, Frankreich, 23.-27. September 1996.

[BSZC95] BUNKS, C., F.M. SALECK, S. ZALESKI und G. CHAVENT: *Multiscale seismic waveform inversion.* Geophysics, 60:1457–1473, 1995.

[CCG98] CHAVENT, G., F. CLÉMENT und S. GÓMEZ: *Migration-based Traveltime Waveform Inversion of 2D Simple Structures: the Synclay Model.* Technischer Bericht 3502, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA), 1998.

[CH62] COURANT, R. und D. HILBERT: *Methods of Mathematical Physics, Vol. II.* Interscience Publishers, 1962.

[Cha96] CHAVENT, G.: *Duality Methods for Waveform Inversion.* Technischer Bericht 2975, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA), 1996.

[CW90] CONNOLLY, T.J. und D.J.N. WALL: *On Fréchet differentiability of some nonlinear operators occurring in inverse problems: an implicit function theorem approach.* Inverse Problems, 13:949–966, 1990.

[Der95] DERICHS, W.: *Einsatz der Schallpyrometrie zur Temperaturmessung in großen Feuerräumen.* Doktorarbeit, RWTH Aachen, 1995. Shaker Verlag 1996.

[Dor97] DORN, O.: *Das inverse Transportproblem in der Lasertomographie.* Doktorarbeit, Insitut für Numerische und instrumentelle Mathematik, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 1997. Preprints „Angewandte Mathematik und Informatik 7/97-N".

[Esk85] ESKIN, G.: *Initial Boundary Value Problem for Second Order Hyperbolic Equations with General Boundary Conditions II.* Comm. Partial Differential Equations, 10:1117–1212, 1985.

[Fol95] FOLLAND, G.B.: *Introduction to Partial Differential Equations.* Princeton University Press, Zweite Auflage, 1995.

[For84] FORSTER, O.: *Analysis 3.* Vieweg, 1984.

[GST95] GOCKENBACH, M.S., W.W. SYMES und R.A. TAPIA: *The dual regularization approach to seismic velocity inversion.* Inverse Problems, 11:501–531, 1995.

[GVT86] GAUTHIER, O., J. VIRIEUX und A. TARANTOLA: *Two-dimensional nonlinear inversion of seismic waveforms: Numerical results.* Geophysics, 51:1387–1403, 1986.

[Hör83] HÖRMANDER, L.: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III.* Nummer 274 in *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, Tokio, 1983.

[Isa98] ISAKOV, V.: *Inverse Problems for Partial Differential Equations.* Nummer 127 in *Applied Mathematical Sciences.* Springer, 1998.

[KS36] KRZYŻAŃSKI, M. und J. SCHAUDER: *Quasilineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus. Gemischte Randwertaufgaben.* Studia Math., 6:162–189, 1936.

[LM72] LIONS, J.-L. und E. MAGENES: *Non-Homogeneous Boundary Value Problems I.* Springer, 1972.

[LS91] LEWIS, R.M. und W.W. SYMES: *On the relation between the velocity coefficient and boundary value for solutions of the one-dimensional wave equation.* Inverse Problems, 7:597–631, 1991.

[MI86] MORSE, P.M. und K.U. INGARD: *Theoretical Acoustics.* Princeton University Press, 1986. Nachdruck des Originalwerkes von 1968.

[Mik78] MIKUSIŃSKI, J.: *The Bochner Integral.* Nummer 55 in *Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe.* Birkhäuser Verlag Basel, 1978.

[Miz73] MIZOHATA, S.: *The Theory of Partial Differential Equations.* Cambridge: University Press, 1973.

[MWW95] MUNK, W., P. WORCESTER und C. WUNSCH: *Ocean Acoustic Tomography.* Cambridge University Press, 1995.

[Nat86] NATTERER, F.: *The Mathematics of Computerized Tomography.* B.G. Teubner, John Wiley & Sons, 1986.

[Nat96] NATTERER, F.: *Numerical Solution of Bilinear Inverse Problems.* Technischer Bericht 19/96 N, Fachbereich Mathematik der Universität Münster, 1996.

[NSD97] NATTERER, F., H. SIELSCHOTT und W. DERICHS: *Schallpyrometrie.* In: HOFFMANN, K.-H., W. JÄGER, T. LOHMANN und H. SCHUNK (Herausgeber): *Mathematik — Schlüsseltechnologie für die Zukunft*, Seiten 435–446. Springer Verlag, 1997.

[PdRC99] PLESSIX, R.-E., Y.-H. DE ROECK und G. CHAVENT: *Waveform inversion of reflection seismic data for kinematic parameters by local optimization.* SIAM J. Sci. Comput., 20:1033–1052, 1999.

[PDT90] PICA, A., J.P. DIET und A. TARANTOLA: *Nonlinear inversion of seismic reflection data in a laterally invarian medium.* Geophysics, 55:284–292, 1990.

[Pie89] PIERCE, ALLEN D.: *Acoustics: An Introduction to its Physical Principals and Applications.* Woodbury, NY: Acoustical Society of America, 1989.

[RCD84] ROSE, J.H., M. CHENEY und B. DEFACIO: *The connection between time- and frequency-domain three-dimensional inverse scattering methods.* J. Math. Phys., 25:2995–3000, 1984.

[RE96] RYCHAGOV, M.N. und H. ERMERT: *Reconstruction of fluid motion in acoustic diffraction tomography.* J. Acoust. Soc. Am., 99:3029–3035, May 1996.

[RW94] ROUSEFF, D. und K.B. WINTERS: *Two-dimensional vector flow inversion by diffraction tomography.* Inverse Problems, 10:687–697, 1994.

[Sch80] SCHOMBERG, H.: *Nonlinear Image Reconstruction from Projections of Ultrasonic Travel Times and Electric Current Densities.* In: LINDBERG, D.A.B., P.L. REICHERTZ, G.T. HERMAN und F. NATTERER (Herausgeber): *Mathematical Aspects of Computerized Tomography, Proceedings, Oberwolfach 1980*, Band 8 der Reihe *Lecture Notes in Medical Informatics*, Seiten 270–291, 1980.

[SD95] SIELSCHOTT, H. und W. DERICHS: *Use of collocation methods under inclusion of a priori information in acoustic pyrometry.* In: BECK, M.S. ET AL. (Herausgeber): *Process Tomography - 1995, Implementation for industrial purposes*, Seiten 110–117. Manchester: UMIST, 1995.

[SD96] SIELSCHOTT, H. und W. DERICHS: *Tomography with few data: Use of collocation methods in acoustic pyrometry.* In: *ECMI '94, Student Proceedings*, Seiten 251–263, 1996. Kaiserslautern.

[Sho77] SHOWALTER, R.E.: *Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations.* Pitman Publishing Limited, 1977.

[Sie94] SIELSCHOTT, H.: *Tomographie mit wenigen Daten: Bildrekonstruktion aus Daten der Schallpyrometrie mittels Kollokationsverfahren.* Diplomarbeit, Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 1994.

[Sie97] SIELSCHOTT, H.: *Measurement of horizontal flow in a large scale furnace using acoustic vector tomography.* Flow Meas. Instrum. **8**, pp. 191-197, 1997.

[Tar84] TARANTOLA, A.: *Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation.* Geophysics, 49:1259–1266, 1984.

[Wal72] WALTER, W.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Springer Verlag, 1972.

[Wlo82] WLOKA, J.: *Partielle Differentialgleichungen: Sobolevräume und Randwertgleichungen.* B.G. Teubner Stuttgart, 1982.

[Wou77] WOUK, A.: *A Course of Applied Functional Analysis.* New York: Wiley-Interscience, 1977.

[ZCL+95] ZHOU, C., W. CAI, Y. LUO, G. SCHUSTER und S. HASSANZAHDEH: *High resolution cross-well imaging by seismic traveltime + waveform inversion.* Geophysics, 60:765–773, 1995.

[ZSHH97] ZHOU, C., G. SCHUSTER, S. HASSANZAHDEH und J.M. HARRIS: *Elastic Wave Equation Traveltime and Waveform Inversion Of Crosswell Data.* Geophysics, 62:853–867, 1997.

Anhang A

Mathematische Hilfsmittel

A.1 Verallgemeinerte Sobolevräume

Wir führen zunächst einige Hilfsmittel vor allem aus der Funktionalanalysis ein.

Bei der Untersuchung der Regularität in Abschnitt 3.1.4 werden wir Fälle betrachten, bei denen die Lösung der Wellengleichung $u(x,t)$ in den Orts- und der Zeitvariablen unterschiedlich häufig differenzierbar ist. Eine bequeme Schreibweise für Funktionen mit dieser Eigenschaft bietet die Räume $W_2^k\big((0,T);W_2^l(\Omega)\big)$, $k,l\in\mathbb{N}$. Dies sind die Sobolevräume der k-mal (verallgemeinert) differenzierbaren Funktionen mit Werten in $W_2^l(\Omega)$.

Um die Räume $W_2^k\big((0,T);W_2^l(\Omega)\big)$ definieren zu können, muß das Integral über Funktionen $f:(0,T)\to W_2^l(\Omega)$ definiert werden. Dies ist ein Spezialfall des *Bochner-Integrals*, das wir im folgenden kurz einführen. Im Anschluß betrachten wir *Distributionen mit Werten in Hilberträumen*, um schließlich die Räume $W_2^k\big((0,T);W_2^l(\Omega)\big)$ einführen zu können. Für unsere Anwendung wichtig ist dann wiederum die Isomorphie

$$\bigcap_{l=0}^{k} W_2^{k-l}\big((0,T);W_2^l(\Omega)\big) \;\cong\; W_2^k\big(\Omega\times(0,T)\big) \quad , \quad k\in\mathbb{N} \quad ,$$

die wir ebenfalls nachweisen.

Schließlich nennen wir noch einige Abschätzungen, die für die Beweise in den Abschnitten 3.1.3 und 3.1.4 benötigt werden und eine Energieabschätzung für die Lösung eines Randwertproblems der Poissongleichung.

A.1.1 Das Bochner-Integral

Wir erinnern an die Definition eines σ-finiten Maßraumes:

Es sei S eine Menge, $\mathcal{B}$ eine Klasse von Untermengen von S, den *meßbaren* Mengen und $m:\mathcal{B}\to[0,\infty]$ ein Maß auf $\mathcal{B}$. $(S,\mathcal{B})$ sei ein σ-Ring, d.h. es gelten $S\in\mathcal{B}$, mit $B\in\mathcal{B}$ ist auch $S\backslash B\in\mathcal{B}$ und die Vereinigung abzählbar vieler Elemente aus $\mathcal{B}$ liegt wiederum in $\mathcal{B}$. Das Maß m muß natürlich $m\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j\Big) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} m(B_j)$ für $B_j\in\mathcal{B}$ und $B_j\cap B_k=\emptyset$, $j\neq k$ erfüllen.

$(S, \mathcal{B}, m)$ heißt *σ-finiter Maßraum*, falls es Elemente $B_j \in \mathcal{B}$, $j \in \mathbb{N}$ gibt mit $m(B_j) < \infty$ und $S = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$.

Zum Bochner-Integral zitieren wir die wichtigsten Aussagen aus § 24 aus [Wlo82]. Zur Verkürzung setzen wir den Hilbertraum X generell als separabel voraus.

Definition A.1.1 *Seien $(S, \mathcal{B}, m)$ ein σ-finiter Maßraum und X ein separabler Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_X$ und der Norm $\|\cdot\|_X$. Die Abbildung*

$$u : S \to X$$

heißt

(a) schwach meßbar *(bezüglich $\mathcal{B}$), falls $\big(u(s), h\big)_X$ eine meßbare Zahlenfunktion bezüglich $(S, \mathcal{B}, m)$ für alle $h \in X$ ist,*

(b) abzählbarwertig, *falls* $\operatorname{im} u = \{h_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, *d.h. das Bild besteht aus abzählbar vielen Werten, und $u^{-1}(h_j) \in \mathcal{B}, \forall j \in \mathbb{N}$,*

(c) stark meßbar, *falls eine Folge u_n von abzählbarwertigen Funktionen $u_n : S \to X$ existiert mit $u_n(s) \to u(s)$ mit Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_X$ fast überall,*

(d) endlichwertig, *falls $u(s) = c_i \neq 0$ ($c_i =$const) für $s \in B_i$ und $i = 1, \ldots, k$, wobei $m(B_i) < \infty$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $u(s) = 0$ auf $S \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i$.*

Es gilt der Satz von Pettis (für separables X):

Satz A.1.2 *Die Funktion $u(s)$ ist genau dann stark meßbar, wenn sie schwach meßbar ist.*

Lemma A.1.3 *Die Funktionen $u(s)$, $v(s)$ seien schwach meßbar. Dann ist die Zahlenfunktion $\big(u(s), v(s)\big)$ meßbar.*

Lemma A.1.4 *Sei $u_n(s)$ schwach meßbar für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt $u_n(s) \rightharpoonup u(s)$ für $n \to \infty$ (schwache Konvergenz in X), so folgt: $u(s)$ ist schwach meßbar.*

Nun können für Funktionen $f : S \to X$ für $p \geq 1$ L^p-Räume definiert werden.

Definition A.1.5 *Sei* $\mathcal{M}_w(S; X) := \{f : S \to X \mid f \text{ schwach meßbar}\}$. *Dann setzen wir für $p \geq 1$*

$$L^p(S; X) := \{u \mid u \in \mathcal{M}_w(S; X); \int\limits_S \|u(s)\|_X^p \,\mathrm{d}m(s) < \infty\} \quad .$$

Es gilt

Satz A.1.6 *Für $p \geq 1$ ist $L^p(S; X)$ ein Banachraum. Bezüglich des Skalarprodukts*

$$(u, v)_{\substack{S \\ X}} := \int\limits_S \big(u(s), v(s)\big)_X \,\mathrm{d}m(s)$$

ist $L^2(S; X)$ ein Hilbertraum.

Wir führen nun das Lebesgue-Bochner Integral ein.

Definitionen und Satz A.1.7 *Sei X ein separabler Hilbertraum.*

(a) Es bezeichne E die Menge der endlichwertigen Funktionen $u : S \to X$. E ist eine lineare Menge und $E \subset L^1(S;X)$. Für $u \in E$ definieren wir

$$\int_S u(s)\,\mathrm{d}m(s) := \sum_{i=1}^{k} u_i m(B_i) \quad ,$$

wobei $\operatorname{im} u = \{u_1, \ldots, u_k, 0\}$ und $B_i = u^{-1}(u_i)$ für $i = 1, \ldots, k$ ist. Das Integral ist linear, und es gilt

$$\left\| \int_S u(s)\,\mathrm{d}m(s) \right\|_X \leq \int_S \|u(s)\|_X \,\mathrm{d}m(s) \quad .$$

(b) Wir setzen $B^1(S;X) := \overline{E}^{L^1(S;X)}$ und nennen $B^1(S;X)$ die Menge der Bochner-integrierbaren Funktionen. Für $u \in B^1(S;X)$ existiert dann eine Folge $u_k \in E$ mit $u_k \to u$ in $L^1(S;X)$ für $k \to \infty$. Wir setzen

$$\int_S u(s)\,\mathrm{d}m(s) = \lim_{k\to\infty} \int_S u_k(s)\,\mathrm{d}m(s) \quad .$$

Satz A.1.8 *Für $u \in B^1(S;X)$ gilt*

$$\left\| \int_S u(s)\,\mathrm{d}m(s) \right\|_X \leq \int_S \|u(s)\|_X \,\mathrm{d}m(s) \quad .$$

Es ist $B^1(S;X) = L^1(S;X)$, das heißt die Funktion $u(s)$ ist genau dann Bochner-integrierbar, wenn die Zahlenfunktion $\|u(s)\|_X$ integrierbar ist.

Satz A.1.9 *Sei $u \in L^p(B;X)$ für $p > 1$ und $m(B) < \infty$. Dann gilt $u \in L^1(B;X)$ und auch $\chi_B \cdot u \in L^1(S;X)$.*

Bis hierhin haben wir Aussagen aus § 24 aus [Wlo82] zitiert. Wloka formuliert nicht den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, daher übernehmen wir diesen aus [Mik78, Chapter XIII], Theorem 2.3:

Satz A.1.10 *Die Funktion $g : (a,b) \to X$ sei stetig im Intervall (a,b) und $G : [a,b] \to X$ sei stetig in $[a,b]$ mit $G' = g$ in (a,b). Dann existiert das Bochner-Integral $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ und es gilt*

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a) \quad .$$

A.1.2 Distributionen mit Werten in Hilberträumen

Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Wir verwenden die übliche Bezeichnung $\mathcal{D}(G) = C_0^\infty(G)$. Die folgenden Aussagen sind aus § 25 aus [Wlo82] zitiert.

Definition A.1.11 *Seien G offen in $\mathbb{R}^n$ und X ein Hilbertraum. Wir betrachten eine lineare Abbildung $T : \mathcal{D}(G) \to X$. Die Anwendung von T auf ein $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ bezeichnen wir wie üblich mit $<T, \varphi>$. Man beachte jedoch, daß T kein Funktional ist, sondern Werte in X annimmt. Die Abbildung T heißt* Distribution aus $\mathcal{D}'(G, X)$, *falls gilt: Zu jedem Kompaktum $K \subset\subset G$ gibt es Konstanten $p, c \geq 0$ mit*

$$\|<T, \varphi>\|_X \leq c \cdot \sup_{x \in K} \sum_{|s| \leq p} |D^s \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(G) \text{ mit } \operatorname{supp} \varphi \subset K \quad .$$

Definition A.1.12 *(a) Die Ableitung $D^s T$, $s = (s_1, \ldots, s_n)$ mit $s_i \in \mathbb{N}$, einer Distribution T ist definiert durch*

$$<D^s T, \varphi> := (-1)^{|s|} <T, D^s \varphi> \quad .$$

(b) Sei T_n eine Folge von Distributionen aus $\mathcal{D}'(G; X)$ und $T \in \mathcal{D}'(G; X)$. Wir definieren: $T_n \to T$ in $\mathcal{D}'(G; X)$ für $n \to \infty$ bedeutet, daß für alle $\varphi \in D(G)$ gilt

$$<T_k, \varphi> \ \to \ <T, \varphi> \text{ in } X \text{ für } k \to \infty \quad .$$

Satz A.1.13 *(a) Aus $T \in \mathcal{D}'(G; X)$ folgt $D^s T \in \mathcal{D}'(G; X)$.*

(b) Falls gilt $T_k \to T$ in $\mathcal{D}'(G; X)$ für $k \to \infty$, dann gilt auch $D^s T_n \to D^s T$ in $\mathcal{D}'(G; X)$ für $k \to \infty$.

Wie üblich ordnen wir lokal integrierbaren Funktionen $f : G \to X$ eine Distribution T_f zu durch

$$<T_f, \varphi> := \int_G f(x) \varphi(x) \, \mathrm{d}x, \quad \varphi \in \mathcal{D}(G) \quad .$$

Das Integral ist hierbei als Bochner-Integral zu verstehen.

Satz A.1.14 *Es gilt $L^2(G; X) \subset \mathcal{D}'(G; X)$ und die Einbettung ist injektiv und stetig.*

Satz A.1.15 *Seien X_1, X_2 Hilberträume mit $X_1 \hookrightarrow X_2$, und die Einbettung sei stetig. Dann gilt $\mathcal{D}'(G; X_1) \hookrightarrow \mathcal{D}'(G; X_2)$ und die Einbettung ist stetig.*

A.1.3 Die Räume $W_2^1\big((0,T)\big)$ und $W_2^k\big((0,T);V\big)$

Auch die Aussagen in diesem Abschnitt entstammen – mit Ausnahme von Definition A.1.19 – § 25 aus [Wlo82].

Nun sei $G = (0,T)$ mit $0 < T < \infty$ und X und V seien separable Hilberträume derart, daß

$$V \hookrightarrow X \hookrightarrow V'$$

einen Gelfandschen Dreier bildet. Der Raum V' ist nach Satz 17.3 in [Wlo82] ebenfalls ein Hilbertraum. Für $f \in L^2\big((0,T);V\big)$ gilt wegen Satz A.1.14

$$f \in \mathcal{D}'\big((0,T);V\big) \quad ,$$

woraus mit Satz A.1.15 folgt

$$\frac{\partial f}{\partial t} \in \mathcal{D}'\big((0,T);V\big) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial t} \in \mathcal{D}'\big((0,T);V'\big) \quad .$$

Definition A.1.16 *Wir definieren*

$$W_2^1\big((0,T)\big) := \left\{ f \mid f \in L^2\big((0,T);V\big), \frac{\partial f}{\partial t} \in L^2\big((0,T);V'\big) \right\} \quad .$$

Das Skalarprodukt auf $W_2^1\big((0,T)\big)$ sei definiert durch

$$(f,g)_W := \int_0^T \big(f(t),g(t)\big)_V \,\mathrm{d}t + \int_0^T \left(\frac{\partial f(t)}{\partial t}, \frac{\partial g(t)}{\partial t}\right)_{V'} \mathrm{d}t \quad .$$

Satz A.1.17 *Der Raum $W_2^1\big((0,T)\big)$ ist ein Hilbertraum.*

Satz A.1.18 *Alle Funktionen aus $W_2^1\big((0,T)\big)$ sind stetig mit Werten in X; genauer gesagt: aus $f \in W_2^1\big((0,T)\big)$ folgt*

$$f : [0,T] \to X \quad \text{ist stetig.}$$

In Definition 27.1 beschreibt Wloka in [Wlo82] die Sobolevräume $W_2^k\big((0,T);V\big)$, $k \in \mathbb{N}$, in denen wir Lösungen unseres hyperbolischen Problems suchen:

Definition A.1.19 *Sei V ein Hilbertraum mit Norm $\|\cdot\|_V$. Unter dem Sobolev-Raum $W_2^k\big((0,T);V\big)$, $k \in \mathbb{N}$, verstehen wir die Gesamtheit der meßbaren Funktionen*

$$u : (0,T) \to V$$

mit

$$\frac{\partial^i u}{\partial t^i} \in L^2\big((0,T);V\big) \quad \text{für } 0 \le i \le k \quad ,$$

wobei die Ableitung im Distributionssinn gemeint ist.

Das Skalarprodukt in $W_2^k\big((0,T);V\big)$ sei gegeben durch

$$(u,v)_{\substack{k,2,(0,T)\\V}} := \int_0^T \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial^i u(t)}{\partial t^i}, \frac{\partial^i v(t)}{\partial t^i}\right)_V \mathrm{d}t$$

und damit erhalten wir für die zugehörige Norm

$$\|u\|^2_{\substack{k,2,(0,T)\\V}} = \int_0^T \sum_{i=0}^k \left\|\frac{\partial^i u(t)}{\partial t^i}\right\|_V^2 \mathrm{d}t \quad .$$

Wir merken an, daß $W_2^k\big((0,T);V\big)$ für $k \in \mathbb{N}$ ein Hilbertraum ist.

A.2 Weitere Hilfsaussagen

Für den Beweis von Satz 3.1.7 benötigen Satz 9.1 aus [Wlo82]:

Satz A.2.1 *Sei X ein Hilbertraum. Die Folge $x_n \in X$ sei beschränkt, $\|x_n\|_X \leq K$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine Teilfolge $x_{n'}$, die schwach gegen ein Element $x \in X$ konvergiert und es gilt $\|x\|_X \leq K$.*

Wir übernehmen das Lemma von Gronwall im wesentlichen in der Formulierung von Lemma 29.2 aus [Wlo82]. Wir benötigen es nur für differenzierbares g.

Lemma A.2.2 (Gronwall) *Seien $g(\tau) \in C^1[0,T]$, $v(\tau) \in C[0,T]$ und $0 \leq h(\tau) \in L^1\big((0,T)\big)$. In $[0,T]$ gelte*

$$v(\tau) \leq g(\tau) + \int_0^\tau h(t)v(t)\,\mathrm{d}t \quad .$$

Dann ist in $[0,T]$

$$v(\tau) \leq e^{H(\tau)}\left(g(0) + \int_0^\tau g'(t)e^{-H(t)}\,\mathrm{d}t\right) \quad ,$$

mit $H(\tau) = \int_0^\tau h(t)\,\mathrm{d}t$.

Mit $g(\tau) = 0$ und $h(\tau) = c$ ergibt sich das

Korollar A.2.3 *Seien $v(\tau) \in C[0,T]$ mit $v(\tau) \geq 0$, $c \geq 0$ und*

$$v(\tau) \leq c\int_0^\tau v(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für } t \in [0,T] \quad .$$

Dann gilt $v(\tau) = 0$ in $[0,T]$.

Wir zitieren den Satz von Gauß nach [For84].

Satz A.2.4 *Satz von Gauß*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Teilmenge mit stetig differenzierbarem Rand und $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ die äußere Normale. Ist noch $f \in C^1(\bar{\Omega})$, so gilt:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = \int\limits_{\partial\Omega} f \nu_i \, \mathrm{d}\sigma \quad .$$

Der Satz ist auch gültig, wenn $\partial\Omega$ niederdimensionale Singularitäten, etwa Ecken hat, vgl. [For84, §15].

Korollar A.2.5 *Sei Ω ein Gebiet, in dem der Satz von Gauß gilt und $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ sei die äußere Normale.*

(i) Für $u, v \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ gilt:

$$\int\limits_{\Omega} v \nabla u \, \mathrm{d}x = \int\limits_{\partial\Omega} u v \nu \, \mathrm{d}\sigma - \int\limits_{\Omega} u \nabla v \, \mathrm{d}x \quad . \tag{A.1}$$

(ii) Für $u \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$, $w \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\int\limits_{\Omega} w \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x = \int\limits_{\partial\Omega} u \, w \cdot \nu \, \mathrm{d}\sigma - \int\limits_{\Omega} u \, \nabla \cdot w \, \mathrm{d}x \quad . \tag{A.2}$$

Preprints
"Angewandte Mathematik und Informatik"

20/99 - I	L. Becker, S. Hammelbeck, K. Hinrichs: Towards a Spatio-Temporal Database Kernel - From Timestamped to Moving Objects.
21/99 - S	D. Plachky: An Ideal Theoretic Characterization of Finite Sets, Finite Algebras, and Sigma-Algebras of Countably Generated Type.
22/99 - S	N. Schmitz: Remark on the General S_n/n-Problem.
23/99 - I	H. Giese: Contract-based Component System Design.
24/99 - S	D. Plachky, J. Roters: On the Rank of Functions: A Statistical Approach.
25/99 - S	G. Alsmeyer: Recurrence Theorems for Markov Random Walks.
1/00 - S	D. Plachky: Analytical Solutions of some Geometric Optimization Problems based on Convex Functions.
2/00 - S	M. Wrede, N. Schmitz: Variations of the Cox-Ross-Rubinstein Model.
3/00 - I	Giese, H.: Synchronization Behavior Typing for Contracts in Component-based Systems.
4/00 - I	Giese, H., Graf, J.: Objektorientierte Modellierung verteilter Systeme. Modellierungsbeispiele aus dem gleichnamigen Seminar an der Westfälischen Wilhelms-Universität im Wintersemester 1999/2000.
5/00 - I	Weske, M., Kuropka, D.: A Flexible Persistent Storage Service for Object-Oriented Middleware.
6/00 - I	Weske, M.: Foundation, Design, and Implementation of Dynamic Adaptations in a Workflow Management System.
7/00 - S	D. Plachky: Bemerkenswertes und Merkwürdiges über Potenzsummen.
8/00 - I	Giese, H., Wirtz, G.: Early Evaluation of Design Options for Distributed Systems.
9/00 - I	Lechtenbörger, J., Shu, H., Vossen, G.: Aggregate Queries over Conditional Tables.
10/00 - I	Hüsemann, B., Lechtenbörger, J., Vossen, G.: Conceptual Data Warehouse Design.
11/00 - S	Alsmeyer, G.: Limit Theorems for Iterated Random Functions by Regenerative Methods.
12/00 - S	Alsmeyer, G.: On the Harris Recurrence of Iterated Random Lipschitz Functions and Related Convergence Rate Results.
13/00 - S	Alsmeyer, G.: The Minimal Subgroup of a Random Walk.
14/00 - I	Becker, L., Hammelbeck, S., Hinrichs, K.H.: Design and Implementation of an Interoperable GIS-Interface for Grid Data.
15/00 - N	Sielschott, H.: Rückpropagationsverfahren für die Wellengleichung in bewegtem Medium.