



Mathematische Modelle der Meinungsbildung

Diplomarbeit

Institut für Numerische und Angewandte Mathematik

eingereicht von

Lisa Richter

Betreuer

Prof. Dr. Martin Burger

Münster, 11. Mai 2010

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt an dieser Stelle meinem Betreuer Prof. Dr. Martin Burger für die umfangreiche Unterstützung bei der Erstellung meiner Diplomarbeit und die stets schnelle Beantwortung meiner Fragen.

Zudem möchte ich meinen Eltern danken, die mir dieses Studium durch ihre finanzielle und moralische Unterstützung überhaupt erst ermöglicht haben.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Die Modelle	3
2.1	Das Voter-Modell	3
2.2	Das Sznajd-Modell	5
2.2.1	Das Modell	5
2.2.2	Monte-Carlo-Simulation	7
2.2.3	Modifikationen des ursprünglichen eindimensionalen Sznajd-Modells und deren Folgen	9
2.2.3.1	Information Noise	9
2.2.3.2	Ein modifiziertes eindimensionales Sznajd-Modell	10
2.2.3.3	Mehr Dimensionen, mehr Meinungen	10
2.2.3.4	Eine Erweiterung des binären Sznajd-Modells zu einer steti- gen Version	11
2.2.3.5	Phasenübergang	14
2.2.3.6	Frustration und simultanes Update	15
2.2.3.7	Das Sznajd-Modell auf einem vollständigen Graphen mit dis- kreten Meinungen	15
2.3	Zusammenhänge zwischen dem Sznajd- und dem Voter-Modell	18
2.4	Galams Modell	21
2.5	Die Modelle von Hegselmann-Krause und Deffuant-Weisbuch	25
2.5.1	Prozess der Meinungsbildung bei Hegselmann-Krause	26
2.5.2	Die Simulation des HK-Modells	26
2.5.3	Erweiterungen und Modifikationen des HK-Modells	27
2.5.3.1	Das HK-Modell mit diskreten Meinungen	27
2.5.4	Prozess der Meinungsbildung bei Deffuant-Weisbuch	29
2.5.5	Die Simulation des DW-Modells	29
2.5.6	Erweiterungen und Modifikationen des DW-Modells	30
2.5.6.1	Soziale Netzwerke im DW-Modell	30

2.5.6.2	Anwesenheit weniger Extremisten im DW-Modell	30
2.5.7	Gemeinsame Erweiterungen der Modelle von Hegselmann-Krause und Weisbuch-Deffuant	31
2.5.7.1	Die dichtebasierten Modelle von HK und DW	31
2.5.7.2	Heterogene Vertrauensschranken	35
2.5.7.3	Multidimensionale stetige Meinungsdynamiken	38
2.5.7.4	Die Simulationen von Meinungen im HK- und DW-Modell und deren Reaktionen auf extreme Ereignisse	40
2.6	Ein Modell mit Diffusion	43
3	Herleitungen im Rahmen des DW-Modells	49
3.1	Das ursprüngliche DW-Modell	49
3.1.1	Erste Herleitung	49
3.1.2	Zweite Herleitung	55
3.2	Ein erweitertes DW-Modell	56
4	Stationäre Lösungen des ursprünglichen DW-Modells	59
5	Numerische Simulation	61
6	Zusammenfassung und Ausblick	69
	Literaturverzeichnis	71

Abbildungsverzeichnis

5.1	Numerische Simulation des DW-Modells mit gleichmäßig verteilten Anfangswerten auf $[-2; 2]$, $\mu = 0.3$, $\epsilon = 0.9$	63
5.2	Numerische Simulation des DW-Modells mit gleichmäßig verteilten Anfangswerten auf $[-2; 2]$, $\mu = 0.3$, $\epsilon = 0.3$	64
5.3	Numerische Simulation des DW-Modells mit gleichmäßig verteilten Anfangswerten auf $[-2; 2]$, $\mu = 0.3$, $\epsilon = 0.05$	65
5.4	Numerische Simulation des DW-Modells mit gleichmäßig verteilten Anfangswerten auf $[-2; 2]$, $\mu = 0.3$, $\epsilon = 0.04$	66
5.5	Numerische Simulation des DW-Modells mit gleichmäßig verteilten Anfangswerten auf $[-2; 2]$, $\mu = 0.3$, $\epsilon = 0.035$	67

Kapitel 1

Einleitung

In den letzten Jahren ist das Interesse an der Soziophysik immer mehr gewachsen. Diese besagt, dass für soziale Phänomene in einer Gesellschaft Analogien in der Physik gesucht werden, um das zwischenmenschliche Verhalten in Modellen zu beschreiben und zu analysieren. Beispiele hierfür sind interagierende Partikelsysteme und agentenbasierte Modelle. [5] Einen Teil dieser sozialen Phänomene stellt die Meinungsbildung in einer Gesellschaft dar, die in vielen Bereichen des menschlichen Lebens eine Rolle spielt, wie beispielsweise bei Wahlen, politischen Diskussionen, Einschätzung von Märkten oder allgemein Entscheidungsfindungen. Dort wird für bestimmte Belange oft ein Konsens erwünscht. Da anfangs alle Teilnehmer, im Folgenden Agenten genannt, eine unabhängige Meinung besitzen, ist es wichtig, dass alle Agenten ihre Informationen und Standpunkte austauschen. Auf welche Art und Weise hängt von den jeweiligen Anwendungen bzw. dem jeweiligen Modell ab. Durch diesen Prozess ändern die Agenten ihre Meinungen und es kann sich ein gemeinsamer Standpunkt entwickeln. Es können allerdings auch mehrere Meinungen nebeneinander existieren und bestehen bleiben, zum Beispiel falls die Meinungsgruppen zu weit voneinander entfernt liegen, um noch weiterhin miteinander zu interagieren.

In der vorliegenden Diplomarbeit erfolgt in Kapitel 2 eine Darstellung der verschiedensten Modelle aus dem Bereich der Meinungsbildung. Außerdem werden sowohl einige Zusammenhänge der Modelle als auch Unterschiede zwischen diesen herausgearbeitet. Dabei werden die drei bekanntesten Modelle von Sznajd-Weron, Hegselmann-Krause und Deffuant-Weisbuch besonders hervorgehoben. Das Sznajd-Modell gehört zu den diskreten Meinungsbildungsmodellen, wobei sich diskret auf die Meinungen bezieht, die in einem vorgegebenen Meinungsraum angesiedelt werden. Im Falle des ursprünglichen Sznajd-Modells hat dieser die binäre Form $\{-1, 1\}$. Das Hegselmann-Krause-Modell (HK-Modell) und das Deffuant-Weisbuch-Modell (DW-Modell) sind sich recht ähnlich und gehören zu den stetigen Modellen. Meist wird hier der Einfachheit halber der Meinungsraum $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ zugrunde gelegt. Dabei ist zu beachten, dass nur Agenten mit ähnlichen Meinungen interagieren. In Erweiterungen und Modifikationen der einzelnen Modelle werden aber unter anderem auch das Sznajd-Modell für stetige Meinungen und umgekehrt das HK- und DW-Modell für diskrete Meinungen betrachtet.

Alle Modelle besitzen verschiedene Update-Verfahren der einzelnen Meinungen innerhalb eines Zeitschritts. Ziel ist es einen stationären Zustand zu erlangen, in dem die Meinungen sich nicht mehr ändern und Aussagen über die Entwicklung der Meinungen gemacht werden können. Welche Ergebnisse wünschenswert sind, hängt ganz von der Anwendung und Interpretation des Modells ab. Beispielsweise wurde das Sznajd-Modell benutzt, um brasilianische Wahlen zu modellieren. Es ist empirisch gezeigt worden, dass die Verteilung der Stimmen pro Kandidat einem Potenzgesetz folgt. Dieses Ergebnis ist in einer Untersuchung basierend auf dem Sznajd-Modell nachgebildet worden. [25]

Die Entwicklung der Meinungen abhängig von der Zeit lässt sich mittels gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen beschreiben, was zum Teil auch erfolgt. In Kapitel 3 werden anhand des DW-Modells und einer Erweiterung des DW-Modells die jeweiligen partiellen Differentialgleichungen zur Beschreibung der Dynamiken der zeitlichen Veränderung der Meinungsdichte auf zwei verschiedene Arten hergeleitet.

Die meisten Ergebnisse basieren auf numerischen Simulationen der Modelle. Trotzdem ist auch die analytische Betrachtungsweise nicht zu vernachlässigen. Deshalb erfolgt in Kapitel 4 die Berechnung stationärer Lösungen des ursprünglichen DW-Modells anhand der in Kapitel 3 hergeleiteten Differentialgleichung. In Kapitel 5 werden zusätzlich numerische Simulationen für dieses Modell präsentiert.

Kapitel 2

Die Modelle

2.1 Das Voter-Modell

Eines der ersten Meinungsbildungsmodelle, das auf einem zellularen Automaten basiert [3], ist das sogenannte Voter-Modell (VM). Es ist ein einfaches binäres System, das N Wähler oder Agenten beinhaltet [24]. Jeder Wähler kann einen von zwei Zuständen $\theta_i \in \{0, 1\}$ annehmen, wobei θ_i für die Meinung oder Gesinnung von Agent $i \in 1, 2, \dots, N$ steht. Die Agenten sind auf einem zweidimensionalen Gitter angeordnet, sodass jeder Agent $n = 4$ direkte Nachbarn besitzt. Auch andere soziale Netzwerke sind möglich, in denen die Agenten eine andere Anzahl an direkten Nachbarn besitzen. Die Dynamiken des Voter-Modells sind durch die folgende Updaterregel gegeben [24]: Es wird zufällig ein Wähler $i \in 1, 2, \dots, N$ auf dem Gitter ausgewählt. Dieser übernimmt die Meinung eines ebenfalls zufällig ausgewählten Nachbarn j . Nach N solchen Updates steigt die Zeit um eine Einheit an.

Die Übergangswahrscheinlichkeit von einem Zustand in den anderen hängt im VM von den Häufigkeiten dieser Zustände in der unmittelbaren Nachbarschaft ab. [24] Es wird angenommen, dass die Übergangswahrscheinlichkeit $\omega(\theta, \theta')$ von Zustand θ' zu Zustand θ proportional zu der lokalen Häufigkeit f_θ von Zustand θ ist.

Sei $\underline{\theta}_i$ die lokale Besetzung von Wähler i und definiert durch [24]

$$\underline{\theta}_i = \{\theta_{i_1}, \theta_{i_2}, \dots, \theta_{i_n}\},$$

wobei i_j die direkten Nachbarn von Wähler i sind. Aufgrund des quadratischen Gitters gilt hier $n = 4$. Eine spezielle Realisierung dieser Verteilung sei gegeben durch [24]

$$\underline{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\},$$

wobei $\sigma_j \in \{0, 1\}$.

Die Wahrscheinlichkeit einen Wähler mit einem gegebenen Zustand σ aus der Nachbarschaft i_j von Wähler i zu wählen ist direkt proportional zu der relativen Anzahl (oder Häufigkeit) an

Wählern mit diesem Zustand in der entsprechenden Nachbarschaft. [24] Sei die lokale Häufigkeit in der Nachbarschaft von Wähler i gegeben durch [24]

$$f_i^\sigma = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{\sigma, \theta_{i_j}} ; f_i^{1-\sigma} = 1 - f_i^\sigma ,$$

wobei δ_{xy} das Kronecker-Delta ist, das eins ist für $x = y$ und ansonsten null. Somit hängt die Übergangswahrscheinlichkeit von Wähler i , dass dieser seine Meinung θ_i ändert, nicht explizit von der lokalen Verteilung θ_i ab, sondern nur von der Häufigkeit f_i^σ . [24] Je größer die Häufigkeit eines gegebenen Zustands in der Nachbarschaft eines Wählers ist, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser diesen Zustand annimmt, falls er den Zustand nicht schon innehat. Die Übergangswahrscheinlichkeit $\omega(1 - \theta_i | \theta_i = \sigma, f_i^\sigma)$ den Zustand zu ändern steigt nur im Zusammenhang mit der lokalen Häufigkeit des entgegengesetzten Zustands, $f_i^{1-\sigma}$. Es gilt [24]

$$\omega(1 - \theta_i | \theta_i = \sigma, f_i^\sigma) = \gamma f_i^{1-\sigma} ,$$

wobei γ die Zeitskala der Übergänge bestimmt und $\gamma = 1$ gesetzt wird. Da die Wahrscheinlichkeit den Zustand zu ändern direkt proportional zu der Häufigkeit ist, spricht man auch von einem linearen Voter-Modell. [24]

Dies besitzt zwei bemerkenswerte Eigenschaften. Zum einen erreicht das System immer einen komplett geordneten Zustand oder auch Konsens, unabhängig davon mit welcher zufälligen Anfangsverteilung der Zustände begonnen wird. [24] Im Fall von nur zwei Zuständen haben im Endzustand entweder alle Meinung 0 oder alle Meinung 1. Welcher der beiden Attraktoren durch die Dynamiken erreicht wird hängt neben den stochastischen Schwankungen von der anfänglichen globalen Häufigkeit eines Zustands ab. [24] Dabei gilt für genügend viele Durchgänge mit der gleichen Anfangsverteilung, dass die Häufigkeit eines Konsens für eine bestimmte Meinung im Endzustand gleich der anfänglichen Häufigkeit dieser Meinung ist. Die andere hervorzuhebene Eigenschaft des linearen Voter-Modells ist die Erhaltung der sogenannten Magnetisierung, die definiert ist durch [24]

$$m(t) = \frac{N_1 - N_0}{N} ,$$

wobei N_0 die Anzahl der Agenten mit Meinung 0 ist und N_1 entsprechend die Anzahl der Agenten mit Meinung 1. Diese gibt in Abhängigkeit von der Zeit an zu welcher Meinung die Gemeinschaft tendiert. Im Falle eines Konsens gilt $|m| = 1$. [24]

Interessant ist daher nur noch die Frage wie lange das System braucht, den Endzustand zu erreichen. Diese Zeit T_k heißt auch Relaxationszeit und ist abhängig von der Systemgröße N und dem jeweiligen Netzwerk. [24] T_k wird mittels des Durchschnitts über viele Realisationen ermittelt. Für ein eindimensionales Gitter ($d=1$) gilt zum Beispiel $T_k \propto N^2$ und für ein zweidimensionales Gitter $T_k \propto N \log N$. [24] Für $d > 2$ erreicht das System nicht immer einen geor-

deneten Zustand im thermodynamischen Grenzwert. Ist das System aber endlich, gilt $T_k \approx N$. [24]

Jedoch hat das System auch einige Nachteile. Die „Wähler“ wählen nicht, sondern ihnen wird zufällig eine Meinung ohne irgendeine Wahlmöglichkeit zugeordnet. [24] In einem sozialen Kontext ist dies relativ unrealistisch. Außerdem spielt der aktuelle Zustand des jeweiligen Wählers bei dessen Meinungsbildung keine Rolle. Um diesen zu berücksichtigen, kann man dessen Meinung θ_i unter der Notation $\theta_i \equiv \theta_{i_0}$ mit in die lokale Häufigkeit f_i^σ einfließen lassen. [24] Dadurch wird die Übergangswahrscheinlichkeit in einen anderen Zustand zu wechseln verringert, da der aktuelle eigene Zustand auch ins Gewicht fällt. Trotzdem verändern sich die Dynamiken durch diesen Zusatz nicht signifikant. [24]

Neben dem linearen Voter-Modell gibt es auch den nichtlinearen Fall. Dort werden andere Abhängigkeiten von der Häufigkeit als die proportionale in Betracht gezogen. [24] Dazu lässt man zusätzlich einen Vorfaktor κ mit in die Übergangswahrscheinlichkeit einfließen, $\omega(1 - \theta_i | \theta_i = \sigma, f_i^\sigma) = \kappa(f) f_i^{1-\sigma}$. [24] Diese von der Häufigkeit abhängige Funktion κ ist nichtlinear und beschreibt wie der Wähler i auf entgegengesetzte Meinungen in seiner unmittelbaren Nachbarschaft reagiert. [24] Damit kann zum Beispiel auch „wählen gegen den Trend“ simuliert werden.

Im nichtlinearen Voter-Modell wird nicht immer ein Konsens erreicht, sondern es können auch andere Endzustände eintreten, wie zum Beispiel die Koexistenz beider Zustände. [24]

2.2 Das Sznajd-Modell

2.2.1 Das Modell

Das ursprüngliche Sznajd-Modell ist ein eindimensionales Ising-Spin-Modell mit periodischen Randbedingungen [3]. Aufgestellt wurde es von Sznajd-Weron und Sznajd [28]. Es stellt eine einfache Methode dar, um Entscheidungen in einer geschlossenen Gesellschaft darzustellen. Jeder Spin (oder jede Gitterseite eines eindimensionalen Gitters) $i = 1, \dots, N$ kann einen von zwei Zuständen $\theta_i \in \{-1, +1\}$ annehmen [3]. Im hier behandelten Fall von Meinungsbildung stehen die Spins für die Agenten und die Spinzustände Spin-Up und Spin-Down für die zwei entgegengesetzten Meinungen.

Schritt für Schritt wird zufällig ein Pärchen von benachbarten Agenten ausgewählt, das mit einer der folgenden Dynamikregeln ihre beiden benachbarten Agenten beeinflusst [3]:

- Gilt für die Agenten i und $i + 1$ $\theta_i \theta_{i+1} = 1$, so haben beide die gleiche Meinung und ihre Nachbarn $i - 1$ und $i + 2$ übernehmen die Meinung des Paares $\{i, i + 1\}$. Es gilt $\theta_{i-1} = \theta_i = \theta_{i+1} = \theta_{i+2}$. (Regel 1)
- Gilt für die Agenten i und $i + 1$ $\theta_i \theta_{i+1} = -1$, so sind die Meinungen beider entgegengesetzt und ihre Nachbarn $i - 1$ und $i + 2$ übernehmen jeweils die Meinung des zweitnächsten

Nachbarn. Es gilt $\theta_{i-1} = \theta_{i+1}$ und $\theta_{i+2} = \theta_i$. (Regel 2)

Die Regeln besagen, dass mehrere Menschen mit der gleichen Meinung leichter andere Menschen überzeugen können als einer alleine. Aus diesem Grund hieß dieses Modell ursprünglich auch „united we stand, divided we fall“.

Nach mehreren sequentiellen Durchgängen erhält man so eine Differenz $m(t) = f_+ - f_-$ von Wählern für Meinung -1 und Meinung $+1$ abhängig von der Zeit, wobei $f_+ = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{+1;\theta_i}$ und $f_- = 1 - f_+$ gilt [3]. Diese wird, wie auch im Voter-Modell (2.1), Magnetisierung genannt. Ziel ist es, die zeitliche Entwicklung von m zu analysieren.

Man nimmt an, dass es für den Grenzwertfall $t \rightarrow \infty$ drei Fälle gibt, welche die stabilen Zustände des Sznajd-Modells sein sollen [28]:

1. alle Agenten der Gemeinschaft wählen Meinung -1 ,
2. alle Agenten der Gemeinschaft wählen Meinung $+1$,
3. 50% der Agenten wählen Meinung -1 und 50% der Agenten wählen Meinung $+1$.

Die Zustände (i) und (ii) kann man auch mit Ferromagnetismus in Verbindung bringen und Zustand (iii) dementsprechend mit Antiferromagnetismus [3], was sich auf die Ausrichtung der Spins bezieht. Im ferromagnetischen Fall ist diese Ausrichtung parallel und im antiferromagnetischen Fall ein konstanter, von null verschiedener Drehwinkel.

Diese drei Zustände treten mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten ein [3]:

- 1. mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.25$
- 2. mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.25$
- 3. mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.5$,

die sich wie folgt ergeben [3]: Man betrachtet ein Gitter der Größe N mit periodischen Randbedingungen und einer beliebigen Anfangsverteilung von -1 und $+1$. Somit gibt es N verschiedene Paare $\{i, i + 1\}$. Die Anfangswahrscheinlichkeit entweder ein ferromagnetisches oder ein antiferromagnetisches Paar zu finden summiert sich zu 0.5, da es nur folgende vier Möglichkeiten für die Meinungsverteilung eines Paares gibt: Beide haben Meinung -1 , beide haben Meinung $+1$, der linke Agent hat Meinung -1 und der rechte Agent Meinung $+1$ oder umgekehrt. Es folgt also:

$$p_f = p_{+1,+1} + p_{-1,-1} = 0.5; \quad p_{af} = p_{-1,+1} + p_{+1,-1} = 0.5; \quad p_f + p_{af} = 1 \quad (2.1)$$

Doch was ist die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Anzahl an ferromagnetischen und antiferromagnetischen Paaren im Laufe der Zeit? Man kann annehmen, dass sich die Anfangsverteilung während der ersten q Schritte nicht groß verändert. Damit bleibt (2.1) zunächst gültig und

die Wahrscheinlichkeit während der ersten q Schritte genau k -mal ein antiferromagnetisches Paar zu bekommen wird durch $\binom{q}{k} p_{af}^k p_f^{q-k}$ gegeben. Nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$\sum_{k=0}^q \binom{q}{k} p_{af}^k p_f^{q-k} = 1,$$

wobei über jede mögliche Anzahl k an antiferromagnetischen Paaren während der ersten q Schritte summiert wird.

Werden während der ersten q Schritte mehr als $q/2$ antiferromagnetische Paare gewählt, so steigt p_{af} , da jede Wahl eines antiferromagnetischen Paares zu zwei neuen antiferromagnetischen Paaren führt. Der Fall für die Wahl von ferromagnetischen Paaren kann genauso behandelt werden. Für q gerade ist dann die Wahrscheinlichkeit durch folgende Gleichung gegeben:

$$\sum_{k=(q/2)+1}^q \binom{q}{k} p_{af}^k p_f^{q-k} + \frac{1}{2} \binom{q}{q/2} p_{af}^{q/2} p_f^{q/2} = 0.5 \quad (2.2)$$

wobei der erste Term für die Wahrscheinlichkeit steht, dass mehr als $q/2$ antiferromagnetische Paare gezogen werden bei q Schritten, und der zweite Term für die Wahrscheinlichkeit, dass genau $q/2$ antiferromagnetische Paare gezogen werden. Daraus kann man schließen, dass für das System die Wahrscheinlichkeit bei 0.5 liegt den antiferromagnetischen Zustand zu erreichen.

Gleichung (2.2) ist solange gültig wie $p_f = p_{af} = 0.5$ gilt für $t \leq q$. Nach dieser anfänglichen Zeitspanne geht die Symmetrie jedoch verloren und die System-Dynamik nimmt mit Wahrscheinlichkeit 1 einen der möglichen ferromagnetischen oder antiferromagnetischen Zustände an.

2.2.2 Monte-Carlo-Simulation

Man betrachtet nun eine Kette von N Spins $(\theta_i, i = 1, 2, \dots, N)$ [28]. Anfangs sind die beiden Meinungen $\theta_i \in \{-1, +1\}$ beliebig auf die N Agenten verteilt. Schritt für Schritt wird das zuvor erläuterte Modell angewandt. Als Endzustand erhält man einen der drei ferromagnetischen und antiferromagnetischen Zustände mit den oben angegebenen Wahrscheinlichkeiten.

Die typische Relaxationszeit für $N = 1000$ liegt bei ungefähr 10^4 Monte-Carlo-Schritten (MCS) [28]. Das heißt, dass nach dieser Zeit das System einen der drei Endzustände erreicht hat. Die Entscheidung, welcher der drei Zustände erreicht wird, gibt die in (2.2.1) schon erwähnte Magnetisierung $m(t) = f_+ - f_-$ von Wählern für $+1$ und Wählern für -1 an [3]. Es gilt [28]:

$$m(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \theta_i(t).$$

Bildet man die Entwicklung des eindimensionalen Gitters vs. die Zeit in Monte-Carlo-Schritten ab, kann man sehen, dass zuerst alle drei Zustände nebeneinanderher auf dem Gitter existieren.

Mit der Zeit kristallisiert sich jedoch ein Zustand heraus und wird am Ende asymptotisch erreicht [3]. Dementsprechend verhält sich die Magnetisierung in diesem Zeitraum [3]. m beginnt bei 0, schwankt dann ein wenig, bis sich m entsprechend der drei Endzustände entweder bei -1 , $+1$ oder 0 einpendelt.

Um den Verlauf von m noch genauer zu untersuchen, betrachtet man die Zeitkorrelation von m mit Hilfe der Autokorrelationsfunktion [28]:

$$G(\Delta t) = \frac{\sum_t (m(t) - \langle m \rangle)(m(t + \Delta t) - \langle m \rangle)}{\sum_t (m(t) - \langle m \rangle)^2} \quad \text{mit} \quad -1 \leq G(\Delta t) \leq +1.$$

Nimmt $G(\Delta t)$ einen Wert nahe bei ± 1 an, besteht ein positiver bzw. negativer linearer Zusammenhang zwischen $m(t)$ und $m(t + \Delta t)$. Bei dem Wert 0 hängen $m(t)$ und $m(t + \Delta t)$ überhaupt nicht linear voneinander ab.

Betrachtet man den Meinungsverlauf eines bestimmten Agenten, fällt auf, dass ein Agent, der seine Meinung zum Zeitpunkt t ändert, diese wahrscheinlich auch zum Zeitpunkt $t + 1$ ändern wird [28]. Andererseits kann ein Agent seine Meinung auch über einen langen Zeitraum hin unverändert lassen. Sei τ die Zeit, die ein Agent braucht, um seine Meinung zu ändern. τ ist also meist sehr kurz, kann jedoch in einigen Fällen auch sehr lang sein. Das heißt, auf Perioden mit einem häufigen Wechsel der Meinung eines Agenten, folgen längere Perioden ohne Meinungsänderung. Die Verteilung $P(\tau)$ folgt einem Potenzgesetz mit Exponenten $-\frac{3}{2}$.

Sei μ die Relaxationszeit, das heißt die Zeit in welcher stationäre Bedingungen erreicht werden. Für $N = 100$ und einem asynchronen Update nach den Sznajd-Regeln hat die Verteilung $P(\mu)$ ihr Maximum bei ungefähr 250 Monte-Carlo-Schritten [3]. Das heißt, im Schnitt braucht eine Simulation des Sznajd-Modells diese Zeit bis einer der drei stationären Zustände erreicht ist. $P(\mu)$ folgt näherungsweise einer logarithmischen Verteilung.

Den Einfluss der Anfangsbedingungen auf das Sznajd-Modell kann man auf zwei verschiedene Weisen analysieren, beliebig und in Gruppen [28]. Sei c_{-1} die Anfangskonzentration von Meinung -1 . Im beliebigen Fall werden $c_{-1} * N$ Agenten beliebig aus den N Agenten ausgewählt und mit Meinung -1 versehen. Im Gruppen-Fall wird den ersten $c_{-1} * N$ Agenten Meinung -1 zugeteilt. Es stellt sich heraus, dass die Verteilung von τ immer noch einem Potenzgesetz mit gleichem Exponenten wie eben folgt. Der Entscheidungswechsel eines Agenten weist weiter ein nicht monotones Verhalten auf und dies zum Teil stärker als zuvor. Falls anfangs Meinung $+1$ stärker vertreten ist als Meinung -1 , tritt im stationären Endzustand öfter „alle Agenten der Gemeinschaft wählen Meinung $+1$ “ als „alle Agenten der Gemeinschaft wählen Meinung -1 “ ein. Für diese Abhängigkeit zwischen der Anfangskonzentration und dem stationären Endzustand gilt, dass $c_{-1} > 0.7$ sein muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit größer als 50% den stationären Endzustand „alle Agenten der Gemeinschaft wählen Meinung -1 “ zu erlangen. Die Abhängigkeit zwischen Anfangskonzentration c_{-1} und der Wahrscheinlichkeit für den Zustand „alle Agenten der Gemeinschaft wählen Meinung -1 “ kann mit einer Potenzfunktion mit Ex-

ponenten 2.12 beschrieben werden.

Zwischen dem beliebigen Fall und dem Gruppen-Fall besteht kein großer Unterschied. Zwar ist der beliebige Fall nicht eindeutig definiert, da es mehrere mögliche Anfangszustände gibt, nimmt man aber den Durchschnitt der verschiedenen möglichen Anfangszustände, kommen ähnliche Ergebnisse wie bei dem Gruppen-Fall heraus.

2.2.3 Modifikationen des ursprünglichen eindimensionalen Sznajd-Modells und deren Folgen

2.2.3.1 Information Noise

Ein Individuum verändert seine Meinung nicht nur durch den Kontakt zu benachbarten Menschen, sondern auch durch andere soziale Einflüsse. Um dies darzustellen, führt man eine Störung (Noise) p in das Modell ein, die für die Wahrscheinlichkeit steht, dass ein Agent eine beliebige Entscheidung trifft, statt den Dynamikregeln des Sznajd-Modells zu folgen [28]. Um zu prüfen, ob es ein $p \in (0, 1)$ gibt, das den Zustand des Systems nicht verändert, beginnt man mit dem Zustand „alle Agenten der Gemeinschaft wählen Meinung -1 “. Sznajd-Weron und Sznajd [28] haben anhand von Simulationen verdeutlicht, dass für sehr kleine $p \approx 10^{-6}$ die Abweichungen vom stabilen Zustand nur sehr gering sind und sich das System kaum verändert. Für steigende p werden die Abweichungen größer bis schließlich der stabile Zustand „alle Agenten der Gemeinschaft wählen Meinung -1 “ ganz verloren geht, wie z.B. für $p = 10^{-5}$, und das System komplett gestört ist. Daraus lässt sich schließen, dass es ein $p = p^*$ geben muss, unter dessen Wert das System nicht gestört wird. Anhand der Simulationen von Sznajd-Weron und Sznajd kann man nur sagen, dass $p^* \in [10^{-6}, 10^{-5}]$. Für $p < p^*$ und beliebige Anfangsbedingungen erreicht das System nach einer gewissen Relaxationszeit einen der drei stabilen Zustände.

Wie in dem vorherigen Abschnitt (2.2.2) beschrieben, folgt $P(\tau)$ einem Potenzgesetz mit Exponenten $\sim -\frac{3}{2}$. Nimmt man dieselbe Verteilung $P(\tau)$ wie eben für verschiedene Werte von p , verändert sich der Verlauf der Verteilung in Abhängigkeit von τ . Für $p \rightarrow 0$ genügt die Verteilung $P(\tau)$ in der Tat einem Potenzgesetz, wohingegen sie für $p \rightarrow 1$ exponentiell ist. Für dazwischenliegende p besteht $P(\tau)$ aus zwei Teilen. Sie ist exponentiell für große Werte von τ und genügt einem Potenzgesetz mit Exponenten $w \sim -\frac{3}{2}$ für kleine Werte von τ . Es gilt:

$$P(\tau) \sim \begin{cases} \tau^{-w}, & \text{für } \tau < \tau^*, w \sim \frac{3}{2} \\ \exp(a\tau), & \text{für } \tau > \tau^*, \end{cases}$$

wobei τ^* mit steigendem p sinkt. Für $p = 0$ gilt $\tau^* = \infty$ und für $p = 1$ gilt $\tau^* = 0$.

2.2.3.2 Ein modifiziertes eindimensionales Sznajd-Modell

Das Auftreten eines antiferromagnetischen stabilen Zustands in einer Gesellschaft ist recht unrealistisch. Zum einen ist es fast unmöglich einen 50/50 Endzustand zu bekommen, besonders wenn die Gesellschaft groß ist, und zum anderen ist es eine sehr „unbehagliche“ Situation nur von Nachbarn mit einer entgegengesetzten Meinung umgeben zu sein. Um diesen Fall zu vermeiden, hat Juan R. Sánchez [21] eine neue Dynamikregel im Sznajd-Modell eingeführt:

- Falls $\theta_i \theta_{i+1} = 1$, dann übernehmen θ_{i-1} und θ_{i+2} die Meinung des Paares $\{i, i + 1\}$.
(Regel 1)
- Falls $\theta_i \theta_{i+1} = -1$, dann nimmt θ_{i-1} die Meinung von θ_i an und θ_{i+2} die Meinung von θ_i .
(Regel 2 neu)

Regel 1 bleibt demnach wie zuvor und Regel 2 wird so verändert, dass in dem Fall von Uneinigkeit zwischen θ_i und θ_{i+1} Agent i wenigstens einen Nachbarn mit der gleichen Meinung hat. Mit dieser Veränderung wird der antiferromagnetische Zustand vollkommen vermieden und die anderen beiden ferromagnetischen Zustände werden bei gleichen Anfangsbedingungen mit gleicher Wahrscheinlichkeit erreicht.

2.2.3.3 Mehr Dimensionen, mehr Meinungen

Statt des ursprünglichen eindimensionalen Sznajd-Modells lässt sich dieses natürlich auch auf zwei Dimensionen ausweiten, indem man ein quadratisches Gitter nimmt auf dessen Knotenpunkten die Agenten sitzen. Neben anderen hat Stauffer [27] das zweidimensionale Sznajd-Modell ausführlicher untersucht. Dabei verhält es sich ähnlich wie im eindimensionalen Fall. Der Unterschied besteht darin, dass statt der zwei Nachbarn alle sechs Nachbarn des ausgesuchten Paares von deren Meinung überzeugt werden, falls das Paar in dieser Hinsicht übereinstimmt.

Ebenso kann man vom binären Fall des Modells mit den Meinungen ± 1 zu mehr als zwei Meinungen übergehen. Diese können diskret oder stetig sein. Im diskreten Fall drückt man die verschiedenen Meinungen mit ganzen Zahlen ($\theta_i = 1, 2, \dots, Q$) aus und im stetigen Fall liegen diese zum Beispiel im Intervall $[0, 1]$ [26]. Für diese beiden Fälle benötigt man *bounded confidence* [26]. Das heißt, nur Agenten mit ähnlichen Meinungen können sich gegenseitig beeinflussen. Die Agenten außerhalb des Konfidenzbereichs behalten ihre Meinung bei. Im diskreten Fall können somit nur Agenten miteinander kommunizieren, deren Meinungen nicht mehr als ϵQ Einheiten voneinander abweichen bei Q verschiedenen Meinungen. Für $\epsilon = \frac{1}{Q}$ hieße das, dass nur Agenten mit Meinungen, die direkt nebeneinander liegen, sich gegenseitig beeinflussen können. Für den stetigen Fall dürfen die Meinungen dementsprechend nicht mehr als ϵ voneinander abweichen, um sich gegenseitig zu beeinflussen.

Ist $\epsilon \geq 1$, so ist *bounded confidence* überflüssig. Für $\epsilon \ll 1$ hingegen ist der Bereich der sich beeinflussbaren Meinungen sehr klein. *bounded confidence* hat also einen sehr starken Einfluss. ϵ misst somit die Toleranz für abweichende Meinungen und die Offenheit für diese.

Im ursprünglichen eindimensionalen Sznajd-Modell wird nach einer gewissen Zeit immer einer der drei stabilen Zustände erreicht. Dieser Fall ist allerdings weniger interessant, da hier kein Phasenübergang (siehe (2.2.3.5)) auftritt [26]. Im Falle von mehr als zwei Meinungen und höheren Dimensionen kann neben einem Konsens (eine überlebende Meinung) oder Polarisati-on (zwei überlebende Meinungen) auch Fragmentation eintreten, das heißt am Ende überleben drei oder mehr Meinungen. Welches Ergebnis wünschenswert ist, liegt nicht am Modell, sondern an der Anwendung und Interpretation des jeweiligen Modells [26]. Neben dem eindimensionalen Fall auf einem eindimensionalen Gitter und dem zweidimensionalen Fall auf einem quadratischen Gitter, sind auch dreieckige Gitter (hier Dimension $5/2$), einfache Würfel und Hyperwürfel in vier und fünf Dimensionen simuliert worden. Die Ergebnisse sind alle ähnlich [26]. Für $Q \leq 3$ mögliche Meinungen tritt fast immer Konsens ein. Hingegen wird für $Q \geq 4$ mögliche Meinungen so gut wie nie ein Konsens erreicht. Die Vertrauensschränke ist für alle Fälle dieselbe. Der Grenzwert 3.5 im Einheitskonfidenzintervall entspricht einem ϵ von $1/3.5$. Für größere ϵ erreicht man am Ende Konsens und für kleinere fallende ϵ zuerst Polarisati-on in zwei Meinungen und danach Fragmentation in drei oder mehr Meinungen, $\propto 1/\epsilon$.

Die Sznajd-Modelle mit stetigen Meinungen scheinen immer einen Konsens zu erreichen, unabhängig von der Vertrauensschränke ϵ . Diskrete Meinungen haben im Gegensatz zu stetigen Meinungen den Vorteil, dass man genau sagen kann, ob zwei Meinungen übereinstimmen oder nicht [26]. Im stetigen Fall hängt dies oft von der Präzision des Computers ab. Im diskreten Fall wird somit ein fester Punkt erreicht, wenn alle Meinungen miteinander übereinstimmen oder sich gegenseitig nicht mehr beeinflussen können. Außerdem gibt es eine maximale Zahl Q von möglichen Meinungen, für die folgendes gilt: Ist die Zahl N der Agenten viel größer als die Zahl Q der möglichen Meinungen, so findet jede Meinung Anhänger und die Zahl S der überlebenden Meinungen ist gleich Q . Ist im Gegensatz dazu N viel kleiner als Q , so behält jeder Agent seine Meinung, wenn diese mehr als ϵ von den anderen Meinungen entfernt ist. Es gilt dann $S = N$. Es ist am besten ein Einheitskonfidenzintervall zu wählen, z.B. $\epsilon = 1/Q$. Es gilt dann

$$S/Q = f(Q/N)$$

mit einer konstanten Skalierungsfunktion f für $Q \ll N$ und $f = N/Q$ für $Q \gg N$, gültig für große Q , S , N .

2.2.3.4 Eine Erweiterung des binären Sznajd-Modells zu einer stetigen Version

G.A. Baker und J.P. Hague [1] haben ebenfalls ein stetiges Sznajd-Modell aufgestellt, welches ihrer Meinung nach vertretbar das binäre Modell erweitert. Die Meinungen liegen im Intervall

$[-1, 1]$. [1] Dabei berücksichtigen sie, dass zwei zufällig ausgewählte benachbarte Agenten sowohl im Falle einer Übereinstimmung ihrer Meinungen miteinander agieren als auch im Falle keiner Übereinstimmung. Außerdem beziehen sie den Erinnerungseffekt mit ein. Das bedeutet, dass auch die aktuelle Meinung bei der Meinungsfindung eines Agenten mit einfließt. [1]

Von einer Übereinstimmung zweier Meinungen θ_i, θ_{i+1} spricht man, wenn $|\theta_i - \theta_{i+1}| \leq \epsilon$ gilt für eine Vertrauensschranke ϵ . Von keiner Übereinstimmung spricht man hingegen, wenn $|\theta_i + \theta_{i+1}| \leq \epsilon$ gilt. [1] Diese Bedingung wird von entgegengesetzte Meinungen erfüllt, die vom Betrag her ungefähr die gleiche Größenordnung besitzen. Mit diesen zwei Bedingungen lassen sich folgende Dynamikregeln einführen: [1]

- Gilt für die Agenten i und $i + 1$ $|\theta_i - \theta_{i+1}| \leq \epsilon$, so stimmen ihre Meinungen überein und ihre Nachbarn $i - 1$ und $i + 2$ nehmen die durchschnittliche Meinung der Agenten i und $i + 1$ an. Es gilt $\theta_{i+2} = \theta_{i-1} = (\theta_i + \theta_{i+1})/2$. (Regel 1)
- Gilt für die Agenten i und $i + 1$ $|\theta_i + \theta_{i+1}| \leq \epsilon$, so stimmen ihre Meinungen nicht überein und ihre Nachbarn $i - 1$ und $i + 2$ nehmen folgende Differenz der Meinungen der Agenten i und $i + 1$ an. Es gilt $-\theta_{i+2} = \theta_{i-1} = (\theta_{i+1} - \theta_i)/2$. (Regel 2)

Durch die zweite Regel kann eine starke Polarisation zu entgegengesetzten Standpunkten stattfinden. Im Falle von Gruppen mit genau entgegengesetzten Meinungen bringen diese ihre Nachbarn dazu einen großen Sprung in ihre bzw. weg von ihrer Meinungsrichtung zu machen. [1]

Die Erinnerung an die bisherigen Meinungen ist eine starke Eigenschaft in der Meinungsbildung. [1] Somit ist es interessant den Effekt mit in das Modell einzubeziehen. Im binären Fall ist dies nicht möglich, dafür aber im stetigen Fall. [1] Das heißt also, dass die Meinungsänderung eines Agenten zwischen zwei Zeitschritten sowohl von der bisherigen Meinung also auch von den Updateregeln 1 und 2 des Modells abhängt. Das hat zur Folge, dass die Meinung eines Agenten nicht mehr augenblicklich von einem Ende der Meinungsskala zum anderen springen kann, sondern dafür eine Beeinflussung über eine größere Anzahl von Zeitschritten benötigt wird. [1] Am einfachsten ist es die Erinnerung mittels einer Linearkombination, bestehend aus der aktuellen Meinung des Agenten und der fremdbestimmten Meinung durch die Updateregeln des Modells, einfließen zu lassen. [1] Die eben aufgestellten Regeln 1 und 2 verändern sich dann folgendermaßen: [1]

- Liegt eine Übereinstimmung der Meinungen der Agenten i und $i + 1$ vor, gelten für ihre Nachbarn $i - 1$ und $i + 2$ bei der Meinungsänderung die Regeln $\theta_{i-1}(t + 1) = \alpha\theta_{i-1}(t) + (1 - \alpha)(\theta_{i+1}(t) + \theta_i(t))/2$ und $\theta_{i+2}(t + 1) = \alpha\theta_{i+2}(t) - (1 - \alpha)(\theta_{i+1}(t) + \theta_i(t))/2$. (Regel 3)
- Liegt keine Übereinstimmung der Meinungen der Agenten i und $i + 1$ vor, gelten für ihre Nachbarn $i - 1$ und $i + 2$ bei der Meinungsänderung die Regeln $\theta_{i-1}(t + 1) = \alpha\theta_{i-1}(t) + (1 - \alpha)(\theta_{i+1}(t) - \theta_i(t))/2$ und $\theta_{i+2}(t + 1) = \alpha\theta_{i+2}(t) - (1 - \alpha)(\theta_{i+1}(t) - \theta_i(t))/2$. (Regel 4)

Dabei bestimmt α den jeweiligen Einfluss der Erinnerung und der Meinung der benachbarten Agenten. [1]

Bei den aufgestellten Regeln 1-4 tritt eine Region von Meinungen auf, in der nicht eindeutig ist, welche der Regeln zu befolgen ist, da beide Bedingungen $|\theta_i - \theta_{i+1}| \leq \epsilon$ und $|\theta_i + \theta_{i+1}| \leq \epsilon$ erfüllt werden. [1] Alle Meinungen, die $|\theta_{i+1}| + |\theta_i| < \epsilon$ erfüllen, liegen in dieser Region. [1] Somit handelt es sich um die zentralen Meinungen um null, die von kleinerer Größenordnung sind. Baker und Hague [1] haben zwei Wege aufgestellt mit dieser Region umzugehen. Zum einen gibt es das sogenannten *active centrist model* (ACM) und zum anderen das *lazy centrist model* (LCM). [1]

Im ACM wird die nicht eindeutige Region aufgeteilt, sodass das Vorzeichen des Produkts zweier Meinungen bestimmt, ob eine Übereinstimmung oder keine Übereinstimmung der Meinungen vorliegt. Dementsprechend wird dann Regel 3 oder 4 angewandt. Dabei steht $\theta_i \theta_{i+1} > 0$ für eine Übereinstimmung und $\theta_i \theta_{i+1} < 0$ für keine Übereinstimmung. [1]

Im LCM findet kein Update der Meinungen statt und alle behalten ihr bisherigen Meinungen bei. Dies ist im Falle von desinteressierten Agenten sinnvoll. [1]

Für die Simulation des Modells wird eine Monte-Carlo-Simulation durchgeführt. Diese findet auf eine eindimensionalen Gitter statt, wobei jeder Seite zufällig eine Meinung aus $[-1, 1]$ zugeordnet wird. [1] Anschließend wird ein Paar von benachbarten Spins ausgewählt. Für dieses wird die entsprechende Updateregeln festgestellt und auf die benachbarten Spins angewandt. Danach erfolgt das Ganze mit einem neu ausgewählten Paar. Der Algorithmus endet, wenn eine vorgegebene Anzahl an Zeitschritten durchgeführt worden ist. Oft liegt diese bei 10000 Schritten. [1] Im Anschluss wird das ganze noch einmal für eine andere zufällige anfängliche Meinungsverteilung durchgeführt und zwar so oft bis die Anzahl groß genug ist für einen aussagekräftigen statistischen Durchschnitt. [1]

Baker und Hague [1] haben beispielsweise die Meinungsbildung in einem Single Run simuliert. Dabei sind sie von $N = 25$ Agenten ausgegangen, haben das LCM zum Update benutzt, die Vertrauensschranke $\epsilon = 1$ gesetzt, keine Erinnerung berücksichtigt ($\alpha = 0$) und das ganze über eine Periode von 500 Zeitschritten laufen lassen. [1] Das Ergebnis zeigt, dass die Meinungen zu Beginn sehr verschieden sind, da sie anfangs zufällig verteilt worden sind. In der Anfangsphase gibt es sehr viele negative Meinungen, die aber nach ungefähr 200 Zeitschritten aussterben. Das ist auch der Zeitpunkt, in dem die Regionen mit verschiedene Meinungen verschwinden und nur noch Stellen mit einheitlichen Meinungen existieren. Nach 500 Zeitschritten sind nur noch zwei verschiedene Regionen übrig, die beide aus positiven Meinungen bestehen (0, 4 und 0, 6). Diese Meinungen sind ähnlich genug, so dass die Agenten auch weiter miteinander interagieren und somit ist es sehr wahrscheinlich, dass am Ende eine einzelne Meinung überlebt. [1]

Interessant ist auch, die durchschnittliche Meinung im Endzustand zu untersuchen. Im binären Sznajd-Modell gibt es drei mögliche Endzustände. [1] Entweder haben alle Meinung -1 , alle Meinung 1 oder 50% haben Meinung 1 und 50% Meinung -1 (siehe (2.2.1)). Gibt man dieses mittels eines Histogramms wieder in dem auf der x-Achse die Meinungsskala von -1 bis

1 abgebildet ist und auf der y-Achse die Wahrscheinlichkeiten für die jeweilige Meinung im Endzustand, so entsteht für das binäre Modell eine Verteilung mit drei Spitzen bei 1, 0 und -1 , wobei 0 für den alternierenden Endzustand steht. [1] Im stetigen Fall geht diese Eigenschaft verloren. Dort findet sich eine Verteilung mit einer eindeutigen Mehrheit der durchschnittlichen Meinung bei 0 wieder, die nach außen hin abflacht und den geringsten Wert ganz außen bei 1 und -1 aufweist. [1] Simuliert worden ist das Ganze für $\epsilon = 0.1$, $N = 100$, $\alpha = 0$ und die LCM-Regel in 25000 Zeitschritten und 1000 verschiedenen Durchgängen. [1]

Lässt man die Erinnerung mit in die Simulationen einfließen, unerheblich ob für das ACM oder LCM, so halbiert sich zum Beispiel die Verteilung der durchschnittlichen Meinung auf der Meinungsskala für $\alpha = 0.5$. [1] Für $\alpha = 1$ verändert sich die Meinungsverteilung gar nicht. Ein Erinnerungseffekt besteht also darin, dass für steigendes α die Zeitskala ansteigt. [1] Ein zweiter Effekt des LCM's ist nicht so trivial. Betrachtet man ein Paar von Agenten i und $i + 1$ mit positiver Meinung $\theta_i, \theta_{i+1} = 0.75$, deren einer Nachbar $i + 2$ Meinung $\theta_{i+2} = -0.75$ hat, so ändert sich durch den Einfluss des Paares auf den Agenten $i + 2$ dessen Meinung von $\theta_{i+2} = -0.75$ zu $\theta_{i+2} = 0$. [1] Es entstehen neue Meinungen, die auch im Zentrum liegen können. Liegt eine davon in der nicht eindeutigen Region, so verbreitet sich diese Meinung unter Anwendung der LCM-Regel nicht, da kein Update vorgenommen wird. Die Meinung kann dann auf lange Sicht aussterben. Es entsteht also ein konstanter Fluss zwischen Entstehung neuer Meinungen und deren Auslöschung. [1]

2.2.3.5 Phasenübergang

Im einfachsten Fall des Sznajd-Modells gibt es nur $Q = 2$ mögliche Meinungen ± 1 . Auf einem quadratischen Gitter wird dann immer ein Konsens erreicht: Entweder enden alle Agenten mit Meinung $+1$ oder aber mit Meinung -1 . Falls am Anfang die Hälfte aller Meinungen $+1$ ist und die andere Hälfte -1 , dann ergibt sich nach dem Simulieren vieler Beispiele, dass die Hälfte aller Beispiele mit Meinung $+1$ endet und die andere Hälfte mit Meinung -1 . [26]

Wenn man nun die Anfangskonzentration von Meinung $+1$ verändert, ändert sich auch der Anteil der Beispiele, die mit Meinung $+1$ enden. Diese Änderung verläuft nicht proportional zu der Anfangskonzentration, sondern hängt von der Größe des Gitters ab. Für kleine Gitter ist die Änderung nicht so stark wie für große Gitter. Daraus kann man schließen, dass man für unendliche Gitter einen scharfen Phasenübergang hat [26]: Liegt die Anfangskonzentration für Meinung $+1$ unter 50%, so enden alle Beispiele mit Meinung -1 . Für eine Anfangskonzentration über 50% enden dementsprechend alle Beispiele mit Meinung $+1$.

Für das Standardmodell ist der numerische Nachweis recht dürftig aufgrund der kleinen Gittergrößen [26]. Kombiniert man aber die traditionelle Interaktion des Sznajd-Modells, das heißt nur die Interaktion zwischen nebeneinanderliegenden Agenten, mit der globalen Interaktion [22], kann man den Phasenübergang beweisen [26]: Zwei beliebig weit voneinander entfernte Agenten, die in ihrer Meinung übereinstimmen, überzeugen jeweils ihre nächsten Nachbarn von ihrer Meinung. Die Relaxationszeiten bis ein fixer Punkt erreicht ist, sind nun viel kürzer

und die Verteilung der verschiedenen Relaxationszeiten fällt exponentiell aus und ist nicht so kompliziert wie im traditionellen Fall [22]. Daher können größere Gitter simuliert werden. Sei W die Weite des Phasenübergangs. Damit ist das Intervall in der Anfangskonzentration c_{+1} von Meinung $+1$ gemeint, in dem der Anteil aller Beispiele, die mit $+1$ enden, von 50% auf 70% ansteigt. Das heißt, dass für eine Anfangskonzentration $c_{+1} = 0.5 + W$ am Ende von 1000 Beispielen 700 einen Konsens bei $+1$ haben [22]. Diese Weite verändert sich proportional zu $1/L$ in einem $L \times L$ -Gitter, $10 < L < 10000$. Dies ist ein klarer Beweis für einen einfachen Phasenübergang.

Im eindimensionalen Fall existiert kein Phasenübergang [26], da sich der Anteil der Beispiele, die mit $+1$ enden immer proportional zur Anfangskonzentration c_{+1} von Meinung $+1$ verändern. Erst wenn $c_{+1} = 1$, ist auch die Wahrscheinlichkeit, dass am Ende alle Beispiele mit Meinung $+1$ enden, gleich eins.

2.2.3.6 Frustration und simultanes Update

Frustration tritt beim bisherigen angewandten sequentiellen Update nicht auf. Benutzt man aber das simultane Update, so kann es passieren, dass ein Agent nicht weiß, welcher Meinung seiner Nachbarn er folgen soll, wenn diese unterschiedlich sind [27]. Beim sequentiellen Update trifft der Agent nacheinander auf die verschiedenen Meinungen, beim simultanen Update kann dies jedoch gleichzeitig geschehen. In diesem Fall bleibt der frustrierte Agent bei seiner bisherigen Meinung, was zur Folge hat, dass ein Konsens in kleinen Gittern schwer zu erreichen ist und in großen Gittern gar nicht. Sabatelli und Richmond [20] haben es geschafft, diese Schwierigkeiten teilweise zu beseitigen, indem man in solchen Konfliktsituationen seiner eigenen Meinung folgt, das heißt der Meinung, die in den eigenen vergangenen Wahlaufzeichnungen am häufigsten vorkommt. Oder man fügt in das System eine geringe Störung (noise) ein, die darin besteht, dass die Agenten mit einer geringen Wahrscheinlichkeit nicht den Sznajd-Regeln folgen. Nach einer genügend langen Zeit tritt dann auch in diesen Fällen ein Konsens ein.

2.2.3.7 Das Sznajd-Modell auf einem vollständigen Graphen mit diskreten Meinungen

F. Slanina und H. Lavicka [25] haben das ursprüngliche Sznajd-Modell mit Hilfe der Molekularfeldnäherung statt auf einem Gitter auf einem vollständigen Graphen untersucht. Sie halten dies zwar nicht für eine gute Näherung für das ursprüngliche eindimensionale Sznajd-Modell, aber als sehr geeignet für die realistischeren Sznajd-Modelle auf komplexeren Netzwerken.

Das Modell sieht folgendermaßen aus [25]: Sei N die Anzahl der Agenten. Jeder Agent ist mit einer Meinung $\theta_i \in \{1, 2, \dots, Q\}$ versehen und sitzt auf einem Knotenpunkt eines sozialen Netzwerks, in dem er mit den nächsten Nachbarn interagieren kann. Der Zustand des Systems lässt sich mit der Menge der Meinungen aller Agenten beschreiben, $\Sigma = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N]$. Dies ist zu jedem Zeitpunkt t möglich und somit erhält man mit $\Sigma(t)$ einen zeitlich diskreten Markovprozess, dessen Übergangswahrscheinlichkeiten sich in den verschiedenen Fällen von t

zu $t + 1$ unterscheiden.

Der Hauptunterschied zum ursprünglichen zweidimensionalen Sznajd-Modell besteht darin, dass maximal ein Agent pro Zeitschritt seine Meinung ändert [25]. Dies verändert nicht entscheidend das Verhalten der Agenten, sondern verallgemeinert und vereinfacht gleichzeitig das zweidimensionale Sznajd-Modell. Der Algorithmus besteht aus den folgenden drei Schritten [25]:

1. Es wird zufällig ein Agent i gewählt.
2. Es wird zufällig ein Nachbar j von Agent i gewählt.
3. Gilt $\theta_i(t) \neq \theta_j(t)$, geschieht nichts. Gilt $\theta_i(t) = \theta_j(t)$, wird zufällig ein gemeinsamer Nachbar k von den beiden Agenten i und j gewählt und $\theta_k(t + 1) = \theta_i(t)$ gesetzt.

Das soziale Netzwerk wird nun durch einen vollständigen Graphen approximiert. Das heißt, dass jeder mit jedem benachbart ist. In diesem Fall kann man den Zustand des Systems komplett mit der Besetzungszahl $N_\theta = \sum_{i=1}^N \delta_{\theta_i, \theta}$ beschreiben [25], wobei $\theta \in \{1, 2, \dots, Q\}$ gilt und

$$\delta_{\theta_i, \theta} = \begin{cases} 1, & \text{für } \theta_i = \theta, \\ 0, & \text{für } \theta_i \neq \theta. \end{cases}$$

Die Dynamiken der Besetzungszahl spiegeln also die gesamte Entwicklung des Systems wieder. Für den Fall mit $Q = 2$ Meinungen kann die Variable θ nur zwei Werte annehmen, z.B. $\theta = \pm 1$ wie im ursprünglichen Sznajd-Modell. Der Zustand des Systems wird somit durch die Magnetisierung $m = \frac{N_+ - N_-}{N}$ beschrieben. Diese bleibt während eines Zeitschritts entweder unverändert oder ändert sich um $\pm \frac{2}{N}$. Die Wahrscheinlichkeiten für diese 3 Fälle sehen folgendermaßen aus [25]:

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{m \rightarrow m + \frac{2}{N}\} &= \frac{(1 - m^2)}{8} \left(1 + m + \frac{1 + 3m}{N}\right) \\ \text{Prob}\{m \rightarrow m - \frac{2}{N}\} &= \frac{(1 - m^2)}{8} \left(1 - m + \frac{1 - 3m}{N}\right) \\ \text{Prob}\{m \rightarrow m\} &= 1 - \frac{(1 - m^2)}{4} \left(1 + \frac{1}{N}\right), \end{aligned} \tag{2.3}$$

wobei die Terme der Größenordnung $\frac{1}{N^2}$ zur Vereinfachung vernachlässigt werden.

Ziel ist es die Mastergleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte P der Zufallsvariablen $m(t)$ zu finden [25]. Man kann leicht den thermodynamischen Grenzwert für $N \rightarrow \infty$ bestimmen. Die Zeit sollte für einen übersichtlicheren thermodynamischen Grenzwert reskaliert werden mit

$$t = 2N\tau. \tag{2.4}$$

Daraus ergibt sich die Fokker-Planck-Gleichung [25]

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(m, \tau) = -\frac{\partial}{\partial m} [(1 - m^2)mP(m, \tau)]. \quad (2.5)$$

Diese Gleichung enthält nur die erste Ableitung nach m und besteht somit nur aus dem Driftteil. Der Diffusionsteil fällt hier durch das Vernachlässigen der Terme der Größenordnung $\frac{1}{N^2}$ in (2.3) weg. Dieser korrigiert den Driftterm nur um ein endliches Maß und wird erst Nahe den Punkten $m = \pm 1$ und $m = 0$ wichtig, da die Driftgeschwindigkeit an diesen Punkten null wird [25].

Die Lösung von Gleichung (2.5) hat laut F. Slanina und H. Lavicka [25] folgende allgemeine Form:

$$P(m, \tau) = [(1 - m^2)m]^{-1} f\left(e^{-\tau} \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}\right) \quad (2.6)$$

für eine beliebige Funktion $f(y)$, dessen Form durch die Anfangsbedingungen gegeben wird. Auf diese Weise könnte man im Grunde berechnen wie lange das System von der gegebenen Anfangsposition aus braucht bis die Ränder des Intervalls von m erreicht werden. Dann hätte man die Zeit bis zum stationären Zustand. Allerdings kommt dabei heraus, dass die benötigte Zeit viel zu schnell viel zu groß wird wegen $N \rightarrow \infty$. Nahe den Punkten $m = \pm 1$ nimmt allerdings tatsächlich der endliche Größeneffekt überhand. [25]

Man kann somit die durchschnittliche Zeit bis zum stationären Zustand im endlichen System schätzen [25]. Gleichung (2.5) stellt den Drift dar, der das System in Richtung des stationären Zustands bringt, vernachlässigt aber die Diffusion, die ab einer Distanz von $\frac{1}{N}$ von den Punkten $m = \pm 1$ wichtig wird. Man muss daher die Zeit berechnen, die der Drift braucht, um das System bis zu den Punkten $\pm(1 - \frac{1}{N})$ zu bewegen. Sei c_{+1} die Anfangskonzentration von Meinung +1. Dies entspricht der Anfangsbedingung $m_0 = 2c_{+1} - 1$. Zusammen mit Formel (2.6) ergibt sich die folgende Schätzung [25] für die durchschnittliche Zeit $\langle \tau_{st} \rangle$ den stationären Zustand zu erreichen

$$\langle \tau_{st} \rangle \simeq -\ln \left(\frac{|2c_{+1} - 1|}{\sqrt{c_{+1}(1 - c_{+1})}} \frac{1}{\sqrt{N}} \right).$$

Es wäre wünschenswert die gesamte Wahrscheinlichkeitsverteilung von τ_{st} zu haben. Dies funktioniert wieder mit einer Schätzung des exponentiellen Rests der Verteilung durch eine einfache Betrachtung [25]. Angenommen der Drift hat das System so weit fortschreiten lassen, dass nur noch eine einzige Meinung -1 zwischen ganz vielen Meinungen $+1$ übrig ist. Das System erreicht den stationären Endzustand, wenn ein Pärchen mit gleicher Meinung $+1$ gewählt wird und als drittes der Agent mit Meinung -1 . Diese Wahl hat die Wahrscheinlichkeit $\simeq \frac{1}{N}$. Also ist die Relaxationszeit bis zum einheitlichen Zustand $t_{relax} \simeq N$. Mit der Skalierung (2.4) von oben ergibt sich für den Rest der Verteilung [25]

$$P(\tau_{st}) \sim \exp\left(-\frac{\tau_{st}}{\tau_{relax}}\right), \quad \tau_{st} \rightarrow \infty$$

mit

$$\tau_{relax} \simeq \frac{1}{2}.$$

Anhand von Gleichung (2.6) kann man auch den Phasenübergang nachweisen, der in den numerischen Simulationen auftaucht [25]. Startet man mit einer festen positiven Magnetisierung mit Anfangsbedingung $P(m, 0) = \delta(m - m_0)$, $m_0 > 0$, und dem Drift ausgedrückt in Form von Gleichung (2.5), so konvergiert das System gegen den Zustand, in dem alle Agenten Meinung $+1$ haben. Umgekehrt gilt dasselbe, wenn man mit einer negativen Magnetisierung startet. Die Wahrscheinlichkeit für den Zustand, in dem am Ende alle Agenten Meinung $+1$ haben, ist $P_+ = \sigma(c_{+1} - \frac{1}{2})$ [25].

Vergleicht man die analytischen Ergebnisse mit den numerischen Simulationen bezüglich des Phasenübergangs und des exponentiellen Rests bei der Verteilung der Zeit den stationären Zustand zu erreichen, stimmen diese sehr gut überein [25].

2.3 Zusammenhänge zwischen dem Sznajd- und dem Voter-Modell

Das Sznajd-Modell basiert ebenso wie das Voter-Modell auf einem zellularen Automaten. [3] Die Frage ist nun, ob das Sznajd-Modell neue Erkenntnisse bringt im Vergleich zu anderen früheren Modellen, die auf einem zellularen Automaten basieren, wie zum Beispiel das Voter-Modell. Ein Unterschied zwischen dem VM und dem SM besteht darin, dass im VM die Agenten ihre Meinung der Umgebung anpassen, wohingegen im SM die Agenten ihre Umgebung dazu bringen ihre eigene Meinung anzunehmen. [23] Behera und Schweitzer [3] haben gezeigt, dass sich das eindimensionale Sznajd-Modell aber komplett mittels des linearen Voter-Modells formulieren lässt und somit auch ein lineares Voter-Modell ist. Die Herleitung erfolgt in drei Schritten.

Als erstes geht es um die grundlegende Idee des Voter-Modells. Die besteht darin, dass die Übernahme einer Meinung $+1$ oder -1 von der lokalen Häufigkeit dieser Meinung in der direkten Nachbarschaft abhängt. [3] Die Übergangswahrscheinlichkeit ist dort gegeben durch [3]

$$\omega(\theta'_i, \theta_i) = \kappa(f) f_{\theta'_i}, \quad (2.7)$$

wobei $f_{\theta'_i}$ die lokale Häufigkeit der entgegengesetzten Meinung von Agent i ist und $\kappa(f)$ eine nichtlineare Funktion abhängig von der lokalen Häufigkeit. Diese ist im linearen Voter-Modell aber konstant. [3] Nun besteht die Idee darin, für das Sznajd-Modell ähnliche Übergangswahrscheinlichkeiten zu bekommen. Dazu muss man alle möglichen lokalen Konfigurationen in der Nachbarschaft von Agent i betrachten, welche in der folgenden Tabelle aufgeführt sind [3]:

θ_{i-2}	θ_{i-1}	θ_i	θ_{i+1}	θ_{i+2}	$\omega(+ \theta_i)$	$\omega(- \theta_i)$
+	+	?	+	+	1	0
-	-	?	-	-	0	1
+	+	?	-	-	0.5	0.5
-	-	?	+	+	0.5	0.5
-	+	?	+	-	0	1
+	-	?	-	+	1	0
-	+	?	-	+	0.5	0.5
+	-	?	+	-	0.5	0.5
+	+	?	-	+	1	0
-	-	?	+	-	0	1
+	-	?	+	+	1	0
-	+	?	-	-	0	1
+	+	?	+	-	σ	$1 - \sigma$
-	+	?	+	+	σ	$1 - \sigma$
+	-	?	-	-	$1 - \sigma$	σ
-	-	?	-	+	$1 - \sigma$	σ

Hier tritt ein weiterer Unterschied zwischen dem Voter-Modell und dem Sznajd-Modell auf. Im Sznajd-Modell beeinflusst ein Paar von Agenten $i - 2, i - 1$ seine beiden Nachbarn $i - 3, i$ gleichzeitig und Agent i wird somit zum Beispiel nur von einer Seite in seiner Meinung beeinflusst. Im Voter-Modell hingegen ist die lokale Häufigkeit einer Meinung auf beiden Seiten wichtig. [3] In Anlehnung daran ergeben sich die 16 möglichen Konfigurationen für das Sznajd-Modell. Dabei stehen die ersten vier Übergangswahrscheinlichkeiten für den ferromagnetischen Fall im Sznajd-Modell, da $\theta_{i-2}\theta_{i-1} = \theta_{i+1}\theta_{i+2} = 1$ gilt. [3] Die nächsten vier stehen dementsprechend für den antiferromagnetischen Fall mit $\theta_{i-2}\theta_{i-1} = \theta_{i+1}\theta_{i+2} = -1$. [3] Die letzten acht Übergangswahrscheinlichkeiten entsprechen nicht dem Sznajd-Modell, da Agent i dort zwischen Ferromagnetismus auf der einen Seite und Antiferromagnetismus auf der anderen Seite wählen muss. Speziell in den letzten vier Fällen tritt Frustration ein, da Agent i nicht beiden Meinungen der benachbarten Paare simultan folgen kann. [3] Für diese Fälle gibt es einen Parameter σ , der die Entscheidung zwischen dem ferromagnetischen und antiferromagnetischen Fall trifft. Steht auf der linken Seite das Paar ++ und auf der rechten Seite das Paar +-, so folgt Agent i für $\sigma = 0$ immer dem antiferromagnetischen Paar und für $\sigma = 1$ immer dem ferromagnetischen Paar. Im Fall von $\sigma = 0.5$ ist Meinung θ_i ausgeglichen zwischen Ferromagnetismus und Antiferromagnetismus, wenn man mehrere Durchläufe beobachtet. [3]

Der zweite Schritt besteht nun darin, ein verallgemeinerte Voter-Regel herzuleiten, in der die Übergangswahrscheinlichkeiten wie in Gleichung (2.7) von den lokalen Häufigkeiten abhängen. [3] Da im Sznajd-Modell auch der zweitnächste Nachbar eine Rolle spielt, gibt es zum einen die lokale Häufigkeit $f_+^{(1)}$ der direkten Nachbarn und zum anderen die lokale Häufigkeit $f_+^{(2)}$ der zweitnächsten Nachbarn. Diese sind definiert durch [3]

$$f_+^{(1)} = \frac{1}{2}(\delta_{+;\theta_{i-1}} + \delta_{+;\theta_{i+1}}); \quad f_+^{(2)} = \frac{1}{2}(\delta_{+;\theta_{i-2}} + \delta_{+;\theta_{i+2}}),$$

wobei das $\frac{1}{2}$ dafür steht, dass Meinung θ_i nur von einer Seite beeinflusst wird.

Durch diese lokalen Häufigkeiten lassen sich die 16 Fälle von eben wie folgt auf 9 Fälle reduzieren [3]:

	$f_+^{(1)}$	$f_+^{(2)}$	$\omega(+ \theta_i)$	$\omega(- \theta_i)$
1.	1	1	1	0
2.	0	0	0	1
3.	0.5	0.5	0.5	0.5
4.	1	0	0	1
5.	0	1	1	0
6.	0.5	0	0	1
7.	0.5	1	1	0
8.	1	0.5	σ	$1 - \sigma$
9.	0	0.5	$1 - \sigma$	σ

Dabei stehen die ersten drei Übergangswahrscheinlichkeiten (1. – 3.) für die Fälle, in denen θ_i auf beiden Seiten ein ferromagnetisches Paar hat, die nächsten drei Fälle (3. – 5.) gelten, wenn θ_i auf beiden Seiten ein antiferromagnetisches Paar hat und die letzten vier Fälle (6. – 9.) treten ein, wenn θ_i auf der einen Seite ein ferromagnetisches und auf der anderen Seite ein antiferromagnetisches Paar hat. [3] In den Fällen 8 und 9 tritt wieder Frustration ein.

Im dritten Schritt werden die von der Häufigkeit abhängigen Übergangswahrscheinlichkeiten in einer Gleichung zusammengefasst. [3] Aus der letzten Tabelle kann man entnehmen, dass $\omega(+|\theta_i)$ in den ersten sieben Fällen immer gleich $f_+^{(2)}$ ist. Nur der Fall von Frustration muss extra behandelt werden. Die Gleichungen für die verschiedenen Zustände lauten [3]:

$$\omega(+|\theta_i) = \kappa(f_+)f_+^{(2)} ; \quad \kappa(f_+) = \begin{cases} 1 & \text{(keine Frustration)} \\ 2\sigma f_+^{(1)} + 2(1 - \sigma)(1 - f_+^{(1)}) & \text{(Frustration)} \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\omega(-|\theta_i) = \kappa(f_-)f_-^{(2)} ; \quad \kappa(f_-) = \begin{cases} 1 & \text{(keine Frustration)} \\ 2\sigma f_-^{(1)} + 2(1 - \sigma)(1 - f_-^{(1)}) & \text{(Frustration).} \end{cases} \quad (2.9)$$

Somit lässt sich das Sznajd-Modell in Form des Voter-Modells ausdrücken. [3] Dabei hängen die Übergangswahrscheinlichkeiten aber hauptsächlich von den Häufigkeiten der Meinungen der zweitnächsten Nachbarn ab, $f_+^{(2)}$, $f_-^{(2)}$. [3] $f_+^{(1)}$ und $f_-^{(1)}$ fließen nur im Fall von Frustration mit in den Vorfaktor κ ein. In dem Fall entspricht die Übergangswahrscheinlichkeit einer nichtlinearen Voter-Regel. [3] Setzt man $\sigma = 0.5$ lässt sich dieser Fall vermeiden, denn dann wird κ auch im Fall von Frustration gleich eins. Diese Einschränkung ist vertretbar, da die Möglichkeit Frustration zu berücksichtigen die ursprüngliche Idee des Sznajd-Modells überschreitet. [3] Die Gleichungen (2.8) und (2.9) lassen sich dann zu einer komplett linearen Voter-Regel reduzieren, die für alle Fälle gilt [3]:

$$\omega(+|\theta_i) = f_+^{(2)} ; \quad \omega(-|\theta_i) = f_-^{(2)} \quad (\text{für } \sigma = 0.5) \quad (2.10)$$

Zusammengefasst zählen nur folgende drei Fälle aus dem Voter-Modell für das Sznajd-Modell [3]:

$f_+^{(2)}$	$\omega(+ \theta_i)$	$\omega(- \theta_i)$
1	1	0
0	0	1
0.5	0.5	0.5

Die zwei Regeln aus dem Sznajd-Modell lassen sich zu einer Regel kombinieren: *Folge einfach deinem zweitnächsten Nachbarn.* [3]

Diese Herleitung basiert auf theoretischen Untersuchungen der möglichen lokalen Konfigurationen. [3] Die lineare Regel (2.10) stimmt aber auch numerisch mit den Dynamiken des Sznajd-Modells überein. Behera und Schweitzer [3] haben dies mittels Computersimulationen herausgefunden. Mit den gleichen Anfangsdaten wie in den Monte-Carlo-Simulationen des ursprünglichen Sznajd-Modells (2.2.2) wird im Endzustand immer entweder ein Konsens oder die Koexistenz der beiden Zustände erreicht. [3] Dies sogar mit den gleichen Wahrscheinlichkeiten wie in den Simulationen des ursprünglichen Sznajd-Modells (2.2.2), mit 25% jeweils die ferromagnetischen Zustände und mit 50% der antiferromagnetische Zustand. [3] Ebenso folgt die Verteilung der Entscheidungszeiten $P(\tau)$ wieder einem Potenzgesetz mit Exponenten $-\frac{3}{2}$ und auch die Verteilung der Relaxationszeit $P(\mu)$ stimmt mit der des ursprünglichen Sznajd-Modells überein, welche näherungsweise logarithmisch ist. [3] Der einzige Unterschied besteht darin, dass sich die durchschnittliche Relaxationszeit im Voter-Modell im Vergleich zum Sznajd-Modell verdoppelt. [3] Dies lässt sich dadurch erklären, dass im Sznajd-Modell pro Update zwei Agenten gleichzeitig ihre Meinung ändern, während sich das im Voter-Modell auf nur einen Agenten beschränkt. Das lineare Voter-Modell mit $\sigma = 0.5$ stimmt also bezüglich der Dynamiken und Endzustände mit dem eindimensionalen Sznajd-Modell überein. [3] Daraus lässt sich schließen, dass es unwichtig ist, ob die Agenten wie im SM ihre Meinung an ihre Nachbarn übertragen oder wie im VM die Meinung ihrer Nachbarn übernehmen. [3]

2.4 Galams Modell

Das ursprüngliche Modell von Galam ist genauso wie das Voter- und das Sznajd-Modell ein binäres Modell mit nur zwei möglichen Zuständen $-1, +1$. Dabei bezeichnet -1 die Meinung für ein gewisses Thema zu sein und $+1$ die Meinung dagegen. [30] Das Modell besteht aus N Agenten, die sich zufällig in sogenannten Zellen zusammenfinden. Eine Zelle wird dabei nur durch die Anzahl k der Agenten in dieser Zelle definiert. [30] Die Idee besteht darin, dass Menschen sich im realen Leben immer wieder untereinander in kleinen Gruppen treffen, wie

zum Beispiel im Büro, zu Hause, in Restaurants usw. Sei a_k die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein bestimmter Agent in einer Zelle der Größe k befindet. [30] Es gilt $\sum_k a_k = 1$.

Die Dynamiken des Modells sehen folgendermaßen aus [30]: Zu Beginn wird die Größe der einzelnen Zellen festgelegt und zwar bezüglich der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\{a_k\}$, sodass die Summe der Zellgrößen gleich der Anzahl N der Agenten ist. Die Lage und Form der Zellen werden nicht festgelegt. Während des gesamten dynamischen Prozesses verändern sich die Zellen nicht. Jedem Agent wird anfangs zufällig eine Meinung $\theta_i \in \{-1, +1\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, zugeordnet. $P_{+1}(t)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass ein Agent zum Zeitpunkt t Meinung $+1$ vertritt. [30] Entsprechendes gilt für $P_{-1}(t) = 1 - P_{+1}(t)$. $P_{+1}(t)$ kann auch als der Anteil der Agenten gesehen werden, die Meinung $+1$ zum Zeitpunkt t haben. [30] Anschließend werden die N Agenten zufällig auf die verschiedenen Zellen verteilt. Alle Agenten innerhalb einer Zelle übernehmen die Meinung der Mehrheit in dieser Zelle. [30] Für gerade k kann Gleichstand zwischen den beiden Meinungen eintreten. In diesem Fall wird die Meinung übernommen, die mit dem Standpunkt $+1$ identifiziert werden kann, also gegen die Sache ist. Nachdem in jeder Zelle die gemeinsame Meinung ausgewählt und angenommen worden ist, steigt die Zeit um eine Einheit an, $t \rightarrow t + 1$. [30] Im Anschluss werden die Agenten wieder neu auf die verschiedenen Zellen verteilt.

Das besondere an diesem Modell ist die Erkenntnis, dass eine anfängliche Meinung, die in der Minderheit ist, sich auf lange Sicht gesehen durchsetzen kann. [30] Das liegt an der Gleichstandsregel, die im Fall von Gleichstand der Meinungen in einer Zelle Meinung $+1$ als gemeinsame Meinung wählt. Es existiert also ein Schwellenwert $p_c < \frac{1}{2}$ für die Anfangskonzentration der Agenten mit Meinung $+1$ (Meinung der Minderheit). [30] Für $P_{+1}(0) > p_c$ übernimmt im Laufe der Zeit jeder Agent die Meinung der anfänglichen Minderheit. [30]

Die Dichte der Agenten mit Meinung $+1$ zum Zeitpunkt $t + 1$ lässt sich rekursiv berechnen durch die Dichte der Agenten mit Meinung $+1$ zum Zeitpunkt t und zwar durch [30]

$$P_{+1}(t+1) = \sum_{k=1}^M a_k \sum_{j=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^k \binom{k}{j} P_{+1}(t)^j [1 - P_{+1}(t)]^{k-j}. \quad (2.11)$$

Entsprechendes gilt für Meinung -1 [30]:

$$P_{-1}(t+1) = \sum_{k=1}^M a_k \sum_{j=\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}^k \binom{k}{j} P_{-1}(t)^j [1 - P_{-1}(t)]^{k-j}.$$

Dabei steht $[x]$ für den ganzzahligen Teil von x und M für die maximal erlaubte Zellengröße. [30] Die Binomialverteilung in (2.11) gibt die Wahrscheinlichkeit wieder unter k Agenten genau j mit Meinung $+1$ auszuwählen. Zum Zeitpunkt $t + 1$ haben aber nur die Agenten Meinung $+1$, die sich zum Zeitpunkt t in einer Zelle befinden, in der entweder Gleichstand zwischen den Meinungen $+1$ und -1 herrscht oder aber Meinung $+1$ in der Mehrzahl ist. Somit zählen nur die Möglichkeiten ab $j = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$. Das ganze wird mit der Wahrscheinlichkeit multipliziert, dass

sich überhaupt ein bestimmter Agent zum Zeitpunkt t in einer Zelle der Größe k befindet und zwar summiert über alle möglichen Zellengrößen $k = 1, \dots, M$.

Für die meisten Verteilungen $\{a_k\}$ hat diese Abbildung drei Fixpunkte [30]: zwei stabile bei $P_{+1} = 1$ und $P_{+1} = 0$ und einen labilen bei $P_{+1} = p_c$. Daher gilt für die Dynamiken [30]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{+1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } P_{+1}(0) > p_c \\ 0, & \text{falls } P_{+1}(0) < p_c. \end{cases} \quad (2.12)$$

Für die Simulationen des Modells betrachtet man nun N Agenten, die sich zufällig auf die Zellen aufteilen, deren Größe gleichverteilt ist zwischen 1 und M . [30] Für a_k gilt dann [30]

$$a_k = \frac{2k}{M(M+1)}, \quad k \in [1, M].$$

Je größer eine Zelle, desto wahrscheinlicher ist es auch für einen bestimmten Agenten, sich in dieser Zelle zu befinden.

Zu Beginn bekommt jeder der Agenten eine der zwei möglichen Meinungen entsprechend der Anfangswahrscheinlichkeit $P_{+1}(0)$ zugeteilt. Anschließend werden die Dynamikregeln des Modells angewandt bis sich eine Konsensmeinung herausbildet. [30]

Sei ρ die Wahrscheinlichkeit, dass die Konsensmeinung mit Meinung $+1$ übereinstimmt, also quasi der Anteil an Realisationen, der mit $+1$ endet. [30] Es findet ein Phasenübergang erster Ordnung statt in dem Sinne, dass $\rho = 0$ gilt, falls $P_{+1}(0) < p_c$, und $\rho = 1$, falls $P_{+1}(0) > p_c$. [30] Für den Schwellenwert p_c gilt, dass er umso näher an $\frac{1}{2}$ liegt, desto größer die Zellengröße M ist. [30]

Gleichung (2.12) gilt aber nur im Falle von $N \rightarrow \infty$. [30] Für kleinere Populationen geht aus der Bedingung $P_{+1}(0) > p_c$ nicht automatisch hervor, dass im Endzustand auch Meinung $+1$ die Konsensmeinung ist. [31] Es entstehen endliche Größenschwankungen, sodass das Ergebnis der Dynamiken im endlichen Fall mit einer großen Wahrscheinlichkeit von dem im Grenzwertfall ($N \rightarrow \infty$) abweicht, wenn die Differenz zwischen den anfänglichen Befürwortern von $+1$ und dem Schwellenwert in der Größenordnung $|P_{+1}(0) - p_c| \sim N^{-1/2}$ liegt. [31]

Interessant ist auch die Betrachtung der Relaxationszeit T . Diese gibt an in welcher Zeit der Endzustand, in diesem Fall ein Konsens, erreicht wird. Dies geschieht nach einer endlichen kleinen Anzahl an Iterationen. [31] Für eine endliche Zahl an Agenten kann man T als die Größe angeben für die $P_{+1}(T) = 1/N$ (-1 Mehrheit) oder $P_{+1}(T) = 1 - 1/N$ ($+1$ Mehrheit) gilt, was bedeutet, dass der größte Anteil der Agenten bereits die gleiche Meinung vertritt. [31] Dies gilt, da $1/N$ der kleinste mögliche Wert für $P_{+1}(0)$ ist über $P_{+1}(0) = 0$. [30] Dabei steigt die Relaxationszeit bis zum Konsens logarithmisch mit N an, $T \sim \ln N$. [31]

Betrachtet man die Relaxationszeit in Abhängigkeit von $P_{+1}(0)$, so fällt auf, dass sie in der Nähe des Schwellenwertes p_c stark ansteigt. [31] Diese Verlangsamung lässt sich dadurch erklären, dass das System anfangs nur sehr langsam von dem labilen Fixpunkt p_c wegkommt [31], da dort immer wieder ein Wechsel zwischen den beiden Meinungen vorkommt. Für $N \rightarrow \infty$

findet daher ein richtiger Phasenübergang statt von dem Zustand, der von der einen der zwei Meinungen dominiert wird, zu dem, der von der anderen Meinung dominiert wird. [31] In endlichen Systemen ist der Übergang nicht so scharf und Skalierungsgesetze für endliche Größen können zur Analyse der Ergebnisse benutzt werden. [31]

2.5 Die Modelle von Hegselmann-Krause und Deffuant-Weisbuch

Im Weiteren geht es um zwei stetige Meinungsmodelle mit *bounded confidence*, die unabhängig von R. Hegselmann und U. Krause (HK-Modell) und von G. Deffuant und anderen (DW-Modell) 2000 präsentiert wurden [16]. In beiden Modellen haben die Agenten stetige Meinungen ausgedrückt mittels reeller Zahlen, die sie Schritt für Schritt mit den Agenten abstimmen, die ähnliche Meinungen haben [16]. An der Stelle kommt *bounded confidence* (siehe bei „Mehr Dimensionen, mehr Meinungen“) ins Spiel. Die Agenten außerhalb des Konfidenzbereichs eines Agenten haben somit keinen Einfluss auf dessen Meinung.

Ein Unterschied zwischen beiden Modellen besteht in der Art und Weise wie ein Agent bei der Meinungsbildung die Agenten in seinem Konfidenzbereich berücksichtigt. Bei dem HK-Modell nimmt jeder Agent die durchschnittliche Meinung aller Agenten an, die in seinem Konfidenzbereich liegen, inklusive sich selbst [16]. Bei dem DW-Modell stoßen die Agenten zufällig paarweise zusammen und schließen einen Kompromiss, falls beide Agenten im jeweiligen Konfidenzbereich des anderen liegen, andernfalls passiert nichts. Für den Kompromissfall existiert ein Parameter, der bestimmt wie nah ein Agent an die Meinung des anderen Agenten herankommt. [16] Zuerst hat man angenommen dieser Parameter hätte im Grundmodell nur Einfluss auf die Konvergenzgeschwindigkeit. Später hat sich aber herausgestellt, dass er auch Einfluss auf die Anzahl der Agenten hat, die außerhalb der großen Meinungsanhäufungen als Minderheiten existieren. Der Effekt ist aber recht klein und kann daher vernachlässigt werden. [17] Der andere Unterschied besteht in der Art der Iteration. Bei HK geschieht diese parallel, das heißt alle Agenten passen ihre Meinung gleichzeitig an entsprechend der Dynamiken in einem Zeitschritt. Das entspricht eher dem Ansatz der Meinungsbildung in einem Meeting, in dem sich nur ein paar Agenten austauschen. Bei DW findet die Iteration zufällig in Reihe statt. Das heißt, pro Zeitschritt verändern nur die zwei beliebig ausgewählten Agenten ihre Meinungen. Dieser Ansatz entspricht eher der Meinungsbildung in einer großen Gruppe, in denen sich die Agenten nur in kleine Gruppen begegnen, wie z.B. als Paar. [32]

Die zwei Modelle haben beide den gleich Rahmen. Seien $i = 1, \dots, n$ die interagierenden Agenten und $\theta_i(t)$ die Meinung von Agent i zum Zeitpunkt $t = 0, 1, 2, \dots$ [11]. Für den stetigen Meinungsraum S gilt $S \subseteq \mathbb{R}^d$, wobei d die Meinungen für d verschiedene Bereiche repräsentiert. Für gewöhnlich sind nur kompakte und konvexe Meinungsräume geeignet. Im einfachsten Fall gilt $\theta_i(t) \in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, der hier der Einfachheit halber zugrunde gelegt wird [16]. ϵ_i sei die Vertrauensschranke von Agent i . Das heißt, bezüglich eines Meinungsprofils $\theta(t) = (\theta_1(t), \dots, \theta_n(t))$ interagiert Agent i nur mit Agenten, die in dessen Konfidenzbereich $I(i, \theta(t)) = \{1 \leq j \leq n \mid |\theta_i(t) - \theta_j(t)| \leq \epsilon_i\}$ liegen [11]. i liegt selbst auch im Konfidenzbereich und das dazugehörige Intervall $[-\epsilon_i, \epsilon_i]$ ist symmetrisch.

2.5.1 Prozess der Meinungsbildung bei Hegselmann-Krause

Bei dem HK-Modell gewichtet Agent i alle Agenten in seinem Konfidenzbereich gleich. Für seine Meinung zum Zeitpunkt $t + 1$ bildet Agent i das arithmetische Mittel über alle Agenten in $I(i, \theta(t))$ zum Zeitpunkt t

$$\theta_i(t + 1) = \frac{1}{|I|} \sum_{j \in I} \theta_j(t) \quad \text{für } t = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei I gleich $I(i, \theta(t))$ bedeutet und $|I|$ die Anzahl der Agenten in I . [11]

Nach diesem Prinzip passt jeder Agent in jedem Zeitschritt t seine Meinung den anderen Meinungen in seinem Konfidenzbereich an. Ausgegangen von einem Anfangsprofil $\theta(0) = (\theta_1(0), \dots, \theta_n(0)) \in [0, 1]^n$ definiert sich so rekursiv der HK-Prozess $(\theta(t))_{t \in \mathbb{N}}$ für alle n Agenten. [16] Im Gegensatz zum Sznajd-Modell beeinflussen hier nicht die einzelnen Agenten ihre Nachbarn, sondern lassen sich von diesen beeinflussen. Man sagt dazu, dass die Informationen nach innen fließen und nicht wie beim Sznajd-Modell nach außen. [27]

Das Modell heißt homogen, falls die Konfidenzintervalle für alle Agenten gleich sind, $\epsilon_1 = \dots = \epsilon_n$, andernfalls heißt es heterogen. Es hat sich herausgestellt [7][18], dass der homogene Prozess immer in endlicher Zeit gegen einen Grenzwert des Meinungsprofils konvergiert. Die gleiche Konvergenz kann man in der Simulation für den heterogenen Fall beobachten, jedoch geschieht dies nicht in endlicher Zeit. Im homogenen Fall entsteht am Ende immer ein fixer Endzustand für den gilt, dass zwei Meinungen θ_i, θ_j entweder gleich sind oder aber mehr als die homogene Vertrauensschranke ϵ auseinander liegen. [16]

2.5.2 Die Simulation des HK-Modells

Für stetige, eindimensionale und normalisierte Meinungen $\theta \in [0, 1]$ machen nur Konfidenzintervalle mit $0 \leq \epsilon \leq 1$ Sinn. Die Größe dieser Konfidenzintervalle ist für den Ausgang des Modells sehr wichtig. Um dies zu analysieren, haben Hegselmann und Krause [11] angenommen, dass alle Agenten das gleiche Konfidenzintervall mit $0 \leq \epsilon \leq 1$ haben. Sei 625 die Anzahl der Agenten, die am Anfang jeweils mit Hilfe einer beliebig erzeugten Wahrscheinlichkeitsverteilung eine Meinung $\theta_i(0) \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, 625$, annehmen. Das Update der einzelnen Agenten erfolgt simultan. Folgende drei Beispiele von Hegselmann und Krause [11] für Single Runs mit ansteigendem $\epsilon \in [0, 1]$ zeigen die Bedeutung von ϵ . Für das sehr kleine Konfidenzintervall mit $\epsilon = 0.01$ überleben am Ende genau 38 verschiedene Meinungen. Für $\epsilon = 0.15$ sind es nur noch 2 Meinungen bis hin zum Konsens für $\epsilon = 0.25$. Alle drei Single Runs brauchen weniger als 15 Perioden bis zu einem stabilen Endzustand, wobei alle Meinungen mehr als ϵ auseinander liegen. [11]

Hegselmann und Krause [11] haben nicht nur die Single Runs untersucht, sondern auch allgemeiner systematische Simulationen durchgeführt für $\epsilon = 0; 0.01; 0.02; 0.03; \dots; 0.4$. Für $\epsilon > 0.4$ hat sich gezeigt, dass nichts neues passiert. Die Durchführung sieht mit den Voraus-

setzungen von oben für die Single Runs folgendermaßen aus. Für jedes der 41 verschiedenen ϵ 's werden die Simulationen 50 Mal wiederholt, immer mit einer anderen Startverteilung der Meinungen. Jeder Durchlauf wird so lange fortgeführt bis die Dynamiken stabil sind. Für simultanes Updating geschieht dies meist schon innerhalb der ersten 20 Perioden. Nimmt man am Ende den Durchschnitt über alle stabilen Endzustände, stellt sich heraus, dass im Fall von geringem Vertrauen in die Meinungen anderer, wie z.B. für $\epsilon = 0.01$ oder $\epsilon = 0.02$, in jedem Teilintervall des gesamten Meinungsraums $[0, 1]$ (z.B. aufgeteilt in 100 Meinungsintervalle) eine gleichmäßiger Anteil an Meinungen zu finden ist. Das heißt, alle Meinungen haben eine ähnlich kleine Zahl an Anhängern. Dies verändert sich mit steigendem ϵ . Die Meinungen der Agenten nähern sich immer mehr an und häufen sich Richtung Mitte des Meinungsraums $[0, 1]$, weg von dessen Rand. Dies geschieht langsam für steigende ϵ bis rechts und links vom Zentrum 0.5 zwei Berge von Meinungen entstehen. Ein Beispiel dafür ist der oben vorgestellte Single Run für $\epsilon = 0.15$, der mit nur 2 überlebenden Meinungen endet, die weiter als $\epsilon = 0.15$ auseinander liegen. Ungefähr bei $\epsilon = 0.25$ verschwinden diese zwei Berge plötzlich und im Zentrum des Meinungsraums bildet sich ein einzelner steiler und hoher Berg, der nur noch viele sehr ähnliche Meinungen beinhaltet. Die restlichen Meinungen sterben aus. Für den Fall eines Single Runs steht dies meist für einen Konsens. Das heißt, je mehr weiterentfernte Meinungen anderer die Agenten bei ihrer Meinungsanpassung mit einbeziehen (je größer ϵ), desto eher stellt sich ein Konsens ein. Einen stabilen Endzustand in endlicher Zeit gibt es bei diesen Voraussetzungen von Symmetrie, Homogenität und dem arithmetischen Mittel immer, unabhängig von der Größe von ϵ . [11]

2.5.3 Erweiterungen und Modifikationen des HK-Modells

2.5.3.1 Das HK-Modell mit diskreten Meinungen

Interessant ist die Frage, ob es einem Konsens-Modell möglich ist reale Situationen zu beschreiben. [8] Häufig ist es in der Realität so, dass man nur die Wahl zwischen einer begrenzten Anzahl an Möglichkeiten hat, wie zum Beispiel bei Wahlen. Dort können die Wähler zwischen einer begrenzten Anzahl an möglichen Parteien oder Kandidaten wählen. Deshalb ist es sinnvoll das ursprüngliche HK-Modell auch mit ganzzahligen Meinungen zu betrachten.

Die Meinungen können im diskreten HK-Modell die Werte $1, 2, 3, \dots, Q$ annehmen. In diesem Fall beträgt die Vertrauensschranke ϵ für alle Agenten 1. Das heißt, dass sich die Agenten nur von direkt benachbarten Meinungen beeinflussen lassen. Das entspricht im ursprünglichen HK-Modell $\epsilon = \frac{1}{Q}$. [8]

Der ursprüngliche Algorithmus des HK-Modells lässt sich leider nicht mehr anwenden, da bei dem Meinungsupdate eines Agenten der Durchschnitt der Meinungen in dessen Konfidenzbereich berechnet wird und dieser in den meisten Fällen keine ganze Zahl wäre. [8] Abhilfe schafft eine wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungsweise. [8] Angenommen Agent i hat Meinung k und diese soll upgedatet werden. Agent i berücksichtigt dabei aufgrund von $\epsilon = 1$

nur Agenten mit Meinung $k - 1$, k und $k + 1$. Sei n_k die Anzahl an Agenten mit Meinung k , entsprechend für $k - 1$ und $k + 1$. Dann beträgt die Anzahl an Agenten im Konfidenzbereich von Agent i $n = n_{k-1} + n_k + n_{k+1}$. Als sinnvolle Erweiterung des HK-Modells mit stetigen Meinungen kann man sagen, dass Agent i Meinung $k - 1$, k und $k + 1$ mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit $p_{k-1} = \frac{n_{k-1}}{n}$, $p_k = \frac{n_k}{n}$ und $p_{k+1} = \frac{n_{k+1}}{n}$ annimmt. [8]

Anfangs sind die Meinungen zufällig auf die Agenten verteilt. Dann werden die Meinungen mittels des Algorithmus sequentiell upgedatet und zwar in einem geordneten Durchlauf aller Agenten. Das Programm stoppt, wenn kein Agent mehr seine Meinung ändert während einer Iteration. [8]

Der Algorithmus im diskreten HK-Modell ist viel schneller als im stetigen HK-Modell. Im stetigen Fall dauert eine Iteration N^2 Zeitschritte, wobei N die Anzahl aller Agenten ist. [8] Bei jedem Update müssen alle Agenten durchlaufen werden, um die Agenten im jeweiligen Konfidenzbereich ausfindig zu machen und deren Durchschnitt zu berechnen. Im diskreten Fall ist nur die Wahrscheinlichkeit p_k von Bedeutung, also reicht es ein Meinungshistogramm n_k für $k = 1, 2, \dots, Q$ abzuspeichern. [8] Wird Meinung k von Agent i upgedatet, erhält man aus dem Histogramm direkt die Wahrscheinlichkeiten mit denen der Agent seine nächste Meinung annimmt. Nimmt Agent i beispielsweise Meinung j an, muss lediglich n_j um eins angehoben und n_k um eins verringert werden, um die neue Meinungsverteilung zu erlangen. [8] Anschließend kann die Meinung des nächsten Agenten upgedatet werden. Die Zeit für eine Iteration beträgt dann nur noch $3N$ Zeitschritte, wobei die 3 für die Anzahl der beim Update in Betracht gezogenen Meinungsklassen steht. [8] Somit können Systeme mit Millionen von Agenten simuliert werden, viel mehr als im ursprünglichen HK-Modell. [8]

Allerdings dauert die Konvergenz gegen einen stabilen Zustand etwas länger als im ursprünglichen Modell. [8] Für $Q \leq 10$ ist der Unterschied sehr groß. Dort beträgt im diskreten Fall die durchschnittlich benötigte Anzahl an Durchläufen ungefähr 100 bis 120 und im stetigen Fall ungefähr 10 bis 20. Für größere Q nähert sich der diskrete Fall langsam dem stetigen Fall an bis sie für $Q = 1000$ beide ungefähr im Schnitt bei 15 Durchläufen liegen. Der Grund dafür liegt bei der stochastischen Betrachtungsweise. [8] Die Meinungsverteilung ändert sich viel langsamer, wenn es den Agenten mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit erlaubt ist von einer Meinungsklasse in die benachbarte zu springen als wenn jeder Agent systematisch in die durchschnittliche Meinungsklasse verschoben wird. Außerdem ist die Standardabweichung der durchschnittlichen Entwicklungszeit des Systems im diskreten Modell viel größer als im stetigen Modell, was auf starke Schwankungen hinweist. [8]

Die Simulationen dieses Modells ergeben, dass es eine Schranke $Q_c = 7$ gibt, derart dass für alle $Q \leq Q_c$ immer ein Konsens erreicht wird. [8] Dabei besteht für $Q = 7$ und eine kleine Anzahl N an Agenten noch eine gewisse Wahrscheinlichkeit, dass im Endzustand mehr als eine Meinungsklasse überlebt. Aber diese Wahrscheinlichkeit fällt stark mit zunehmenden N bis für $N = 10000$ alle Beispiele einen Konsens erreichen. Für $Q = 8$ dagegen liegt die Wahrscheinlichkeit für mehr als eine überlebende Meinungsklasse im Endzustand für $N = 10000$ bei eins.

[8] Diese Schwelle liegt im Sznajd-Modell mit mehr Meinungen (siehe (2.2.3.3)) zwischen 3 und 4. Das zeigt, dass das diskrete HK-Modell geeigneter ist, um zu erklären wie konkurrierende Gruppen eine Einigung finden können. Man kann damit zum Beispiel die Stabilität einer politischen Koalition mit mehreren verschiedenen Parteien begründen. [8]

2.5.4 Prozess der Meinungsbildung bei Deffuant-Weisbuch

Im DW-Modell werden in jedem Zeitschritt zufällig zwei Agenten $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$, ausgewählt. Für diese gilt [29]:

$$\theta_i(t+1) = \begin{cases} \theta_i(t) + \mu(\theta_j(t) - \theta_i(t)), & \text{für } |\theta_i(t) - \theta_j(t)| \leq \epsilon_i, \\ \theta_i(t), & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\mu \in [0, 1/2]$ ein Konvergenzparameter ist. Das Entsprechende gilt für Agent j mit i und j vertauscht. Das heißt also, dass die Agenten wieder nur miteinander agieren, wenn die Differenz ihrer Meinungen unterhalb einer gegebenen Vertrauensschanke ϵ_i liegt [29]. Ansonsten behalten die Agenten ihre vorherige Meinung unverändert bei. Im Gegensatz zum HK-Modell wird hier der Rest der Agenten im Konfidenz-Set eines Agenten außer Acht gelassen. Im DW-Grundmodell wird angenommen, dass die Vertrauensschanke ϵ während der gesamten Zeit für alle Agenten gleich ist [29]. Dies ist natürlich wie bei HK veränderbar.

Es hat sich herausgestellt [13], dass der homogene Prozess immer gegen ein Grenzwertprofil konvergiert. Im Gegensatz zu dem Modell von HK geschieht dies jedoch nicht in endlicher Zeit. Das Gleiche lässt sich im heterogenen Fall mit verschiedenen Vertrauensschränken beobachten, wozu jedoch der Beweis fehlt. Im homogenen Fall bedeutet Grenzwertprofil wie bei HK, dass zwei beliebige Meinungen entweder gleich sind oder mehr als ϵ auseinander liegen. Somit sind in dem Zustand keine weiteren Meinungsveränderungen mehr möglich. [16]

2.5.5 Die Simulation des DW-Modells

Die zeitliche Veränderung der Meinungsdichte $\frac{dp(\theta_i(t))}{dt}$ unterliegt laut G. Weisbuch [29] den folgenden Dynamiken:

$$\frac{dp(\theta_i(t))}{dt} = -\frac{\epsilon^3}{2} \cdot \mu \cdot (1 - \mu) \cdot \frac{\partial^2(p^2)}{\partial \theta_i(t)^2}. \quad (2.13)$$

Beginnt man mit einer beliebigen Anfangsverteilung von Meinungen auf alle Agenten, besagt diese Gleichung, dass mit der Zeit örtliche höhere Meinungsdichten vergrößert werden, wohingegen die niedrigeren Hügel verschwinden. Es bilden sich so nach langer Zeit schmale Spitzen von Meinungen heraus, wie auch bei HK, in denen alle dazugehörigen Agenten die gleiche Meinung vertreten. Wie viele Meinungen am Ende überleben, hängt wiederum von der Größe der Vertrauensschanke ab. [29]

Für große Vertrauensschranken ($\epsilon > 0.3$) gibt es am Ende einen Konsens, das heißt alle Agenten enden mit der gleichen Meinung. Für niedrigere Werte von ϵ überleben am Ende mehrere Meinungen. Die Anzahl ändert sich entsprechend dem ganzzahligen Teil von $\frac{1}{2\epsilon}$. Dies wird auch die „ $\frac{1}{2\epsilon}$ -Regel“ genannt. Ein Konsens ist für ganz kleine Werte von ϵ gar nicht mehr möglich. [29]

2.5.6 Erweiterungen und Modifikationen des DW-Modells

2.5.6.1 Soziale Netzwerke im DW-Modell

In der Aufstellung des bisherigen Modells von DW sind die Agenten nicht angeordnet, sondern es können zu jedem Zeitpunkt zufällig zwei Agenten ausgewählt werden, die übertragen auf das reale Leben nichts miteinander zu tun haben. Deshalb kann es sinnvoll sein auch für dieses Modell ein soziales Netzwerk zwischen den Agenten aufzustellen. Es wird angenommen, dass sich ein Mensch in einer wichtigen Entscheidung eher von Menschen in seinem Umfeld, wie z.B. Familie, Arbeit oder Ärzte, beeinflussen lässt als von irgendeinem Fremden.

Vereinfacht kann das Netzwerk wie auch schon im Sznajd-Modell in Form eines Gitters dargestellt werden auf dessen Knotenpunkten die Agenten sitzen. Ein beliebig gewählter Agent kann dann im zweidimensionalen Fall nur mit seinen nächsten vier Nachbarn interagieren, vorausgesetzt die Differenzen der Meinungen dieser liegen unter der Vertrauensschranke ϵ . In dem Fall wird wie eben die Dynamikregel auf die zwei beliebig gewählten Nachbarn angewandt. Ausgegangen von der gleichen beliebigen Anfangsverteilung der Meinungen wie oben, unterscheiden sich die Ergebnisse mit und ohne Netzwerk nicht allzu stark. Für große Vertrauensschranken $\epsilon > 0.3$ fällt auf, dass es neben dem Konsens um 0.5 mehr Extremisten nahe 0 oder 1 gibt, die auf dem Gitter vereinzelt zwischen den Agenten sitzen, die dem Konsens angehören. Für kleinere Werte $\epsilon < 0.3$ bilden sich am Ende mehrere verschiedene Meinungen heraus. [29]

2.5.6.2 Anwesenheit weniger Extremisten im DW-Modell

Interessant ist die Frage nach dem Ausgang des DW-Modells, wenn man diesem einige Extremisten hinzufügt. Um dies zu untersuchen, kommen zu dem ursprünglichen Modell zwei Erweiterungen hinzu. Zum einen werden dem Modell ein paar Extremisten hinzugefügt, die ihre Meinungen an den Rändern des Meinungsraums positionieren und deren Vertrauensschranke sehr gering ist. Dies ist einleuchtend, da Extremisten von ihrer eigenen Meinung meist überzeugter sind als andere und sich nicht so leicht beeinflussen lassen. Zum anderen werden im Falle einer Interaktion zwischen zwei Agenten neben deren Meinungen auch deren Vertrauensschranken folgendermaßen angepasst [32]:

$$\epsilon_i = \epsilon_i + \mu \cdot (\epsilon_j - \epsilon_i)$$

Für ϵ_j geschieht dies entsprechend.

Da bei diesem Modell die Vertrauensschranken der interagierenden Agenten unterschiedlich sein können, kann der Einfluss der Agenten aufeinander asymmetrisch sein: Der tolerantere Agent (mit der größeren Vertrauensschranke) wird von dem weniger toleranteren Agenten (mit der kleineren Vertrauensschranke) beeinflusst, während der weniger tolerantere Agent gar nicht beeinflusst wird. Dies ist der Grund für die Entstehung einer Gruppe von Extremisten. [32] Die Extremisten behalten ihre Meinung bei, während die anderen Agenten in deren Nähe mit ihrer Meinung immer näher an die Extremisten heranrücken.

Simuliert man dieses Modell unter der Annahme, dass die Meinungen der N Agenten anfangs gleichverteilt sind auf dem Intervall $[0, 1]$, so ergibt sich vereinfacht folgendes: Je größer die Interaktionsschwelle und somit die Toleranz der Nichtextremisten ist (ca. $\epsilon_{ne} > 0.5$), desto eher setzen sich die Extremisten mit ihrer Meinung durch und sammeln Anhänger um sich herum an. [32]

Ist die Interaktionsschwelle der Nichtextremisten gering (ca. $\epsilon_{ne} < 0.5$), verhalten diese sich so als wären keine Extremisten gegenwärtig. Die Extremisten bleiben folglich isoliert. [32]

2.5.7 Gemeinsame Erweiterungen der Modelle von Hegselmann-Krause und Weisbuch-Deffuant

2.5.7.1 Die dichtebasierten Modelle von HK und DW

Bisher sind beide Modelle für eine endliche Zahl von n Agenten simuliert worden. Betrachtet man aber die Dichte der Agenten im Meinungsraum $S \subset \mathbb{R}^d$ mit Hilfe der Dichtefunktion, kann man von einer unendlichen Zahl von Agenten ausgehen. Man kann diesen Ansatz auch als Grenzwertbetrachtung $n \rightarrow \infty$ des ursprünglichen Modells interpretieren. [16]

In diesem dichtebasierten Modell ist die zu betrachtende Variable nicht wie zuvor das Meinungsprofil $\theta(t) \in [0, 1]^n$, sondern die Dichtefunktion auf dem Meinungsraum $P(t, \cdot) : S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\int_S P(t, \theta) d\theta = 1$ für alle t . Ausgehend von einer gegebenen Anfangs-Dichtefunktion $P(0, \cdot)$ verfolgt man die zeitliche Entwicklung der Dichtefunktion. Die Zeit kann dazu als diskret oder stetig angenommen werden. [16]

Für den zeitlich stetigen Fall betrachtet man die Differentialgleichung $\frac{\partial}{\partial t} P(t, \theta) = g(P(t, \cdot))$, wobei g auf dem Meinungsraum der Dichtefunktionen operiert. [16] Anschließend versucht man die Differentialgleichung analytisch oder mit Hilfe von numerischen Verfahren zu lösen. Im zeitlich diskreten Fall wird der Differentialoperator mit dem diskreten Differenzoperator ausgetauscht, woraus sich folgende Gleichung ergibt: $\Delta P(t+1, \theta) = P(t+1, \theta) - P(t, \theta) = g(P(t, \cdot))$, deren Lösung sich rekursiv berechnen lässt durch $P(t+1, \theta) = P(t, \theta) + \Delta P(t+1, \theta)$. [16]

Angewandt auf das zeitlich stetige DW-Modell mit homogener Vertrauensschranke ϵ ergibt sich folgende Differentialgleichung [16]:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, \theta) = \int_S d\theta_1 \int_{\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \epsilon} d\theta_2 \left(P(t, \theta_1) P(t, \theta_2) \left(\underbrace{2\delta\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)}_{\text{Anteil mit Zustand } \theta} - \underbrace{(\delta(\theta - \theta_1) + \delta(\theta - \theta_2))}_{\text{Anteil, der Zustand } \theta \text{ verlässt}} \right) \right), \quad (2.14)$$

wobei die δ -Funktion die Position repräsentiert, zu der die Masse der beiden Meinungen θ_1 und θ_2 hinspringt. [16]

(2.14) beschreibt die zeitliche Entwicklung der Dichte $P(t, \theta)$, die für die Wahrscheinlichkeit des Meinungsprofils θ zum Zeitpunkt t steht. Zu einer zufällig gewählten Meinung θ_1 zum Zeitpunkt t kommt eine zweite zufällig gewählte Meinung θ_2 hinzu. Das Ergebnis der multiplizierten Wahrscheinlichkeiten dieser beiden Meinungen zum Zeitpunkt t multipliziert mit dem übriggebliebenen Anteil, der Zustand θ zum Zeitpunkt t nicht verlässt, entspricht der Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt t genau die Meinungen θ_1 und θ_2 auszuwählen. Dies integriert über alle möglichen Meinungen θ_2 , die in der ϵ -Umgebung von θ_1 liegen, und das daraus resultierende Ergebnis noch einmal integriert über alle möglichen Meinungen $\theta_1 \in S$, ergibt die nach der Zeit differenzierte Dichte $\frac{\partial}{\partial t} P(t, \theta)$.

Die entsprechende Differentialgleichung für den heterogenen Fall des DW-Modells ist komplizierter, da die verschiedenen Vertrauensschranken berücksichtigt werden müssen. Dies geschieht durch Erweiterung des homogenen Falls, indem für jede Vertrauensschranke eine Dichtefunktion eingeführt wird. [17] Für ein Intervall $[\epsilon_1, \epsilon_2]$ möglicher Vertrauensschranken sei die Anfangsdichtefunktion auf dem Meinungsraum gekreuzt mit dem Intervall der Vertrauensschranken $P(0, \cdot, \cdot) : S \times [\epsilon_1, \epsilon_2] \rightarrow [0, \infty]$ mit $\int_S \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} d\theta d\epsilon P(0, \theta, \epsilon) = 1$. [16] Zur Abkürzung definiert man die gesamte Dichte durch $P(t, \theta) = \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} d\epsilon P(t, \theta, \epsilon)$. [16] Dann sieht die Erweiterung der Differentialgleichung des homogenen Falls des DW-Modells zum heterogenen Fall folgendermaßen aus [16]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t, \theta, \epsilon) = & \int_S d\theta_1 \left[\int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} d\bar{\epsilon} \left(\int_{\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \bar{\epsilon}} d\theta_2 \left[P(t, \theta_1, \bar{\epsilon}) P(t, \theta_2) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + P(t, \theta_1) P(t, \theta_2, \bar{\epsilon}) \right] \delta\left(\theta - \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \right) \right. \\ & \left. - \int_{\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \epsilon} d\theta_2 (P(t, \theta_1, \epsilon) P(t, \theta_2) \delta(\theta - \theta_1) + P(t, \theta_1) P(t, \theta_2, \epsilon) \delta(\theta - \theta_2)) \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Integriert wird zusätzlich über das Intervall $[\epsilon_1, \epsilon_2]$ der möglichen Vertrauensschranken.

Die Prozesse der homogenen und heterogenen zeitlich stetigen dichte-basierten DW-Modelle werden dann als die Lösungen der jeweiligen Anfangwertprobleme definiert. [16] Die Prozesse der zeitlich diskreten Fälle werden durch die Folge $(P(t, \cdot, \cdot))_{t \in \mathbb{N}}$ wiedergegeben, welche sich

rekursiv definieren lässt durch [16]

$$P(t + 1, \theta, \epsilon) = P(t, \theta, \epsilon) + \Delta P(t, \theta, \epsilon)$$

mit $\Delta P(t, \theta, \epsilon) = \frac{\partial}{\partial t} P(t, \theta, \epsilon)$.

Gleichung (2.14) erhält die Masse und die durchschnittliche Meinungsdichte. [4] In Gleichung (2.15) hingegen wird nur die Masse erhalten. Das lässt darauf schließen, dass im Fall von heterogenen Vertrauensschranken ein allgemeiner Drift zu extremeren Meinungen stattfindet. [16]

Für $S = [0, 1]$ und $\epsilon \geq 0.5$ konvergiert $P(t, \cdot)$ in Gleichung (2.14) für $t \rightarrow \infty$ gegen eine Grenzwertverteilung $P(\infty, \theta) = \delta(\theta - \theta_0)$, wobei θ_0 die durchschnittliche Meinung ist. [16] Für kleine ϵ ist anhand von Simulationen nachgeprüft worden [4], dass $P(\infty, \theta) = \sum_{i=1}^r m_i \delta(\theta - \theta_i)$ gilt, wobei r die Anzahl der sich entwickelnden Anhäufungen von Meinungen ist, $\theta_i \in [0, 1]$ die Position von der Anhäufung i und m_i dessen Masse. Alle Meinungsanhäufungen müssen die Erhaltungsgesetze, $\sum_{i=1}^r m_i = 1$ und $\sum_{i=1}^r \theta_i m_i$ ist gleich der erhaltenen durchschnittlichen Meinung, erfüllen. Außerdem muss für alle verschiedenen Meinungsanhäufungen $i \neq j$ $|\theta_i - \theta_j| > \epsilon$ gelten. Dies ist genauso wie im ursprünglichen Fall des DW-Modells. [16]

Die rechte Seite von Gleichung (2.14) hängt für gewöhnlich nicht stetig von $P(t, \cdot)$ ab. [16] Das bedeutet, dass dann keine oder höchstens eine nicht eindeutige Lösung existiert. Unstetigkeit gilt aber nur für den Fall, wenn $P(t, \cdot)$ δ -Funktionen beinhaltet und somit keine normale Funktion in θ ist, sondern eine Verteilung. Glücklicherweise hat sich gezeigt, dass sich die δ -Funktionen nicht während des Prozesses entwickeln, sondern nur bei der Grenzwertbetrachtung $t \rightarrow \infty$. Startet man also mit $P(t, \cdot)$ ohne δ -Funktionen, kann man die Bewegungsabläufe wie in [4] mit einem Adams-Bashfort-Algorithmus vierter Ordnung berechnen. [16]

Durch den Vergleich der Ergebnisse aus [4] und [19] hat sich herausgestellt, dass der zeitlich diskrete und der zeitlich stetige dichtebasierte DW-Prozess nahezu zu denselben Grenzwertdichten führen. Der zeitlich diskreten Fall kann mit einer interaktiven Markovkette definiert werden. Dazu wird zusätzlich zu der Zeit auch der Raum $P(t, \cdot)$ mit $p(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ diskretisiert. [16]

Anhand der Simulationen für eine gleichverteilte Anfangsdichte im Meinungsraum $[0, 1]$ für das homogene dichtebasierte DW-Modell kann man sehen, dass der ϵ -Übergang von der Polarisationsphase hin zum Konsens bei $\epsilon = 0.27$ liegt. [16] Ab da wird für steigende ϵ immer ein Konsens erreicht. Allerdings existieren nebenher immer noch kleine Meinungsanhäufungen (Nebenmeinungsanhäufungen) am Rand des Meinungsraums und für kleinere ϵ auch zwischen den Hauptmeinungsanhäufungen. [16] Das macht es schwerer die richtige Anzahl an Hauptmeinungsanhäufungen zu zählen. Aber man kann Beschränkungen einführen ab welcher Größe eine Meinungsanhäufung zu den Hauptmeinungsanhäufungen zählt.

Für das dichtebasierte HK-Modell benötigt man die Definition des Durchschnitts in der ϵ -Umgebung [16]

$$M_1(\theta, P(t, \cdot), \epsilon) = \frac{\int_{\theta-\epsilon}^{\theta+\epsilon} yP(t, y)dy}{\int_{\theta-\epsilon}^{\theta+\epsilon} P(t, y)dy}.$$

Dies steht für den Erwartungswert von $P(t, \cdot)$ im Intervall $[\theta - \epsilon, \theta + \epsilon]$. Der Zähler ist das erste Moment im ϵ -Intervall um θ und der Nenner die nötige Renormierung der Wahrscheinlichkeitsmasse in diesem Intervall. [16]

Die Differentialgleichung des zeitlich stetige HK-Modells mit homogener Vertrauensschränke ϵ lautet folgendermaßen [16]

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, \theta) = \int_S \underbrace{\delta(M_1(y, P(t, \cdot), \epsilon) - \theta)P(t, y)}_{\text{Anteil mit Zustand } \theta} - \underbrace{\delta(M_1(\theta, P(t, \cdot), \epsilon) - y)P(t, \theta)}_{\text{Anteil, der Zustand } \theta \text{ verlässt}} dy. \quad (2.16)$$

(2.16) beschreibt wieder die zeitliche Entwicklung der Dichte $P(t, \theta)$. Da im HK-Modell alle Agenten in jedem Zeitschritt ihre Meinung anpassen, werden nicht wie im DW-Modell zwei zufällig ausgewählte Meinungen θ_1 und θ_2 betrachtet, sondern der Durchschnitt M_1 in der ϵ -Umgebung des Meinungsprofils θ . Die nach der Zeit differenzierte Dichte $\frac{\partial}{\partial t} P(t, \theta)$ ergibt sich durch das Integral des verbleibenden Anteils mit Zustand θ zum Zeitpunkt t . Der verbleibende Anteil ergibt sich aus der Differenz des Anteils, der zum Zeitpunkt t schon Zustand θ hat oder der dort zum Zeitpunkt t hinzukommt und dem Anteil, der Zustand θ zum Zeitpunkt t verlässt. Integriert wird wieder über den gesamten Meinungsraum S , um alle möglichen Meinungen zu berücksichtigen.

Der heterogene Fall des HK-Modells ergibt sich wie im DW-Modell durch Erweiterung des homogenen Falls, indem für jede Vertrauensschränke eine Dichtefunktion eingeführt wird. [17] Sei $[\epsilon_1, \epsilon_2]$ wieder ein Intervall möglicher Interaktionsschwellen und die Anfangs-Dichtefunktion auf dem Meinungsraum gekreuzt mit dem Intervall der Interaktionsschwellen sei $P(0, \cdot, \cdot) : S \times [\epsilon_1, \epsilon_2] \longrightarrow [0, \infty]$ mit $\int_S \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} d\theta d\epsilon P(0, \theta, \epsilon) = 1$. [16] Zur Abkürzung definiert man die gesamte Dichte durch $P(t, \theta) = \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} d\epsilon P(t, \theta, \epsilon)$. [16] Dann ergibt sich folgende Differentialgleichung für das heterogene zeitlich stetige dichtebasierte HK-Modell [16]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t, \theta, \epsilon) = & \int_S dy \left[\left(\int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} d\bar{\epsilon} P(t, y, \bar{\epsilon}) \delta(\theta - M_1(y, P(t, \cdot), \bar{\epsilon})) \right) \right. \\ & \left. - P(t, \theta, \epsilon) \delta(y - M_1(\theta, P(t, \cdot), \epsilon)) \right]. \end{aligned}$$

Auch hier wird über das Intervall $[\epsilon_1, \epsilon_2]$ integriert, um alle möglichen Vertrauensschränken zu berücksichtigen.

Wie im dichtebasierten DW-Modell werden die Prozesse der homogenen und heterogenen zeitlich stetigen dichtebasierten HK-Modelle als die Lösungen der jeweiligen Anfangswertprobleme definiert. [16] Die Prozesse der zeitlich diskreten Fälle werden durch die Folge $(P(t, \cdot, \cdot))_{t \in \mathbb{N}}$

wiedergegeben, welche sich rekursiv definieren lässt durch [16]

$$P(t + 1, \theta, \epsilon) = P(t, \theta, \epsilon) + \Delta P(t, \theta, \epsilon)$$

mit $\Delta P(t, \theta, \epsilon) = \frac{\partial}{\partial t} P(t, \theta, \epsilon)$.

In [9] ist gezeigt worden, dass Gleichung (2.16) die Masse erhält. Die durchschnittliche Meinung wird nur im Falle von Symmetrie der anfänglichen Meinungsdichte um seinen Durchschnitt erhalten. Für andere Anfangsbedingungen ist dies im Allgemeinen nicht der Fall. [16]

Genau wie im dichte-basierten DW-Modell hängt die rechte Seite von Gleichung (2.16) im Allgemeinen nicht stetig von $P(t, \cdot)$ ab. [16] Aber im Gegensatz zum DW-Modell kann sich hier bei der Berechnung der rechten Seite von (2.16) eine schmale δ -Funktion in der Dichte bilden, auch wenn mit einem $P(t, \cdot)$ ohne δ -Funktionen gestartet wird. Somit ist nicht sicher, dass für jede Anfangsbedingung eine eindeutige Lösung existiert. Trotzdem sind in [9] Lösungen mit dem Runge-Kutta-Algorithmus berechnet und glatte Dynamiken erreicht worden. [16]

Anders als im DW-Modell unterscheiden sich der zeitlich diskrete und der zeitlich stetige Fall im dichte-basierten HK-Modell. Der zeitlich diskrete Fall lässt sich wieder als interaktive Markovkette definieren mit 1000 und 1001 Meinungsklassen. [16] Untersucht man diese, ergibt sich eine ϵ -Schwelle von 0.19 oberhalb derer sich immer ein Konsens bildet. Sie liegt deutlich unter dem Konsensübergang von 0.27 im DW-Modell. Dabei fällt auf, dass auch schon für kleinere ϵ als 0.19 ein Konsens erreicht wird, sich danach aber erst wieder eine Polarisationsphase entwickelt bevor die ϵ -Schwelle erreicht wird. [16] Außerdem spielt die Einteilung in 1000 und 1001 Meinungsklassen eine Rolle. Im Falle einer ungeraden Anzahl von Meinungsklassen wird schneller ein Konsens erreicht als im Falle einer geraden Zahl. Dies hängt damit zusammen, dass es im geraden Fall keine zentrale Meinungsklasse gibt, sondern sich die Masse auf zwei zentrale Meinungsklassen aufteilt, die sich eher wieder trennen können als wenn die gesamte Masse schon in einer zentralen Meinungsklasse liegt. [16] Ebenfalls hervorzuheben ist, dass im homogenen dichte-basierten HK-Modell keine kleinen Meinungsanhäufungen neben den Hauptmeinungsanhäufungen existieren wie im DW-Modell. [16]

Wie auch im dichte-basierten DW-Modell gilt wieder, dass jede Verteilung die Form

$$P(\infty, \theta) = \sum_{i=1}^r m_i \delta(\theta - \theta_i)$$

hat mit $|\theta_i - \theta_j| > \epsilon$ für alle $i \neq j$ und $\sum_{i=1}^r m_i = 1$. [16]

2.5.7.2 Heterogene Vertrauensschranken

Bisher sind nur die Auswirkungen einer homogenen Vertrauensschranke für alle Agenten betrachtet und untersucht worden. Da in der Realität aber selten alle Teilnehmer gleich offen für andere Meinungen sind, ist es sinnvoll dies in der Meinungsbildung der Agenten mit heterogenen Vertrauensschranken zu berücksichtigen. Zur Einfachheit wird das Modell mit nur zwei

verschiedenen Vertrauensschränken ϵ_1 und ϵ_2 definiert. Die Definition lässt sich aber auch leicht auf mehr als 2 Vertrauensschränken ausweiten. [17] Somit gibt es in diesem Modell einmal die offenen Agenten mit einer großen Vertrauensschränke und zum anderen die verschlossenen Agenten mit einer kleinen Vertrauensschränke. Ausgegangen wird dabei von den in Zeit und Raum diskreten dichte-basierten Modellen von DW und HK für heterogene Vertrauensschränken, da die stetigen Modelle für die numerischen Berechnungen sowieso diskretisiert werden müssten. [17] Für den Meinungsraum $[0, 1]$ bedeutet dies, dass das Intervall in n Meinungsklassen unterteilt wird. Somit müssen auch die beiden Vertrauensschränken ϵ_1 und ϵ_2 umgeformt werden zu $\varepsilon_1 = n\epsilon_1$ und $\varepsilon_2 = n\epsilon_2$. [17]

Für jede Vertrauensschränke wird ein Reihenvektor p^1 und p^2 definiert, wobei p_i^1 für den Anteil aller Agenten steht, der Meinung i vertritt und die Vertrauensschränke ε_1 hat. [17] Dies gilt entsprechend für p^2 . Zur Einfachheit gelte $p_i^j = 0$ für alle $i \notin \{1, \dots, n\}$, $j \in 1, 2$. Ein Vektor $p^j(t) \in \mathbb{R}^n$ steht für die Meinungsverteilung zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$ für die Vertrauensschränke ε_j . Für die Anteile aller Meinungsklassen für diesen Vektor muss gelten $\sum_{i,j} p_i^j = 1$. [17] Außerdem gelte $p(t) = p^1(t) + p^2(t)$, was für die Meinungsverteilung aller Agenten steht unabhängig von deren Vertrauensschränken. [17]

Angenommen die Agenten behalten ihre Vertrauensschränke immer bei. Dann lassen sich Übergangswahrscheinlichkeiten von einer Meinungsklasse in die nächste für eine fixe Vertrauensschränke ε_j definieren. [17] Daraus ergibt sich eine dynamische Übergangsmatrix $B(p(t), \varepsilon_j)$. [17] Seien $p^1(0)$ und $p^2(0)$ die Anfangsverteilungen. Dann sind die Folgen $(p^1(t))_{t \in \mathbb{N}_0}$ und $(p^2(t))_{t \in \mathbb{N}_0}$ interaktive Markovketten [14], deren Dynamiken sich rekursiv definieren lassen durch [17]

$$p^1(t+1) = p^1(t)B(p(t), \varepsilon_1)$$

$$p^2(t+1) = p^2(t)B(p(t), \varepsilon_2).$$

Für die beiden Modelle von Deffuant-Weisbuch und Hegselmann-Krause folgen nun die konkreten Definitionen der Übergangsmatrizen $B^{DW}(p(t), \varepsilon)$ und $B^{HK}(p(t), \varepsilon)$.

Im DW-Modell sieht diese folgendermaßen aus [17]

$$B_{ij}^{DW}(p, \varepsilon) := \begin{cases} \frac{\pi_{2j-i-1}^i + \pi_{2j-i}^i + \frac{\pi_{2j-i+1}^i}{2}}, & \text{falls } i \neq j, \\ q_i, & \text{falls } i = j \end{cases}$$

$$\text{mit } q_i = 1 - \sum_{j \neq i, j=1}^n B_{ij}^{DW}(p, \varepsilon) \text{ und } \pi_m^i := \begin{cases} p_m, & \text{falls } |i - m| \leq \varepsilon \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für das HK-Modell muss zuerst für die Meinungsklasse i der Durchschnitt in der ε -Umgebung definiert werden durch [17]

$$M_i(p, \varepsilon) := \frac{\sum_{k \in \{i-\varepsilon, i-\varepsilon+1, \dots, i+\varepsilon\}} kp_k}{\sum_{k \in \{i-\varepsilon, i-\varepsilon+1, \dots, i+\varepsilon\}} p_k}.$$

Damit lässt sich die Übergangsmatrix für das HK-Modell folgendermaßen definieren [17]

$$B_{ij}^{HK}(p, \varepsilon) := \begin{cases} 1, & \text{falls } j = M_i, \\ \lceil M_i \rceil - M_i, & \text{falls } j = \lfloor M_i \rfloor, j \neq M_i, \\ M_i - \lfloor M_i \rfloor, & \text{falls } j = \lceil M_i \rceil, j \neq M_i, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie eben schon erwähnt, führen der diskrete und der stetige Ansatz des dichte-basierten DW-Modells zu den gleichen Ergebnissen. Dies ist für das dichte-basierte HK-Modell nicht der Fall. [17] Somit gelten die folgenden Ergebnisse nur für den diskreten Ansatz. Außerdem spielt im HK-Modell die gerade und ungerade Anzahl der Meinungsklassen eine Rolle. Hier wird von einer ungeraden Anzahl ausgegangen, da es meist realistischer ist, wenn eine zentrale Meinungsklasse existiert. [17]

Die Ergebnisse der numerischen Berechnungen für diese Modellerweiterung basieren auf zwei gleich großen Gruppen von Agenten mit verschiedenen Vertrauensschranken ε_1 und ε_2 . Der Meinungsraum $[0, 1]$ ist in 201 Meinungsklassen aufgeteilt und es gilt

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \frac{10}{201}, \dots, \frac{70}{201} \approx 0.05, \dots, 0.35.$$

Die Agenten sind anfangs für beide Vertrauensschranken gleich auf die 201 Meinungsklassen verteilt. [17]

Das Interessante sind nun die Konsensübergänge. Diese kann man am besten anhand der Masse der größten Meinungsanhäufung ablesen. Stellt man die Größe der größten Meinungsanhäufung prozentual für alle $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ -Konstellationen zwischen 0.05 und 0.35 dar, so ergeben sich für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ die schon bekannten kritischen Werte für die Konsensübergänge 0.27 für das homogene DW-Modell und 0.19 für das homogene HK-Modell. [17] In den Fällen ist die Größe der größten Meinungsanhäufung also gleich 1.

Das überraschende Ergebnis tritt allerdings für die heterogenen Vertrauensschranken ein. In vielen Fällen ist sogar ein Konsens möglich, wenn ε_1 und ε_2 beide unterhalb des kritischen ε 's für den Konsensübergang im homogenen Fall liegen. [17]

Ein Problem bei den Simulationen ist der Zeitpunkt des Stoppens. [17] Im HK-Modell ist dieser noch verhältnismäßig einfach zu bestimmen, da das Modell in annehmbarer Zeit konvergiert. Das heterogene DW-Modell hat aber eine große Vielfalt an Konvergenztypen, die bisher noch nicht vollständig klassifiziert und verstanden worden sind. Die Konvergenz kann lange auf sich warten lassen und somit ist schwierig zu entscheiden, ob die Konvergenz noch zu einer weiteren drastischen Veränderung führt oder nicht. [17] Außerdem reduziert sich im DW-Modell die

Masse in den Meinungsklassen nie ganz auf null, was aber notwendig ist, um Meinungsanhäufungen zu bekommen. Die Masse der benachbarten Meinungsklassen einer Meinungsanhäufung muss nämlich gleich null sein. Für diese Simulationen ist die Masse einer Meinungsklasse gleich null, wenn sie kleiner als 10^{-4} ist. Für andere Kennzahlen könnte das Ergebnis der Simulationen für das DW-Modell ganz anders aussehen. [17]

2.5.7.3 Multidimensionale stetige Meinungsdynamiken

Bisher ist der Einfachheit halber nur der Meinungsraum $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ betrachtet worden. Andere Intervalllängen bringen keine neuen Erkenntnisse, da sie dieselben strukturellen Verhaltensweisen wiedergeben mit angepassten ϵ -Bereichen. [16] Wechselt man jedoch zu multidimensionalen Meinungen verändern sich die Ergebnisse. Anders als im eindimensionalen Fall, in dem die einzigen sinnvollen Meinungsräume Intervalle sind und die Abstandsmessung eindeutig definiert ist, kann man im multidimensionalen Fall jede konvexe Menge als Meinungsraum nehmen und die Abstandsmessung unterschiedlich definieren. [15] Allein das hat schon Einfluss auf die Ergebnisse. Hier sind die Meinungen der Agenten nichtnegative Vektoren, deren Komponenten sich zu eins aufaddieren lassen. Dies entspricht zum Beispiel der Allokation einer fixen Menge Geld auf n verschiedene Projekte. Somit ist jede Meinung ein Vorschlag eines Agenten für einen Budgetplan. [15] Es gibt drei Gründe den Einheitssimplex als Meinungsraum zu wählen. Erstens lässt sich damit die Budgetierungs-Beschränkung berücksichtigen, zweitens ist der Einheitssimplex das einfachste Polygon in höheren Dimensionen und drittens kann man das arithmetischen Mittel für die multidimensionalen Dynamiken benutzen. Letzteres ist nützlich, da in diesem Modell die Meinungsbildung eines Agenten eine Allokationszusammenfassung der Meinungen der anderen Agenten ist. [15]

Die multidimensionalen Modelle von DW und HK lassen sich folgendermaßen definieren [15]: Sei $\underline{m} := \{1, \dots, m\}$ die Menge der Agenten und $\underline{n} := \{1, \dots, n\}$ die Menge der Meinungsdimensionen. Man definiere den k -Simplex als $\Delta^k := \{\theta \in \mathbb{R}^{k+1} | \theta \geq 0, \sum_{i=1}^{k+1} \theta_i = 1\}$, der als Meinungsraum dient. $\theta^i \in \Delta^{n-1}$ sei die Meinung von Agent $i \in \underline{m}$ und der Vektor aller Meinungsvektoren $\Theta(t) \in (\Delta^{n-1})^m$ das Meinungsprofil zum Zeitpunkt t . Somit steht $\theta_j^i(t)$ für die Meinung von Agent i zum Zeitpunkt j . Θ kann auch als $m \times n$ -Matrix gesehen werden, wobei jede Reihe die Meinung eines Agenten repräsentiert. Beide Modelle benötigen eine Vertrauensschranke $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, sowie ein Maß für die Abstandsmessung von zwei Meinungen $\theta^1, \theta^2 \in \Delta^n$. Hier wird die Euklidische Distanz $\|\theta^1 - \theta^2\|$ benutzt, wobei $\|\cdot\|$ für die Euklidische Norm steht. Die Definitionen der Prozesse der stetigen Meinungsdynamiken der beiden Modelle sehen folgendermaßen aus [15].

Definition 2.5.1 (Das multidimensionale Deffuant-Weisbuch-Modell). Für ein gegebenes Anfangsprofil $\Theta(0) \in (\Delta^{n-1})^m$ und eine gegebene Vertrauensschranke $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ sei der DW-Prozess der Meinungsdynamiken definiert durch den zufälligen Prozess $(\Theta(t))_{t \in \mathbb{N}_0}$, wobei in jedem Zeitschritt $t \in \mathbb{N}_0$ zufällig zwei Agenten $i, j \in \underline{m}$ ausgewählt werden, die folgendermaßen

ßen ihre Meinungen anpassen

$$\theta^i(t+1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\theta^i(t) + \theta^j(t)), & \text{falls } \|\theta^i(t) - \theta^j(t)\| \leq \epsilon, \\ \theta^i(t), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dasselbe gilt für $\theta^j(t+1)$ mit i und j vertauscht.

Definition 2.5.2 (Das multidimensionale Hegselmann-Krause-Modell). Für eine gegebene Vertrauensschränke $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ sei die Konfidenzmatrix $A(\Theta, \epsilon)$ für ein Meinungsprofil $\Theta \in (\Delta^{n-1})^m$ definiert durch

$$a_{ij}(\Theta, \epsilon) := \begin{cases} \frac{1}{|I(i, \Theta)|}, & \text{falls } j \in I(i, \Theta), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit $I(i, \Theta) := \{j \in \underline{n} \mid \|\theta^i - \theta^j\| \leq \epsilon\}$, wobei $|I(i, \Theta)|$ für die Anzahl der Elemente steht. Für ein gegebenes Anfangsprofil $\Theta(0) \in \mathbb{R}^n$ sei der HK-Prozess der Meinungsdynamiken als eine Folge von Meinungsprofilen $(\Theta(t))_{t \in \mathbb{N}_0}$ rekursiv definiert durch

$$\Theta(t+1) = A(\Theta(t), \epsilon)\Theta(t).$$

Mittels eines sogenannten Stabilisations-Theorems hat J. Lorenz [13] analytisch bewiesen, dass beide Prozesse für jede Anfangsbedingung gegen ein stabiles Meinungsprofil konvergieren. Interessant ist, wie diese aussehen. Dies hängt jedoch stark von den Anfangsprofilen und beim DW-Prozess ebenso von der Wahl der Agenten ab, die aufeinander treffen. [15] An diesem Punkt kommen wieder die Simulationen ins Spiel.

Die Basis für die Simulationsergebnisse besteht aus 200 zufällig ausgewählten Meinungsprofilen aus $(\Delta^1)^{200}, \dots, (\Delta^7)^{200}$, d.h. $n = 2, \dots, 8$. Das Auswählen einer Meinung in den beiden Modellen ist nicht vollkommen trivial. Um eine Gleichverteilung der Meinungen zu gewährleisten und eine Verzerrung durch eine Normalisierung zufälliger Vektoren zu vermeiden, wählt man zufällig einen Vektor aus $[0, 1]^k$ und berechnet einen weiteren Eintrag als eins minus die Summe aller vorherigen Einträge, aber nur, wenn deren Summe kleiner gleich eins ist. Ansonsten wird ein neuer Vektor gewählt. [15] Betrachtet wird der Parameterraum $\epsilon = 0.15, 0.16, \dots, 0.42$. Die Anzahl der Simulationsdurchgänge für jedes Paar (n, ϵ) beträgt 200.

Die wichtigsten Ergebnisse dieser Simulationen sind die folgenden. Mit steigender Anzahl der Meinungsbereiche, steigen die Nebenmeinungsanhäufungen sowohl im DW-Modell als auch im HK-Modell an [15]. Wird eine Meinungsanhäufung mit einer großen Mehrheit an Agenten (z.B. mehr als 150, also 75%) als Mehrheits-Konsens bezeichnet, kann man sagen, dass der Mehrheits-Konsensübergang mit steigendem n sinkt [15]. Der Mehrheits-Konsens tritt also schon für kleinere ϵ ein. Wobei sich das Absinken allerdings mit steigendem n verlangsamt.

Außerdem wird mit steigendem n das ϵ -Intervall zwischen dem Mehrheits-Konsens und einer totalen Vielzahl an Meinungen kleiner [15]. Weiter kann man an den Konvergenzzeiten des HK-Modells sehen, dass metastabile Zustände mit langen Konvergenzzeiten in dem ϵ -Intervall des Mehrheits-Konsens in der Nähe des Mehrheits-Konsensübergangs auftauchen können [15].

Interessant ist der Einfluss des hier gewählten Meinungsraums Δ^k . Das k -dimensionale Volumen von Δ^k ist [15]

$$Vol\Delta^k = \frac{\sqrt{k+1}}{k!} = \frac{\sqrt{k+1}}{\Gamma(k+1)}.$$

Das n -dimensionale Volumen des Balles B_ϵ^n (bezüglich der Euklidischen Norm) mit Radius ϵ (Konfidenzbereich) ist [15]

$$VolB_\epsilon^n = \epsilon^n \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

Für jedes ϵ existiert ein n , sodass $VolB_\epsilon^n > Vol\Delta^k$ gilt. [15] Dies bedeutete, dass für ein gegebenes ϵ ab einem gewissen n der Konfidenzbereich größer ist als der gesamte Meinungsraum. Für $\epsilon = 0.23$ gilt dies zum Beispiel für $n \geq 10$ und für $\epsilon = 0.15$ für $n \geq 21$. [15] Diese Eigenschaft erklärt warum für steigende n der Mehrheits-Konsensübergang sinkt.

Außerdem trägt die Geometrie des Simplex dazu bei, dass Extremisten leichter von den anderen abgeschnitten werden. [15] Der euklidische Abstand zwischen einem extremen Punkt, wie zum Beispiel $(1, 0, \dots, 0)$, und dem Massenschwerpunkt des Meinungsraums $\frac{1}{n}(1, \dots, 1)$ ist $\sqrt{(1 - \frac{1}{n})^2 + (n-1)\frac{1}{n^2}}$. [15] Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert dieser gegen 1. [15] Das bedeutet, dass der Abstand zwischen einem Extremisten und der restlichen Masse für steigende n immer größer wird, bis dieser für keine Vertrauensschränke < 1 mehr zu erreichen ist. In diesem Fall verbleibt der abgetrennte Agent während des gesamten restlichen Prozesses in diesem Zustand. Grob kann man jedoch sagen, dass in einer öffentlichen Diskussion über ein bestimmtes stetiges Thema eher ein Mehrheits-Konsens erreicht wird, wenn den Agenten nicht nur zwei entgegengesetzte Möglichkeiten zu diesem Thema geboten werden, sondern sie ihre Ressourcen zwischen mehreren Bereichen dieses Thema betreffend aufteilen können. [15] Allerdings sinkt der Einfluss des Anhebens der Dimension dieser Bereiche auf den Mehrheits-Konsens mit steigender Dimension. [15]

2.5.7.4 Die Simulationen von Meinungen im HK- und DW-Modell und deren Reaktionen auf extreme Ereignisse

Es gibt viele extreme und einschneidende Ereignisse wie Erdbeben, Flugzeugabstürze, Börsenkrach usw., die sich auf die Meinungen von Menschen auswirken. [10] Oft wird dabei nur ein kleiner Teil der Menschen in ihrer Meinung beeinflusst. Dieser Einfluss hängt von der zeitlichen und räumlichen Distanz zu dem Ereignis ab. [10] Ein Vulkanausbruch wirkt sich zum Beispiel am meisten auf die Meinungen der Menschen in der nahen Umgebung des Vulkans aus. Je weiter jemand vom Vulkan entfernt wohnt, desto weniger nimmt er die Gefahren eines Vulkanausbruchs wahr. Ebenso beeinflusst ein unmittelbar vorangegangener Vulkanausbruch

die Menschen mehr, als wenn dieser schon einige Jahre her ist. In einem Modell kann man solch eine Störung durch die Änderung einer Meinung eines zufällig ausgewählten Agenten in der Anfangskonfiguration einfließen lassen. [10] Interessant ist es zu untersuchen, wie stark sich diese Änderung im Laufe der Zeit auf die anderen Agenten auswirkt. Im ursprünglichen HK- und DW-Modell sind die Meinungen reelle Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$. Somit lässt sich die Änderung einer Meinung eines Agenten i einfach mittels der Differenz zwischen der neuen und der alten Meinung bestimmen. [10] Wendet man nun die Dynamiken des jeweiligen Modells auf die ursprüngliche anfängliche Meinungsverteilung an und anschließend auf die dazugehörige veränderte Meinungsverteilung, kann man die Endzustände vergleichen und durch den sogenannten Hammingabstand die Änderung feststellen. [10] Der Hammingabstand gibt an wie viele Agenten ihre Meinung geändert haben. Dabei bestimmt die Anzahl der Agenten mit unterschiedlichen Meinungen die Größe des Schadens. Vernachlässigt wird die Größe des Abstands zwischen den Meinungen.

Die ursprünglichen Modelle von HK und DW sind auf einem vollständigen Graphen simuliert worden (vgl. (2.5)). Das heißt, jeder ist mit jedem verbunden. Geht es in der Politik aber beispielsweise um Diskussionen, die nur eine Stadt betreffen, ist dies eher unrealistisch, da dies meist auf die Ortsansässigen einer Stadt beschränkt ist und nicht die ganze Welt betrifft. [10] Eine andere Möglichkeit ist zum Beispiel ein Quadratgitter auf dessen Knotenpunkten die Agenten plaziert werden und Interaktionen nur zwischen direkten Nachbarn möglich sind, wie im zweidimensionalen Sznajd-Modell (2.2.3.3). Ein zweidimensionales Gitter stellt eine gute geographische Beschreibung der Schadensausbreitung dar, wenn man davon ausgeht, dass benachbarte Agenten sich in räumlicher Hinsicht nahestehen. [10] Andererseits ist diese geordnete Struktur ebenfalls nicht besonders realitätsnah, da jeder die gleiche Anzahl an Bekannten hat und geographisch entfernte Agenten niemals miteinander bekannt sein können. In der Hinsicht ist ein skalenfreies Netzwerk besser geeignet wie zum Beispiel das von Barabási-Albert. [10] Dabei beginnt man mit einer kleinen Anzahl m an Agenten, die alle miteinander verbunden sind. Anschließend wird ein Agent nach dem anderen hinzugefügt. Jedes neue Mitglied wählt zufällig m vorherige Mitglieder als Nachbarn aus und zwar so, dass die Wahrscheinlichkeit einen speziellen Agenten zu wählen proportional zu der Anzahl an Agenten ist, die dieser Agent zuvor hatte. Dadurch bekommen Agenten mit vielen Verbindungen noch mehr Verbindungen und die Wahrscheinlichkeit eines Agenten als Nachbar von k späteren Mitgliedern ausgewählt zu werden ist proportional zu $1/k^3$. [10]

Das Barabási-Albert-Netzwerk hat allerdings eine zufällige Struktur und kann schlecht in eine euklidische zweidimensionale Fläche eingebettet werden. [10] Das macht die geographische Betrachtung der Schadensausbreitung unmöglich. Das beste wäre daher ein Graph, der sowohl die geordnete Struktur des Gitters als auch die ungeordnete Struktur des zufälligen Graphen aufweist. [10] Da dies jedoch noch nicht so ausgereift ist und das Hauptziel darin besteht die räumlichen Eigenschaften der Schadensausbreitung zu untersuchen, wird das Modell auf einem zweidimensionalen Gitter simuliert.

Dabei wird in der Anfangskonfiguration die Meinung des Agenten in der Mitte des Gitters verändert. [10] Geht man wie hier von einer geraden Anzahl L an Gitterseiten aus, wird zufällig einer der vier Agenten gewählt, die auf den Ecken des mittleren Kästchens liegen. Dieser Agent wird als der Ursprung des Schadens gesehen. [10] Da die Meinungen reelle Zahlen sind, muss festgelegt werden, wann zwei Meinungen übereinstimmen. In dieser Simulation ist dies der Fall, wenn die Differenz zweier Meinungen kleiner als 10^{-9} ist. [10] Außerdem müssen die Dynamikprozesse viele Male durchgeführt werden, um ein präzises Ergebnis zu bekommen. Jeder Durchgang startet mit einer anderen Anfangskonfiguration, ohne dass aber die anderen Parameter des jeweiligen Modells verändert werden. Das Endergebnis wird als Durchschnitt aller Beispiele berechnet. Meist handelt es sich um 1000 Beispiele. [10]

Untersucht wird zum einen die Reichweite r , also der maximale Abstand der Agenten zum Ursprung, die von der Störung erreicht worden sind, [10] und zum anderen die Wahrscheinlichkeit $p(d, t)$, die dafür steht, dass ein zufällig ausgewählter Agent mit Abstand d zum Ursprung zum Zeitpunkt t seine Meinung aufgrund der anfänglichen Störung ändert. [10] $p(d, t)$ wird folgendermaßen berechnet [10]: Nach t Iterationen werden alle Seiten gesammelt, die Abstand d zum Ursprung haben und auf den gleichen Axen liegen wie der Ursprung. Dies beschränkt sich auf vier Seiten. Die Wahrscheinlichkeit ist dann einfach durch den Anteil dieser Agenten auf den gesammelten Seiten gegeben, die von der Meinung ihres Gegenübers in der ungestörten Konfiguration abweichen. Wichtig ist, dass d ein vielfaches des Gitterabstands ist. Da $p(d, t)$ mittels vier Seiten hergeleitet wird, muss für ein brauchbares Ergebnis der Durchschnitt über sehr viele Beispiele genommen werden. Hier liegt die Anzahl in der Größenordnung 10^3 . [10]

Betrachtet man den Anteil der gestörten Agenten in Abhängigkeit von der Vertrauensschränke ϵ auf einem Gitter mit 40^2 Agenten, so verlaufen die Kurven für das HK-Modell und das DW-Modell sehr ähnlich. [10] Für kleine ϵ bis $\epsilon \approx 0.15$ werden im Endzustand keine Agenten von der Störung beeinflusst. Dann steigt der Anteil an gestörten Agenten für steigende ϵ steil an bis ab $\epsilon = 0.4$ immer alle Agenten im Endzustand von der Störung erreicht werden. [10] Dies ist die Schadenausbreitungsschwelle.

Die Reichweite r hängt natürlich ebenso von ϵ ab. Im DW-Modell breitet sich der Schaden für $\epsilon = 0.10$ kaum aus und die Reichweite r liegt um 0. [10] Für $\epsilon = 0.17$ kann in einigen Beispielen schon die maximale Reichweite von $r = \sqrt{2}$ in einem Gitter mit 40^2 Agenten erreicht werden, aber hauptsächlich liegt r noch im unteren Bereich um 0. Dies ändert sich schlagartig für $\epsilon = 1.18$, was einen Phasenübergang signalisiert. Dort tauchen in den Beispielen eher lange Reichweiten r auf, die sogar hauptsächlich bei $\sqrt{2}$ liegen. Für $\epsilon = 0.35$ liegt die Reichweite r schon für fast alle Beispiele bei $\sqrt{2}$. [10] Die Ergebnisse für das HK-Modell sind im wesentlichen dieselben. [10]

Da $p(d, t)$ von zwei Variablen abhängt, ist dieser Fall etwas komplizierter. Am einfachsten ist es die Abhängigkeit von $p(d, t)$ von dem Abstand d und der Zeit t separat zu betrachten, indem jede Variable jeweils zu einem bestimmten Wert d_0 beziehungsweise t_0 festgesetzt wird, während die andere variiert wird. [10] Die Ergebnisse beziehen sich wieder auf das DW-Modell, sind

aber ähnlich für das HK-Modell. Für festen Abstand d_0 steigt die Wahrscheinlichkeit $p(d, t)$ für steigende ϵ , da für steigende ϵ auch mehr Agenten von dem Schaden in ihrer Meinung beeinflusst werden. [10] Im Laufe der Zeit steigt die Wahrscheinlichkeit $p(d, t)$ ebenfalls an, was dafür steht, dass der Schaden nicht abnimmt. Lange bevor der Endzustand erreicht wird, konvergiert $p(d, t)$ aber gegen einen festen Wert, abhängig von ϵ und dem festgelegten Abstand d . [10] Für festes t_0 , zum Beispiel am Ende der Zeitentwicklung des Systems, sinkt die Wahrscheinlichkeit $p(d, t)$ für steigenden Abstand d . [10] Nahe des Ursprungs der Störung nimmt $p(d, t)$ mit wachsender Entfernung stärker ab als weiter vom Ursprung entfernt. Für kleine ϵ liegt die Wahrscheinlichkeit $p(d, t)$ für eine große Distanz vom Ursprung bei 0. Für steigende ϵ steigt diese. Für $\epsilon = 0.20$ liegt sie bei $1/2$ und für $\epsilon = 0.30$ schon bei ≈ 0.92 . [10]

2.6 Ein Modell, das die Bedeutung der Diffusion in der Meinungsbildung erläutert

Ben-Naim [5] hat ein Modell aufgestellt, in dem es um die Entwicklung politischer Organisationen geht. Die Meinung $\theta_i(t)$ eines Agenten i zum Zeitpunkt t ist dabei eine ganze Zahl n . Das besondere an diesem Modell ist, dass die Agenten ihre Meinungen mittels zweier konkurrierender Mechanismen ändern. [5] Zum einen gibt es, wie in den bisherigen Modellen, die Interaktion zwischen den Agenten, die für die Konfliktbewältigung steht. [5] Dazu werden zufällig zwei Agenten gewählt, die einen Kompromiss schließen, falls die Differenz ihrer Meinungen unterhalb einer Vertrauensschranke ϵ liegt. [5] Dies kommt dem DW-Modell gleich. Zur Einfachheit sei $\epsilon = 2$. Für zwei Agenten i, j mit den Meinungen $\theta_i(t) = n - 1$ und $\theta_j(t) = n + 1$ zum Zeitpunkt t gilt dann $\theta_i(t + 1) = \theta_j(t + 1) = n$. [5] Dieser Kompromissprozess findet in jedem Zeitschritt statt. Zum anderen gibt es den Diffusionsprozess, der für die Möglichkeit steht, dass jemand seine Meinung zum Beispiel aus persönlichen Gründen oder aufgrund bestimmter Ereignisse ändern kann. [5] In dem Modell heißt das, dass ein Agent i seine Meinung zufällig irgendwann ändert. Aus $\theta_i(t) = n$ wird dann $\theta_i(t + 1) = n \pm 1$. [5] Dies ist eine Irrfahrt im Meinungsraum mit einer Diffusionskonstante D . [5] Diese gibt die Zufälligkeit dieses Prozesses wieder und ist in der Physik ein Maß für die Beweglichkeit der Teilchen in einem Stoff. In beiden Prozessen wird die gesamte Population erhalten. [5] Die Meinungen werden im Kompromissprozess ebenfalls alle erhalten, im Diffusionsprozess gilt dies nur für die durchschnittliche Meinung. [5]

Für die Dichte $P_n(t)$ der Agenten mit Meinung n zum Zeitpunkt t gilt die Mastergleichung [5]

$$\frac{dP_n}{dt} = 2P_{n-1}P_{n+1} - P_n(P_{n-2} + P_{n+2}) + D(P_{n-1} + P_{n+1} - 2P_n). \quad (2.17)$$

Dabei steht der erste Teil für den Kompromissprozess und der hintere für den Diffusionsprozess. Im ersten Teil wird die Wahrscheinlichkeit genommen, dass sich zwei Agenten mit Meinungen $n - 1$ und $n + 1$ treffen und beide zu Meinung n wechseln. Abgezogen wird die Wahrschein-

lichkeit, dass ein Agent, der schon Meinung n hat, einen Agenten mit Meinung $n \pm 2$ trifft und dementsprechend zu $n \pm 1$ wechselt. Im Diffusionsteil wird der Teil der Agenten zusammen gerechnet, der die Möglichkeit hat zufällig von $n \pm 1$ zu n zu springen abzüglich des Teils, der von Meinung n wegspringt.

Es gilt $\sum_n P_n = \text{konstant}$ und $\sum_n nP_n = \text{konstant}$, da die gesamte Population und alle Meinungen erhalten bleiben. [5]

Interessant ist es nun, diese Dynamiken für eine anfängliche Partei, für zwei und für viele anfängliche Parteien zu betrachten, da die Dynamiken einer Partei in denen zweier Parteien vorkommen und diese wiederum in denen vieler Parteien. [5]

Für die Dynamiken einer Partei sieht die Anfangsbedingung folgendermaßen aus [5]: $P_n(0) = m(\delta_{n,-1} + \delta_{n,0})$. Diese gibt eine wohldefinierte politische Organisation (Partei) wieder, dessen Größe m natürlich gleich der gesamten Population ist und sehr groß gewählt wird, $m \gg D$. [5] Während der Entwicklung bleibt die Meinungsverteilung symmetrisch, $P_n = P_{-1-n}$. [5] Gleichung (2.17) gilt sowohl für den trivialen stabilen Zustand $P_n = 0$ als auch für den Zustand, in dem Kompromiss und Diffusion ausgeglichen sind [5],

$$P_{n-1}P_{n+1} = DP_n. \quad (2.18)$$

Löst man diese Gleichung rekursiv mit $P_{-1} = P_0$, ergibt sich der periodische Zustand

$$(P_{-1}, P_0, P_1, P_2, P_3, P_4) = (P_0, P_0, D, D^2/P_0, D^2/P_0, D)$$

mit $P_n = P_{n+6}$. [5] Beginnt man nun mit der eben angegebenen Anfangsbedingung, so hat die Verteilung einen Kern, der mit dieser periodischen Struktur über ein paar Gitterseiten hinweg übereinstimmt. Es gilt [5]

$$(P_0, P_1, P_2) \cong (m, D, D^2m^{-1}). \quad (2.19)$$

Ben-Naim [5] hat dies mittels numerischer Integration bestätigt. Der Kern lässt sich recht schnell ermitteln, indem man das Kurzzeitverhalten betrachtet, $P_n(t) \cong m(Dt)^n$, und daraus die Stabilisationszeiteinheit m^{-1} herleitet. [5] Das heißt, je größer die Partei ist, desto schneller formt sie sich.

P fällt vom Zentrum $n = 0$ und $n = -1$ aus gesehen nach außen hin ab. Außerhalb des Kerns gilt $P \ll D$ [5] und somit auch $P^2 \ll DP$, was bedeutet, dass der Diffusionsprozess den Kompromissprozess dominiert (vgl. (2.18)). [5] Dort gilt nach Gleichung (2.17) die Diffusionsgleichung $dP_n/dt = D(P_{n-1} + P_{n+1} - 2P_n)$ für $n \geq 2$ mit Randbedingung $P_2(t) = D^2m^{-1}$. [5] Dies ist ein Standardproblem einer Diffusion von einer Quelle aus. Somit ist dieser Teil der Dichte charakterisiert durch die Diffusionslänge $L \sim t^{1/2}$ und von der Form her asymptotisch selbstähnlich [5],

$$P_n(t) \rightarrow m^{-1}\Phi(nt^{-1/2})$$

mit $\Phi(0) = \text{konstant}$. Es entfällt die explizite Abhängigkeit von der Diffusionskonstante. Die Population außerhalb des Kerns beträgt $\mu = 2 \sum_{n \geq 2} P_n$ und wächst mit der Zeit entsprechend $\mu \sim m^{-1} t^{1/2}$. [5] Das bedeutet, dass die gesamte Population vom Kern nach außen wandert und die Partei sich auflöst in eine „Diffusionswolke“, deren Zentrum im Kern liegt. [5] Sei τ die Lebensdauer der Partei. Es gilt $\tau \sim m^4$. [5] τ wächst also rapide mit der Parteigröße.

Nun geht es um die Dynamiken zweier Parteien zu Beginn. Die Anfangsbedingung sieht hier folgendermaßen aus [5], $P_n = m_1(\delta_{n,-2} + \delta_{n,-3}) + m_2(\delta_{n+2,l} + \delta_{n+3,l+1})$, wobei $m_1, m_2 \gg D$ für die zwei großen Parteien stehen, die durch einen großen Abstand $l \gg 1$ voneinander getrennt sind. Anfangs folgen beide Parteien aufgrund des großen Abstands den eben beschriebenen Dynamiken einer Partei. Wenn die Parteien sich auflösen, treffen die Agenten am Rand aufeinander, was nach der Diffusionszeit l^2 passiert. [5] In der Region, die die beiden Parteien trennt, erreicht die Verteilung dann einen stabilen Zustand. Dort genügt die Verteilung der diskreten Laplace-Gleichung [5] $P_{n+1} + P_{n-1} - 2P_n = 0$ mit den Randbedingungen, die von den beiden Kernen vorgegeben werden, $P_0 \propto m_1^{-1}$ und $P_l \propto m_2^{-1}$. Es gibt zwischen den Parteien also ein lineares Profil [5]

$$P_n \propto \frac{1}{m_1} + \left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1} \right) \frac{n}{l}$$

für $0 \leq n \leq l$. Daraus folgt, dass ein langsamer und stetiger Fluss von der kleineren Partei in die größere stattfindet, $J = |P_{n+1} - P_n|$ oder explizit ausgedrückt $J \propto l^{-1}(m_{<}^{-1} - m_{>}^{-1})$ mit $m_{<} = \min(m_1, m_2)$ und $m_{>} = \max(m_1, m_2)$. [5] Die Diffusion ermöglicht also beiden Parteien miteinander zu interagieren. Letztendlich leert sich die kleine Partei immer mehr. Die Entleerungszeit lässt sich mittels des Flusses, $T \sim m_{<}/J$, schätzen als $T \sim lm_{<}^2$, wobei die Anhängigkeit von der größeren Partei ($m_{>}$) stillschweigend ignoriert wird. [5]

Es findet somit immer ein Zusammenschluss der beiden Parteien statt. Die Lebensdauer der kleinen Partei wächst dabei quadratisch mit ihrer Größe und linear mit dem Abstand zwischen den beiden Parteien. [5] Die große Partei wächst durch den Zusammenschluss, verändert aber nicht ihre Position. [5]

Nun geht es um die Dynamiken mehrerer Parteien. Der gleichverteilte Zustand $P_n = \text{konstant}$ ist stationär. [5] Jeder gleichverteilte Zustand lässt sich durch entsprechende Reskalierung der Meinungsverteilung, der Zeit und der Diffusionskonstante in den Zustand $P_n = 1$ transformieren. [5] Somit kann dieser Fall gewählt werden. Um die Stabilität dieses Zustands zu untersuchen, hat Ben-Naim [5] heterogene Anfangsbedingungen betrachtet, wobei $P_n(0)$ eine zufällig gewählte Zahl aus dem Intervall $[-1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$ ist mit $\epsilon \ll 1$. Das System wird sehr groß gewählt, $1 \leq n \leq N$ mit $N \gg 1$. Die Stabilität lässt sich mittels kleiner periodischer Störungen testen, wobei $P_n = 1 + \phi_n$ ist mit $\phi_n \propto e^{ikn + \lambda t}$. [5] Aus Gleichung (2.17) ergibt sich die Wachstumsrate [5]

$$\lambda = 2(2 \cos k - \cos 2k - 1) + 2D(\cos k - 1).$$

Die Störung verschwindet, falls die Wellenzahl genügend groß ist [5],

$$|k| > k_0 \text{ mit } k_0 = \cos^{-1}(D/2).$$

Da $k_0 = 0$ für $D = 2$, gibt es eine kritische Diffusionskonstante [5]

$$D_c = 2.$$

Nun lassen sich drei verschiedene Diffusionsfälle betrachten, starke Diffusion, schwache Diffusion und keine Diffusion. Für starke Diffusion, $D > D_c$, verschwinden die Störungen exponentiell mit der Zeit und der gleichverteilte Zustand wird, ungeachtet der Anfangsbedingungen, schnell wiederhergestellt. [5] Direkt oberhalb D_c sind Störungen langer Wellenlängen sehr langlebig [5]: ihre Zerfallszeit ist proportional zu $(D - D_c)^{-2}$, was aus $\lambda \propto (D - D_c)k^2$ für $D \downarrow D_c$ folgt. In jedem Fall werden die Kompromissdynamiken irrelevant und die Diffusion bestimmt den Prozess. Die Meinungsverteilung nimmt einen strukturlosen Zustand an, was bedeutet, dass das politische System unorganisiert ist und sich keine Parteien bilden. [5]

Für schwache Diffusion, $D < D_c$, vergrößern sich die Störungen aus dem Anfangszustand und es bilden sich schnell Parteien. [5] Da die Anfangsbedingungen heterogen sind, ist die Größe der Parteien und der Abstand zwischen ihnen unterschiedlich. Die weiteren Entwicklungen folgen den Dynamiken für zwei Parteien. [5] In den Regionen zwischen den Parteien gibt es somit ein lineares Profil. Die kleineren Parteien gehen in die benachbarten größeren Parteien über und die überlebenden Parteien wachsen, wie auch der Abstand zwischen ihnen. [5] Dabei ist die Lebensdauer einer Partei abhängig von dessen Größe und dessen Abstand zu anderen Parteien. Im Allgemeinen gilt, je größer eine Partei ist, desto länger überlebt sie. Aber es kann auch passieren, dass eine kleinere Partei eine größere überlebt und zwar dann, wenn der Abstand zwischen ihnen groß genug ist. [5]

Ohne Diffusion erreicht das System einen Zustand, in dem $P_{n-1}P_{n+1} = 0$ für alle n gilt (vgl. (2.18)). [5] Es findet keine Entwicklung mehr statt und die Parteien sind entweder nur auf einer Seite oder auf beiden Seiten positioniert. Für einen kleinen Meinungsraum, also ein schmales politisches Spektrum, wird ein Konsens erreicht mit einer einzigen Partei. Vergrößert sich der Meinungsraum, steigt auch die Anzahl der Parteien an und im Endzustand läuft es auf zwei Randparteien, drei Parteien usw. hinaus. [5] Asymptotisch wächst die Zahl der Parteien linear mit dem politischen Spektrum N , da alle Parteien den gleichen Abstand haben. Der Abstand ist gleich der Parteigröße, was aus der Erhaltung der Population folgt. [5]

Diffusion ist hier eine Störung der eigentlichen Dynamiken des Modells. Die Stärke dieser Störung bestimmt die Beschaffenheit des politischen Systems, denn Diffusion ermöglicht die Interaktion zwischen Parteien und ist verantwortlich für das Verschwinden von Parteien. [5] Dabei sind die Ergebnisse sehr realistisch. [5] Der Lebenszyklus einer Partei beinhaltet Bildung, Wachstum und Untergang. Isolierte Parteien haben eine gefestigtere Position als andere und ihre Lebensdauer wächst mit ihrer Größe. Wenn zwei Parteien aufeinandertreffen, verliert die

kleinere Partei an Boden und es wechseln viele Anhänger in die größere Partei. Außerdem kann eine kleine Partei, die inhaltlich einen großen Abstand zu anderen Parteien hat, lange überleben. Plötzliche Meinungsänderungen sind also ein wesentlicher Teil in der Meinungsbildung. [5]

Kapitel 3

Herleitungen Partieller Differentialgleichungen im Rahmen des DW-Modells

3.1 Das ursprüngliche DW-Modell

Die partielle Differentialgleichung (2.13) hat in der Form keine Lösungen, da sie einer Rückwärts-Wärmeleitungsgleichung entspricht. Berücksichtigt man bei der Herleitung aber auch die höheren Ordnungen, erhält man eine lösbare Gleichung. Im Folgenden nun die richtige Berechnung der Dynamiken der zeitlichen Veränderung der Meinungsdichte $\frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial t}$. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten.

3.1.1 Erste Herleitung

Sei $p(\theta'_i, t)$ also die Wahrscheinlichkeit, dass Agent i zum Zeitpunkt t Meinung θ'_i hat. Meinung θ_i des Agenten i im nächsten Zeitschritt $t + \Delta t$ ergibt sich folgendermaßen

$$\begin{aligned} p(\theta_i, t + \Delta t) &= p(\theta_i, t) \left(1 - \frac{1}{N}\right) + \frac{1}{N(N-1)} \sum_{j \neq i} \int_{\Gamma \setminus [-\epsilon, \epsilon]} p(\theta'_j, t) p(\theta_i, t) d\theta'_j \\ &\quad + \frac{1}{N(N-1)} \sum_{j \neq i} \frac{1}{1-\mu} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} p(\theta'_j, t) p\left(\underbrace{\frac{\theta_i - \mu\theta'_j}{1-\mu}}_{=\theta'_i}, t\right) d\theta'_j. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dabei bezeichnet θ'_j die Meinung des Agenten j zum Zeitpunkt t . $(1 - 1/N)$ steht für die Wahrscheinlichkeit, dass Agent i zum Zeitpunkt t gar nicht ausgewählt wird und somit zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ die bisherige Meinung beibehält. In dem Fall gilt $\theta'_i = \theta_i$. Wird Agent i zum Zeitpunkt t doch ausgewählt, liegt die Wahrscheinlichkeit, dass Agent i zum Zeitpunkt t auf einen Agenten j trifft, bei $\frac{1}{N(N-1)}$. Es wird über alle möglichen Agenten j summiert. In dem

Modell findet aber nur eine Interaktion zwischen Agent i und Agent j statt, wenn Agent j im ϵ -Intervall von Agent i liegt. Im Integrationsbereich $I \setminus [-\epsilon, \epsilon]$ findet also keine Interaktion statt und es gilt wieder $\theta'_i = \theta_i$. Im Integrationsintervall $[-\epsilon, \epsilon]$ hingegen findet eine Interaktion statt. θ'_j muss dabei einen bestimmten Wert haben, um das gewünschte θ_i zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ zu bekommen. Somit wird über die Wahrscheinlichkeit integriert, dass Agent j zum Zeitpunkt t Meinung θ'_j hat und Agent i Meinung θ'_i .

Gleichung (3.1) lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned}
 p(\theta_i, t + \Delta t) &= p(\theta_i, t) \left(1 - \frac{1}{N}\right) + \underbrace{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{j \neq i} \underbrace{\int_I p(\theta'_j, t) d\theta'_j}_{=1} p(\theta_i, t)}_{=p(\theta_i, t)} \\
 &\quad - \frac{1}{N(N-1)} \sum_{j \neq i} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} p(\theta'_j, t) p(\theta_i, t) d\theta'_j \\
 &\quad + \frac{1}{N(N-1)} \sum_{j \neq i} \frac{1}{1-\mu} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} p(\theta'_j, t) p\left(\frac{\theta_i - \mu\theta'_j}{1-\mu}, t\right) d\theta'_j, \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

wobei für das erste Integral $|\theta'_j - \theta_i| \leq \epsilon$ gilt und für das zweite Integral $|\theta'_j - \theta'_i| \leq \epsilon$.

Nun zu der Berechnung des ersten Integrals

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} p(\theta'_j, t) p(\theta_i, t) d\theta'_j. \quad (3.3)$$

Es gilt

$$|\theta'_j - \theta_i| \leq \epsilon \iff |z| := \left| \frac{\theta'_j - \theta_i}{\epsilon} \right| \leq 1.$$

Substituiert man z , so geht das Integral von -1 bis 1 und hängt nicht mehr von ϵ ab. Es gilt

$$\theta'_j = \theta_i + \epsilon z$$

und

$$d\theta'_j = \epsilon dz.$$

Beides eingesetzt in (3.3) ergibt

$$\epsilon \int_{-1}^1 p(\theta_i + \epsilon z, t) p(\theta_i, t) dz. \quad (3.4)$$

Man betrachtet nun $\epsilon \rightarrow 0$ und berechnet dafür die Taylorentwicklung von $p(\theta_i + \epsilon z, t)$ um $\epsilon = 0$. Diese lautet

$$\begin{aligned}
p(\theta_i + \epsilon z, t) &= p(\theta_i, t) + \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i} \epsilon z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^2} (\epsilon z)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^3} (\epsilon z)^3 \\
&\quad + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^4} (\epsilon z)^4 + \mathcal{O}(\epsilon^5).
\end{aligned}$$

Eingesetzt in (3.4) liefert das

$$\begin{aligned}
&\epsilon \int_{-1}^1 \left(p(\theta_i, t) + \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i} \epsilon z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^2} (\epsilon z)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^3} (\epsilon z)^3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^4} (\epsilon z)^4 \right) p(\theta_i, t) dz.
\end{aligned}$$

Multipliziert man dies aus und nutzt die Linearität der Integralrechnung, fallen die Terme mit z und z^3 weg, da $\int_{-1}^1 z dz = \int_{-1}^1 z^3 dz = 0$. Für die anderen Integrale gilt $\int_{-1}^1 1 dz = 2$, $\int_{-1}^1 z^2 dz = \frac{2}{3}$ und $\int_{-1}^1 z^4 dz = \frac{2}{5}$. Man erhält auf diesem Wege für das Integral (3.3)

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} p(\theta'_j, t) p(\theta_i, t) d\theta'_j = 2(p(\theta_i, t))^2 \epsilon + \frac{1}{3} p(\theta_i, t) \frac{\partial^2 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^2} \epsilon^3 + \frac{1}{60} p(\theta_i, t) \frac{\partial^4 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^4} \epsilon^5. \quad (3.5)$$

Die Berechnung des zweiten Integrals

$$\frac{1}{1-\mu} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} p(\theta'_j, t) p\left(\frac{\theta_i - \mu \theta'_j}{1-\mu}, t\right) d\theta'_j \quad (3.6)$$

funktioniert ähnlich. Es gilt

$$\left| \theta'_j - \frac{\theta_i - \mu \theta'_j}{1-\mu} \right| \leq \epsilon \Leftrightarrow |z| := \left| \frac{\theta'_j - \theta_i}{\epsilon(1-\mu)} \right| \leq 1.$$

Substituiert man z , so geht das Integral wieder von -1 bis 1 und hängt nicht mehr von ϵ ab. Es gilt

$$\theta'_j = \theta_i + \epsilon(1-\mu)z$$

und

$$d\theta'_j = \epsilon(1-\mu)dz.$$

Beides eingesetzt in (3.6) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\mu} \int_{-1}^1 p(\theta_i + \epsilon(1-\mu)z, t) p\left(\frac{\theta_i - \mu(\theta_i + \epsilon(1-\mu)z)}{1-\mu}\right) (\epsilon(1-\mu)) dz = \\ \epsilon \int_{-1}^1 p(\theta_i + \epsilon(1-\mu)z, t) p(\theta_i - \epsilon\mu z, t) dz. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Wieder benötigt man die Taylorentwicklungen von $p(\theta_i + \epsilon(1-\mu)z, t)$ und $p(\theta_i - \epsilon\mu z, t)$ um $\epsilon = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} p(\theta_i + \epsilon(1-\mu)z, t) &= p(\theta_i, t) + \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i} \epsilon(1-\mu)z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^2} (\epsilon(1-\mu)z)^2 \\ &+ \frac{1}{6} \frac{\partial^3 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^3} (\epsilon(1-\mu)z)^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^4} (\epsilon(1-\mu)z)^4 \\ &+ \mathcal{O}(\epsilon^5) \end{aligned} \quad (3.8)$$

und

$$\begin{aligned} p(\theta_i - \epsilon\mu z, t) &= p(\theta_i, t) - \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i} \epsilon\mu z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^2} (\epsilon\mu z)^2 \\ &- \frac{1}{6} \frac{\partial^3 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^3} (\epsilon\mu z)^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^4} (\epsilon\mu z)^4 + \mathcal{O}(\epsilon^5). \end{aligned} \quad (3.9)$$

(3.8) und (3.9) eingesetzt in (3.7) liefert

$$\begin{aligned} \epsilon \int_{-1}^1 \left(p(\theta_i, t) + \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i} \epsilon(1-\mu)z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^2} (\epsilon(1-\mu)z)^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^3} (\epsilon(1-\mu)z)^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^4} (\epsilon(1-\mu)z)^4 \right) \\ \left(p(\theta_i, t) - \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i} \epsilon\mu z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^2} (\epsilon\mu z)^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^3} (\epsilon\mu z)^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^4} (\epsilon\mu z)^4 \right) dz. \end{aligned}$$

Multipliziert man dies aus und nutzt wieder die Linearität der Integralrechnung, fallen die Terme mit z , z^3 , z^5 und z^7 weg, da $\int_{-1}^1 z dz = \int_{-1}^1 z^3 dz = \int_{-1}^1 z^5 dz = \int_{-1}^1 z^7 dz = 0$. Für die anderen Integrale gilt $\int_{-1}^1 1 dz = 2$, $\int_{-1}^1 z^2 dz = \frac{2}{3}$, $\int_{-1}^1 z^4 dz = \frac{2}{5}$, $\int_{-1}^1 z^6 dz = \frac{2}{7}$ und $\int_{-1}^1 z^8 dz = \frac{2}{9}$. Man erhält für Integral (3.6)

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\mu} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} p(\theta'_j, t) p\left(\frac{\theta_i - \mu\theta'_j}{1-\mu}, t\right) d\theta'_j = \\ 2(p(\theta_i, t))^2 \epsilon + \frac{1}{3} p(\theta_i, t) \frac{\partial^2 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^2} \epsilon^3 (\mu^2 + (1-\mu)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{60} p(\theta_i, t) \frac{\partial^4 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^4} \epsilon^5 (\mu^4 + (1 - \mu)^4) - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i} \right)^2 \epsilon^3 (1 - \mu) \mu \\
& - \frac{1}{15} \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i} \frac{\partial^3 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^3} \epsilon^5 ((1 - \mu) \mu^3 + (1 - \mu)^3 \mu) \\
& + \frac{1}{10} \left(\frac{\partial^2 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^2} \right)^2 \epsilon^5 (1 - \mu)^2 \mu^2,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

wobei man die Terme der Ordnung ϵ^7 und ϵ^9 ignoriert. Setzt man die Ergebnisse (3.5) und (3.10) in die Ausgangsgleichung (3.2) ein und fasst die entsprechenden Terme zusammen, so erhält man

$$\begin{aligned}
p(\theta_i, t + \Delta t) &= p(\theta_i, t) + \frac{1}{N(N-1)} \sum_{j \neq i} \left(-\frac{2}{3} p(\theta_i, t) \frac{\partial^2 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^2} \epsilon^3 (1 - \mu) \mu \right. \\
&\quad - \frac{1}{60} p(\theta_i, t) \frac{\partial^4 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^4} \epsilon^5 (1 - \mu^4 - (1 - \mu)^4) \\
&\quad - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i} \right)^2 \epsilon^3 (1 - \mu) \mu \\
&\quad - \frac{1}{15} \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i} \frac{\partial^3 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^3} \epsilon^5 ((1 - \mu) \mu^3 + (1 - \mu)^3 \mu) \\
&\quad \left. + \frac{1}{10} \left(\frac{\partial^2 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^2} \right)^2 \epsilon^5 (1 - \mu)^2 \mu^2 \right) \\
&= p(\theta_i, t) - \frac{1}{N} \epsilon^3 (1 - \mu) \mu \left(\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(p(\theta_i, t) \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i} \right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{30} p(\theta_i, t) \frac{\partial^4 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^4} \epsilon^2 (2 - \mu + \mu^2) \\
&\quad + \frac{1}{15} \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i} \frac{\partial^3 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^3} \epsilon^2 (1 - 2\mu + 2\mu^2) \\
&\quad \left. - \frac{1}{10} \left(\frac{\partial^2 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^2} \right)^2 \epsilon^2 (1 - \mu) \mu \right),
\end{aligned} \tag{3.11}$$

wobei das Summenzeichen zu $(N-1)$ wird und sich wegekürzt, da die Summe nicht mehr von j abhängt. Zusätzlich benötigt man nun noch die Taylorentwicklung von $p(\theta_i, t + \Delta t)$ um (θ_i, t) . Es gilt

$$p(\theta_i, t + \Delta t) = p(\theta_i, t) + \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial t} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

Dies in (3.11) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned}
p(\theta_i, t) + \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial t} \Delta t &= p(\theta_i, t) - \frac{2}{3N} \epsilon^3 (1 - \mu) \mu \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(p(\theta_i, t) \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i} \right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{20} p(\theta_i, t) \frac{\partial^4 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^4} \epsilon^2 (2 - \mu + \mu^2) \\
&\quad + \frac{1}{10} \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i} \frac{\partial^3 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^3} \epsilon^2 (1 - 2\mu + 2\mu^2) \\
&\quad \left. - \frac{3}{20} \left(\frac{\partial^2 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^2} \right)^2 \epsilon^2 (1 - \mu) \mu \right).
\end{aligned}$$

$p(\theta_i, t)$ fällt auf beiden Seiten weg. Alles durch Δt geteilt, liefert

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial t} &= -\frac{2}{\Delta t 3N} \epsilon^3 (1 - \mu) \mu \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(p(\theta_i, t) \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i} \right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{20} p(\theta_i, t) \frac{\partial^4 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^4} \epsilon^2 (2 - \mu + \mu^2) \\
&\quad + \frac{1}{10} \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i} \frac{\partial^3 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^3} \epsilon^2 (1 - 2\mu + 2\mu^2) \\
&\quad \left. - \frac{3}{20} \left(\frac{\partial^2 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^2} \right)^2 \epsilon^2 (1 - \mu) \mu \right). \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Setzt man $\Delta t := \frac{2}{3N} \epsilon^3 \mu (1 - \mu)$, so kürzt sich der Vorfaktor auf der rechten Seite bis auf das Minuszeichen weg und man erhält

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(p(\theta_i, t) \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i} \right) \\
&\quad - \frac{1}{20} p(\theta_i, t) \frac{\partial^4 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^4} \epsilon^2 (2 - \mu + \mu^2) \\
&\quad - \frac{1}{10} \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i} \frac{\partial^3 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^3} \epsilon^2 (1 - 2\mu + 2\mu^2) \\
&\quad + \frac{3}{20} \left(\frac{\partial^2 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^2} \right)^2 \epsilon^2 (1 - \mu) \mu.
\end{aligned}$$

Lässt man nun $\mu \rightarrow 0$ laufen, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(p(\theta_i, t) \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i} \right) - \frac{1}{10} p(\theta_i, t) \frac{\partial^4 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^4} \epsilon^2 \\
&\quad - \frac{1}{10} \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i} \frac{\partial^3 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^3} \epsilon^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial}{\partial\theta_i} \left(p(\theta_i, t) \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial\theta_i} \right) - \frac{1}{10} \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial\theta_i} \left(p(\theta_i, t) \frac{\partial^3 p(\theta_i, t)}{\partial\theta_i^3} \right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial\theta_i} \left(p(\theta_i, t) \frac{\partial}{\partial\theta_i} \left(p(\theta_i, t) + \frac{\epsilon^2}{10} \frac{\partial^2 p(\theta_i, t)}{\partial\theta_i^2} \right) \right). \tag{3.13}
\end{aligned}$$

3.1.2 Zweite Herleitung

Ina Josek [12] hat in ihrer Diplomarbeit gezeigt, dass für die mehrdimensionale Meinungsdichte

$$p(\theta_1, \dots, \theta_N, t)$$

des ursprünglichen DW-Modells folgendes gilt

$$\frac{\partial p(\theta_1, \dots, \theta_N, t)}{\partial t} + \frac{1}{N} \left(\sum_{(i,j)} \frac{\partial}{\partial\theta_i} (\mu g(\theta_i - \theta_j) p(\theta_1, \dots, \theta_N, t)) \right) = 0, \tag{3.14}$$

wobei $g(s)$ stetig differenzierbar ist, $g(s) = 0$ für $|s| \geq \epsilon$ bei Vertrauensschranke ϵ , $g(0) = 0$ und $g(s) = -g(-s)$. Betrachtet man nun die eindimensionale Dichte $p(\theta_i, t)$, so ergibt sich für passende Funktion K abgeleitet von (3.14)

$$\frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\theta_i} \left(\int_{\mathbb{R}} K(\theta_i - \theta_j) p(\theta_j, t) d\theta_j p(\theta_i, t) \right) = 0. \tag{3.15}$$

Für die Funktion K gelte

$$K(\theta_i) = \frac{d}{d\theta_i} \left(\frac{1}{\epsilon} G\left(\frac{\theta_i}{\epsilon}\right) \right)$$

mit $G(z)$ stetig differenzierbar, $G(z) = 0$ für $|z| \geq 1$, $G(z) = G(-z)$ und $\int_{\mathbb{R}} G(z) dz = 1$. Durch die Bedingung $G(z) = 0$ für $|z| \geq 1$ wird die Vertrauensschranke ϵ berücksichtigt. Dies eingesetzt in (3.15) ergibt

$$\frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\theta_i} \left(p(\theta_i, t) \frac{\partial}{\partial\theta_i} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} G\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{\epsilon}\right) p(\theta_j, t) d\theta_j \right) \right) = 0. \tag{3.16}$$

Zur Berechnung des Integrals substituiert man $z = \frac{\theta_i - \theta_j}{\epsilon}$. Dann ergibt sich für $\theta_j = \theta_i - \epsilon z$ und für die Integrationsgrenzen 1 bis -1 , da $|z| \leq 1$ für $|\theta_j - \theta_i| \leq \epsilon$. Es gilt also

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} G\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{\epsilon}\right) p(\theta_j, t) d\theta_j = - \int_1^{-1} G(z) p(\theta_i - \epsilon z, t) dz = \int_{-1}^1 G(z) p(\theta_i - \epsilon z, t) dz.$$

Für die Taylorentwicklung von $p(\theta_i - \epsilon z, t)$ um $\epsilon = 0$ erhält man

$$p(\theta_i - \epsilon z, t) = p(\theta_i, t) - \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial\theta_i} \epsilon z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(\theta_i, t)}{\partial\theta_i^2} (\epsilon z)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3).$$

Eingesetzt ergibt dies

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 G(z)p(\theta_i, t)dz - \int_{-1}^1 G(z)\frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i}\epsilon z dz + \int_{-1}^1 G(z)\frac{\partial^2 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^2}\frac{\epsilon^2 z^2}{2}dz = \\ p(\theta_i, t)\int_{-1}^1 G(z)dz - \epsilon\frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i}\underbrace{\int_{-1}^1 G(z)z dz}_{=0} + \frac{\epsilon^2}{2}\frac{\partial^2 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^2}\int_{-1}^1 G(z)z^2 dz. \end{aligned}$$

Es gilt $\int G(z)dz =: \zeta_0 > 0$ und $\frac{1}{2}\int G(z)z^2 dz =: \zeta_2 > 0$. Dies alles eingesetzt in Gleichung (3.16) liefert

$$\frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(p(\theta_i, t)\frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\zeta_0 p(\theta_i, t) + \epsilon^2 \zeta_2\left(\frac{\partial^2 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^2}\right)\right)\right) = 0. \quad (3.17)$$

Man kann leicht sehen, dass Gleichung (3.13) und (3.17) wie gewollt die gleiche Form haben.

3.2 Ein erweitertes DW-Modell mit Anwesenheit weniger Extremisten

In Kapitel (2.5.6.2) geht es um eine Erweiterung des ursprünglichen DW-Modells. Zum einen werden dem Modell Extremisten hinzugefügt, die eine Meinung am Rand des Meinungsraums vertreten und deren individuelle Vertrauensschränke sehr gering ist. Zum anderen ändern die Agenten im Falle einer Interaktion zusätzlich zu ihrer Meinung ihre Vertrauensschränke. Für Agent i bedeutet das

$$\epsilon_i = \epsilon'_i + \mu \cdot (\epsilon'_j - \epsilon'_i),$$

wobei ϵ'_i die Vertrauensschränke von Agent i zum Zeitpunkt t ist und ϵ_i entsprechend zum Zeitpunkt $t + \Delta t$. Um auch für dieses Modell die Mastergleichung zu bestimmen, geht man ähnlich vor wie im ursprünglichen Fall des DW-Modells (3.1.1), nur dass die Gleichung von einer weiteren Variablen abhängt. Es gilt

$$\begin{aligned} p(\theta_i, \epsilon_i, t + \Delta t) = & p(\theta_i, \epsilon_i, t)\left(1 - \frac{1}{N}\right) \\ & + \frac{1}{N(N-1)} \sum_{j \neq i} \int_0^\infty \int_{|\theta'_j - \theta_i| > \epsilon_i} p(\theta'_j, \epsilon'_j, t)p(\theta_i, \epsilon_i, t)d\theta'_j d\epsilon'_j \\ & + \frac{1}{N(N-1)} \sum_{j \neq i} \frac{1}{1-\mu} \int_0^\infty \int_{|\theta'_j - \theta'_i| \leq \epsilon'_i} p(\theta'_j, \epsilon'_j, t)p(\theta'_i, \epsilon'_i, t)d\theta'_j d\epsilon'_j. \end{aligned} \quad (3.18)$$

$(1 - \frac{1}{N})$ steht wieder für den Fall, dass Agent i zum Zeitpunkt t nicht ausgewählt wird und somit weder seine Meinung noch seine Vertrauensschränke zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ ändert. In dem Fall gilt $\theta'_i = \theta_i$ und $\epsilon'_i = \epsilon_i$. Wird Agent i zum Zeitpunkt t doch ausgewählt, liegt die Wahrscheinlichkeit, dass dieser in t auf einen Agenten j trifft, wieder bei $\frac{1}{N(N-1)}$. Es wird über alle möglichen Agenten j summiert. Agent i ändert nur seine Meinung und seine Vertrauensschränke, wenn Agent j im ϵ'_i -Intervall von Agent i liegt. Im Integrationsbereich außerhalb des ϵ'_i -Intervalls findet daher für Agent i keine Interaktion statt und es gilt $\theta'_i = \theta_i$ und $\epsilon'_i = \epsilon_i$. Im Integrationsintervall $[-\epsilon'_i, \epsilon'_i]$ hingegen findet eine Interaktion statt. θ'_j und ϵ'_j müssen dabei einen bestimmten Wert haben, um das gewünschte θ_i und das gewünschte ϵ_i zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ zu bekommen. Somit wird über die Wahrscheinlichkeit integriert, dass Agent j zum Zeitpunkt t Meinung θ'_j und Vertrauensschränke ϵ'_j hat und Agent i Meinung θ'_i und Vertrauensschränke ϵ'_i . Gleichung (3.18) lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned}
p(\theta_i, \epsilon_i, t + \Delta t) = & \\
& \underbrace{p(\theta_i, \epsilon_i, t) \left(1 - \frac{1}{N}\right) + \frac{1}{N(N-1)} \sum_{j \neq i} \int_0^\infty \int_I p(\theta'_j, \epsilon'_j, t) d\theta'_j d\epsilon'_j}_{=1} p(\theta_i, \epsilon_i, t)}_{=p(\theta_i, \epsilon_i, t)} \\
& - \frac{1}{N(N-1)} \sum_{j \neq i} \int_0^\infty \int_{|\theta'_j - \theta_i| \leq \epsilon_i} p(\theta'_j, \epsilon'_j, t) p(\theta_i, \epsilon_i, t) d\theta'_j d\epsilon'_j \\
& + \frac{1}{N(N-1)} \sum_{j \neq i} \frac{1}{1 - \mu} \int_0^\infty \int_{|\theta'_j - \theta'_i| \leq \epsilon'_i} p(\theta'_j, \epsilon'_j, t) p(\theta'_i, \epsilon'_i, t) d\theta'_j d\epsilon'_j. \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Die Berechnung der beiden Doppelintegrale ist recht kompliziert. Der Ansatz dazu sieht für das erste Doppelintegral

$$\int_0^\infty \int_{|\theta'_j - \theta_i| \leq \epsilon_i} p(\theta'_j, \epsilon'_j, t) p(\theta_i, \epsilon_i, t) d\theta'_j d\epsilon'_j. \tag{3.20}$$

folgendermaßen aus. Es gilt

$$|\theta'_j - \theta_i| \leq \epsilon_i \iff |z| := \left| \frac{\theta'_j - \theta_i}{\epsilon_i} \right| \leq 1.$$

Substituiert man z , ergibt sich für θ'_j

$$\theta'_j = \theta_i + \epsilon_i z \quad \text{und} \quad d\theta'_j = \epsilon_i dz.$$

Dies eingesetzt in (3.20) liefert

$$\epsilon_i \int_0^\infty \int_{|z| \leq 1} p(\theta_i + \epsilon_i z, \epsilon'_j, t) p(\theta_i, \epsilon_i, t) dz d\epsilon'_j.$$

Beim zweiten Doppelintegral

$$\int_0^\infty \int_{|\theta'_j - \theta'_i| \leq \epsilon'_i} p(\theta'_j, \epsilon'_j, t) p(\theta'_i, \epsilon'_i, t) d\theta'_j d\epsilon'_j$$

setzt man

$$\theta'_i = \frac{\theta_i - \mu \epsilon'_j}{1 - \mu} \quad \text{und} \quad \epsilon'_i = \frac{\epsilon_i - \mu \epsilon'_j}{1 - \mu}$$

ein, damit die Gleichung nicht mehr von Meinung θ'_i und Vertrauensschranke ϵ'_i abhängt. Man erhält für die Schranke $|\theta'_j - \theta'_i| \leq \epsilon'_i$

$$|\theta'_j - \theta_i| \leq \epsilon_i - \mu \epsilon'_j.$$

Eingesetzt ergibt sich dann für das zweite Doppelintegral

$$\int_0^\infty \int_{|\theta'_j - \theta_i| \leq \epsilon_i - \mu \epsilon'_j} p(\theta'_j, \epsilon'_j, t) p\left(\frac{\theta_i - \mu \theta'_j}{1 - \mu}, \frac{\epsilon_i - \mu \epsilon'_j}{1 - \mu}, t\right) d\theta'_j d\epsilon'_j.$$

Damit ergibt sich für Gleichung (3.19)

$$\begin{aligned} p(\theta_i, \epsilon_i, t + \Delta t) = & \\ & p(\theta_i, \epsilon_i, t) - \frac{\epsilon_i}{N} \int_0^\infty \int_{|z| \leq 1} p(\theta_i + \epsilon_i z, \epsilon'_j, t) p(\theta_i, \epsilon_i, t) dz d\epsilon'_j \\ & + \frac{1}{N(1 - \mu)} \int_0^\infty \int_{|\theta'_j - \theta_i| \leq \epsilon_i - \mu \epsilon'_j} p(\theta'_j, \epsilon'_j, t) p\left(\frac{\theta_i - \mu \theta'_j}{1 - \mu}, \frac{\epsilon_i - \mu \epsilon'_j}{1 - \mu}, t\right) d\theta'_j d\epsilon'_j, \quad (3.21) \end{aligned}$$

wobei sich die Summenzeichen jeweils mit $(1 - N)$ wegkürzen, da die Integrale unabhängig von der Wahl des Agenten j sind. Zusätzlich benötigt man die Taylorentwicklung von $p(\theta_i, \epsilon_i, t + \Delta t)$ um $(\theta_i, \epsilon_i, t)$. Diese lautet

$$p(\theta_i, \epsilon_i, t + \Delta t) = p(\theta_i, \epsilon_i, t) + \frac{\partial p(\theta_i, \epsilon_i, t)}{\partial t} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

Setzt man dies in (3.21) ein, hebt sich $p(\theta_i, \epsilon_i, t)$ auf beiden Seiten weg. Das Ganze geteilt durch Δt liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\theta_i, \epsilon_i, t)}{\partial t} = & \\ & - \frac{1}{N \Delta t} \left[\epsilon_i \int_0^\infty \int_{|z| \leq 1} p(\theta_i + \epsilon_i z, \epsilon'_j, t) p(\theta_i, \epsilon_i, t) dz d\epsilon'_j \right. \\ & \left. - \frac{1}{(1 - \mu)} \int_0^\infty \int_{|\theta'_j - \theta_i| \leq \epsilon_i - \mu \epsilon'_j} p(\theta'_j, \epsilon'_j, t) p\left(\frac{\theta_i - \mu \theta'_j}{1 - \mu}, \frac{\epsilon_i - \mu \epsilon'_j}{1 - \mu}, t\right) d\theta'_j d\epsilon'_j \right]. \end{aligned}$$

Kapitel 4

Stationäre Lösungen des ursprünglichen DW-Modells

Um zu erfahren wie die Agenten im Endzustand des ursprünglichen DW-Modells im Meinungsraum angesiedelt sind, betrachten wir einige stationäre Lösungen der Mastergleichung (3.13)

$$\frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(p(\theta_i, t) \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(p(\theta_i, t) + \frac{\epsilon^2}{10} \frac{\partial^2 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^2} \right) \right),$$

die die Dynamiken des Modells beschreibt. Dies ergibt

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(-p(\theta_i, t) \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i} - \frac{\epsilon^2}{10} p(\theta_i, t) \frac{\partial^3 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^3} \right) = 0.$$

Diese Gleichung gilt natürlich für $p(\theta_i, t) = 0$. Für den Fall $p(\theta_i, t) \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} -p(\theta_i, t) \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i} + c &= \frac{\epsilon^2}{10} p(\theta_i, t) \frac{\partial^3 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^3} \\ \iff -\frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i} + c &= \frac{\epsilon^2}{10} \frac{\partial^3 p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^3}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

wobei c eine Konstante ist, für die aus dem Stetigkeitsargument $c = 0$ folgt. Nimmt man nämlich ein θ_i am Rand des Lösungsintervalls, kann man in (4.1) $p(\theta_i, t) = 0$ einsetzen und erhält $c = 0$. Um die Gleichung zu lösen, substituiert man nun $z(\theta_i, t) = \frac{\partial p(\theta_i, t)}{\partial \theta_i}$. Man bekommt dadurch folgende lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$-z(\theta_i, t) = \frac{\epsilon^2}{10} \frac{\partial^2 z(\theta_i, t)}{\partial \theta_i^2}.$$

Die Lösungen für diese lauten

$$z(\theta_i, t) = \sin \left(\frac{\sqrt{10}}{\epsilon} \theta_i \right) \quad \text{und} \quad z(\theta_i, t) = \cos \left(\frac{\sqrt{10}}{\epsilon} \theta_i \right).$$

Leitet man diese auf und berücksichtigt dabei wieder eine Konstante, erhält man folgende Lösungen für die Differentialgleichung (4.1)

$$p(\theta_i, t) = -\frac{\epsilon}{\sqrt{10}} \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{\epsilon}\theta_i\right) + \text{const.} \quad \text{und} \quad p(\theta_i, t) = \frac{\epsilon}{\sqrt{10}} \sin\left(\frac{\sqrt{10}}{\epsilon}\theta_i\right) + \text{const.}$$

Welche dieser Lösungen die richtige ist, hängt von den gegebenen Randbedingungen ab. Für den Fall homogener Randbedingungen hat die Lösung die Form

$$p(\theta_i, t) = A \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{\epsilon}\theta_i\right) + B. \quad (4.2)$$

Für eine Lösung mit einer Symmetrie um null, müssen die folgenden drei Bedingungen gelten

- $p'(0) = 0$
- $p(\lambda) = 0$
- $p'(\lambda) = 0$

für ein λ aus dem Meinungsraum. Die Ableitung von (4.2) lautet

$$p'(\theta_i, t) = -A \frac{\sqrt{10}}{\epsilon} \sin\left(\frac{\sqrt{10}}{\epsilon}\theta_i\right).$$

Somit ist der erste Punkt erfüllt. Um das passende λ zu finden, betrachtet man

$$\sin\left(\frac{\sqrt{10}}{\epsilon}\lambda\right) = 0.$$

Dies ist nur erfüllt für $\frac{\sqrt{10}}{\epsilon}\lambda = \pi$, da $p \geq 0$ gelten muss. Folglich ist $\lambda = \frac{\epsilon\pi}{\sqrt{10}}$. λ in p eingesetzt ergibt

$$p(\lambda) = A + B.$$

Um $p(\lambda) = 0$ zu erhalten, muss daher $B = -A$ gelten.

Durch Verschiebung des x-Arguments erhält man weitere stationäre Lösungen.

Kapitel 5

Numerische Simulation des ursprünglichen DW-Modells

In diesem Kapitel geht es darum, das ursprüngliche DW-Modell mit Hilfe von Matlab zu simulieren. Dazu betrachtet man das Update einer Meinung eines Agenten i innerhalb eines Zeitschritts. Wie schon in Abschnitt (2.5.4) beschrieben, ist dies von der Form

$$\theta_i(t+1) = \begin{cases} \theta_i(t) + \mu(\theta_j(t) - \theta_i(t)), & \text{für } |\theta_i(t) - \theta_j(t)| \leq \epsilon, \\ \theta_i(t), & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\mu \in [0, 1/2]$ ein Konvergenzparameter ist und θ_j die Meinung eines zufällig gewählten Agenten j . Der Konvergenzparameter μ hat nur Auswirkungen auf die Geschwindigkeit der Meinungsbildung. Je größer μ , desto schneller entwickeln sich die Meinungsgruppen. Deshalb kann $\mu = 0.3$ im Folgenden fest gewählt werden.

Im DW-Modell interagiert Agent i nur mit Agent j , wenn dieser in dessen ϵ -Schranke liegt. Daher ist es interessant zu untersuchen was bei Änderung dieser Schranke passiert. Simuliert wird das Modell für 100 Agenten, die anfangs gleichmäßig über das Intervall $[-2, 2]$ verteilt sind.

- $\epsilon = 0.9$: Für große $\epsilon \geq 0.9$ bildet sich im Endzustand immer eine zentrale Meinung heraus. Im konkreten Fall $\epsilon = 0.9$ (Abbildung 5.1) kann man sehen, dass sich schon in $t = 0.2$ am Rand zwei Meinungsanhäufungen in symmetrischer Form entwickeln, die schnell in die Höhe gehen und sich jeweils auf eine Meinung einigen. Diese beiden Meinungen nähern sich geschlossen immer mehr an, bis sie sich in $t = 2.6$ im Zentrum treffen und diesen Zustand beibehalten.
- $\epsilon = 0.3$: Für den Fall einer kleineren ϵ -Schranke 0.3 (Abbildung 5.2) dauert die Entwicklung bis zum stationären Zustand etwas länger. Auch hier bilden sich anfangs schnell zwei dominante äußere Meinungsgruppen, die im Gegensatz zum ersten Fall ihre Position nicht mehr ändern. Weiter zur Mitte hin existieren zudem zwei sehr kleine Meinungsgruppen.

Im Zeitpunkt $t = 4$ entsteht eine neue zentrale Gruppe, die schnell anwächst und die anderen vier Gruppen schrumpfen lässt. Im Laufe der Zeit wachsen diese jedoch wieder an, sodass ab $t = 7.2$ alle fünf Meinungsgruppen gleich stark sind und ihr Position nicht mehr ändern.

- $\epsilon = 0.05$: Verringert man die ϵ -Schranke wiederum auf $\epsilon = 0.05$ (Abbildung 5.3), fällt auf, dass der stationäre Zustand im Gegensatz zu vorher sehr langsam erreicht wird. Bis auf die Geschwindigkeit startet die Entwicklung ähnlich wie in den ersten beiden Fällen. Allerdings liegen die beiden äußeren Meinungsgruppen viel näher am Rand. Diese wachsen immer mehr an, bis sich in $t = 38$ direkt neben den äußeren Gruppen zur Mitte hin zwei neue Meinungsgruppen bilden, die wiederum schnell anwachsen. Dies wiederholt sich in Zehnerzeitschritten, wobei alle alten Gruppen bestehen bleiben. Erst in $t = 85$, bei Bildung der siebten Gruppe vom Rand aus gesehen, sinken die restlichen äußeren Meinungsgruppen gleichmäßig und werden von der neuen Gruppe überholt. Dies geschieht erneut bei Bildung der zehnten Gruppe in $t = 114$, sodass eine Art Treppe entsteht, die in $t = 140$ ihren Höhepunkt in den drei zentralen größten Meinungsgruppen findet. Im stationären Zustand (ab $t = 140$) existieren somit 25 verschiedene Meinungsgruppen, die alle denselben Abstand haben.
- $\epsilon = 0.04$: Im Falle einer nicht wesentlich kleineren ϵ -Schranke sieht die zeitliche Entwicklung schon ganz anders aus. Für $\epsilon = 0.04$ kann man in Abbildung (5.4) sehen, dass aus der anfänglichen Gleichverteilung recht schnell eine leicht wellige Verteilung der Meinungen entsteht, die aber kein großes Ausmaß hat. Sie verändert sich nur noch ganz leicht bis sie in $t = 3.5$ schon ihren stationären Zustand erreicht, was man daran erkennen kann, dass bis $t = 6000$ keine Änderung mehr eintritt.
- $\epsilon = 0.03$: Schon für $\epsilon = 0.035$ sieht man, dass sich das Bild weder in $t = 1$ noch in $t = 6000$ ändert. Die anfängliche Gleichverteilung bleibt bestehen und die Agenten interagieren nicht mehr miteinander, da die Schranke zu gering ist.

Insgesamt kann man sagen, je größer ϵ , desto weniger Meinungsgruppen bilden sich heraus. Dies entspricht den Erwartungen, da die Agenten für große ϵ auch noch mit Agenten interagieren, die im Hinblick auf ihre Meinungen weit entfernt liegen. In dem Fall nähern sich die Agenten auch bei großer Entfernung immer noch an. Für kleinere ϵ hingegen bilden sich immer mehr Meinungsgruppen heraus, da die Agenten aus den verschiedenen Gruppen ab einem Abstand größer als ϵ nicht mehr miteinander interagieren und jeder seine Meinung beibehält. Dies geht so weit, bis ϵ so klein ist, dass die Agenten gar nicht mehr miteinander interagieren und jeder bei seiner Anfangsmeinung bleibt.

Die Größe von ϵ hat auch Auswirkungen auf die Geschwindigkeit der Meinungsbildung. Für große ϵ findet viel öfter eine Interaktion zwischen zwei Agenten statt, da die Wahrscheinlichkeit, dass beide in der ϵ -Schranke des anderen liegen, viel höher ist als für kleine ϵ .

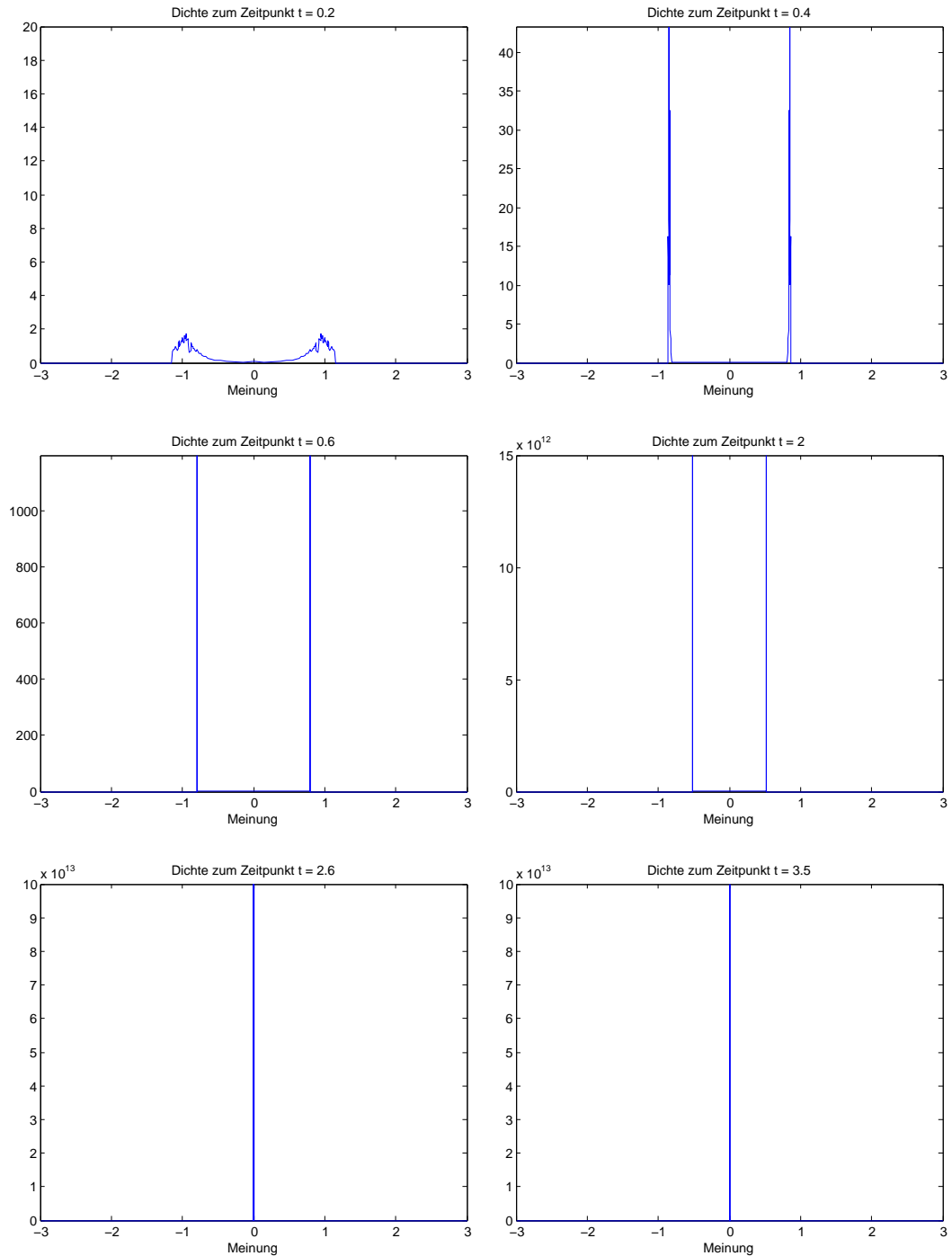


Abbildung 5.1: Numerische Simulation des DW-Modells mit gleichmäßig verteilten Anfangswerten auf $[-2; 2]$, $\mu = 0.3$, $\epsilon = 0.9$

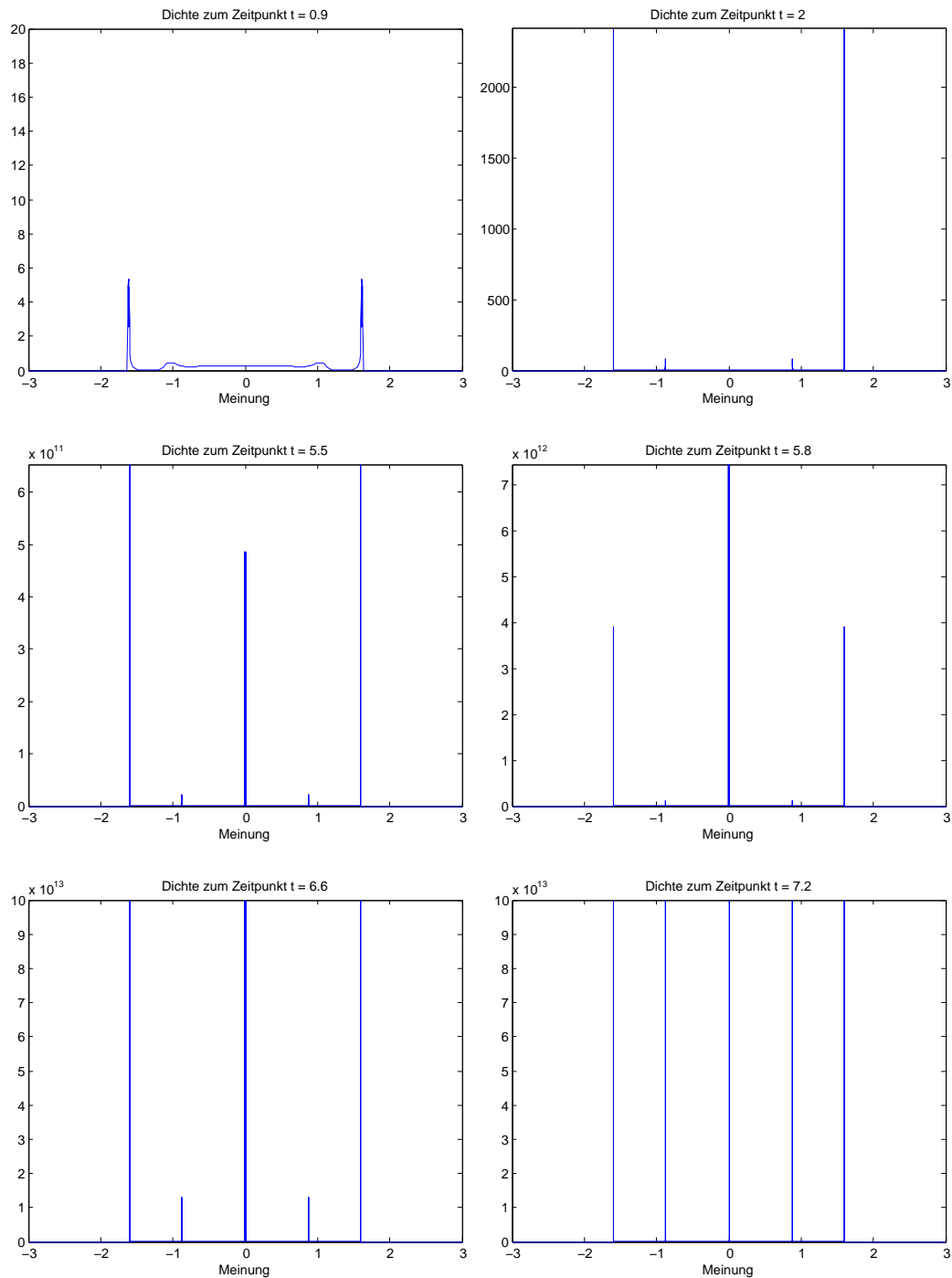


Abbildung 5.2: Numerische Simulation des DW-Modells mit gleichmäßig verteilten Anfangswerten auf $[-2; 2]$, $\mu = 0.3$, $\epsilon = 0.3$

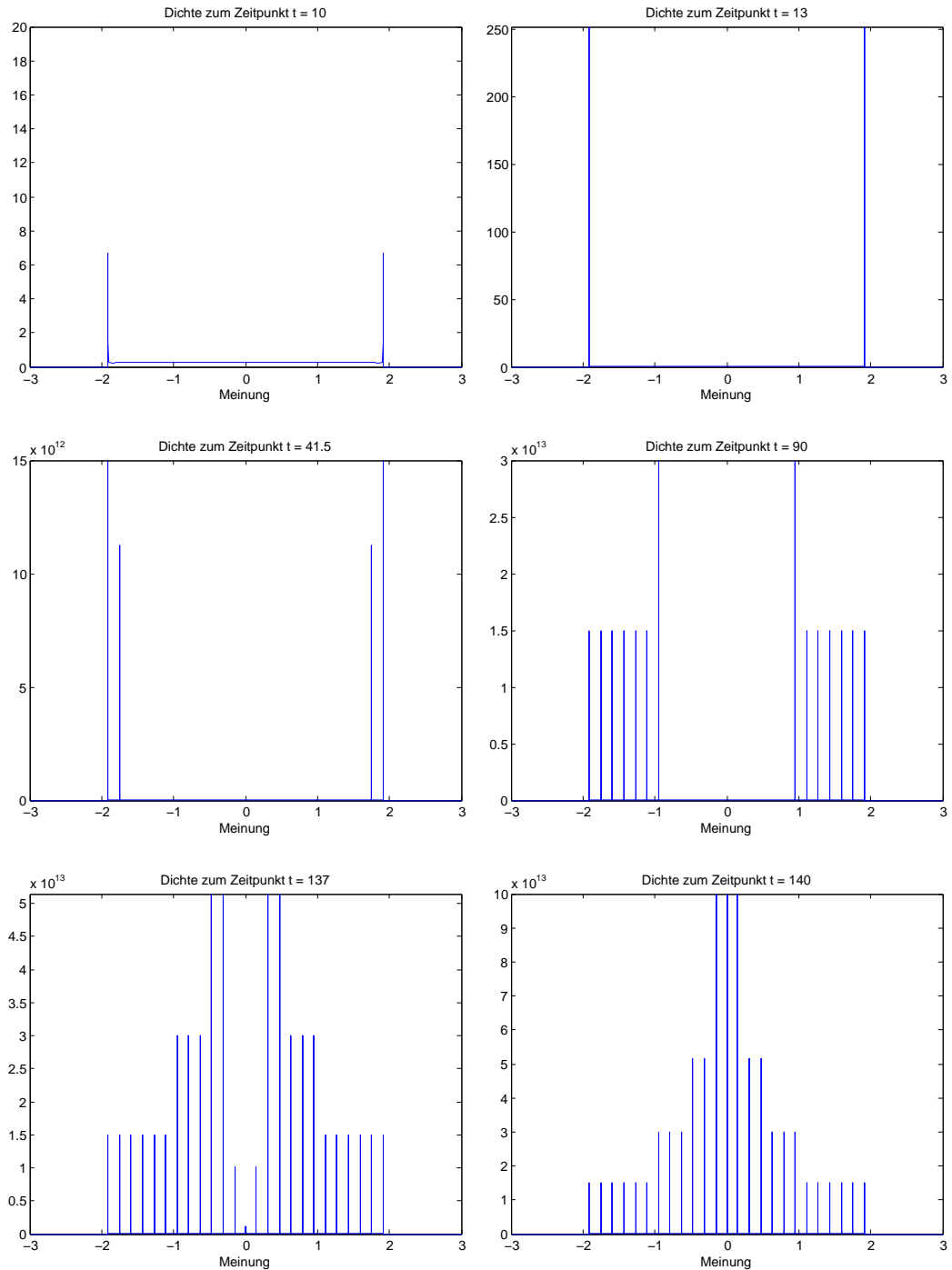


Abbildung 5.3: Numerische Simulation des DW-Modells mit gleichmäßig verteilten Anfangswerten auf $[-2; 2]$, $\mu = 0.3$, $\epsilon = 0.05$

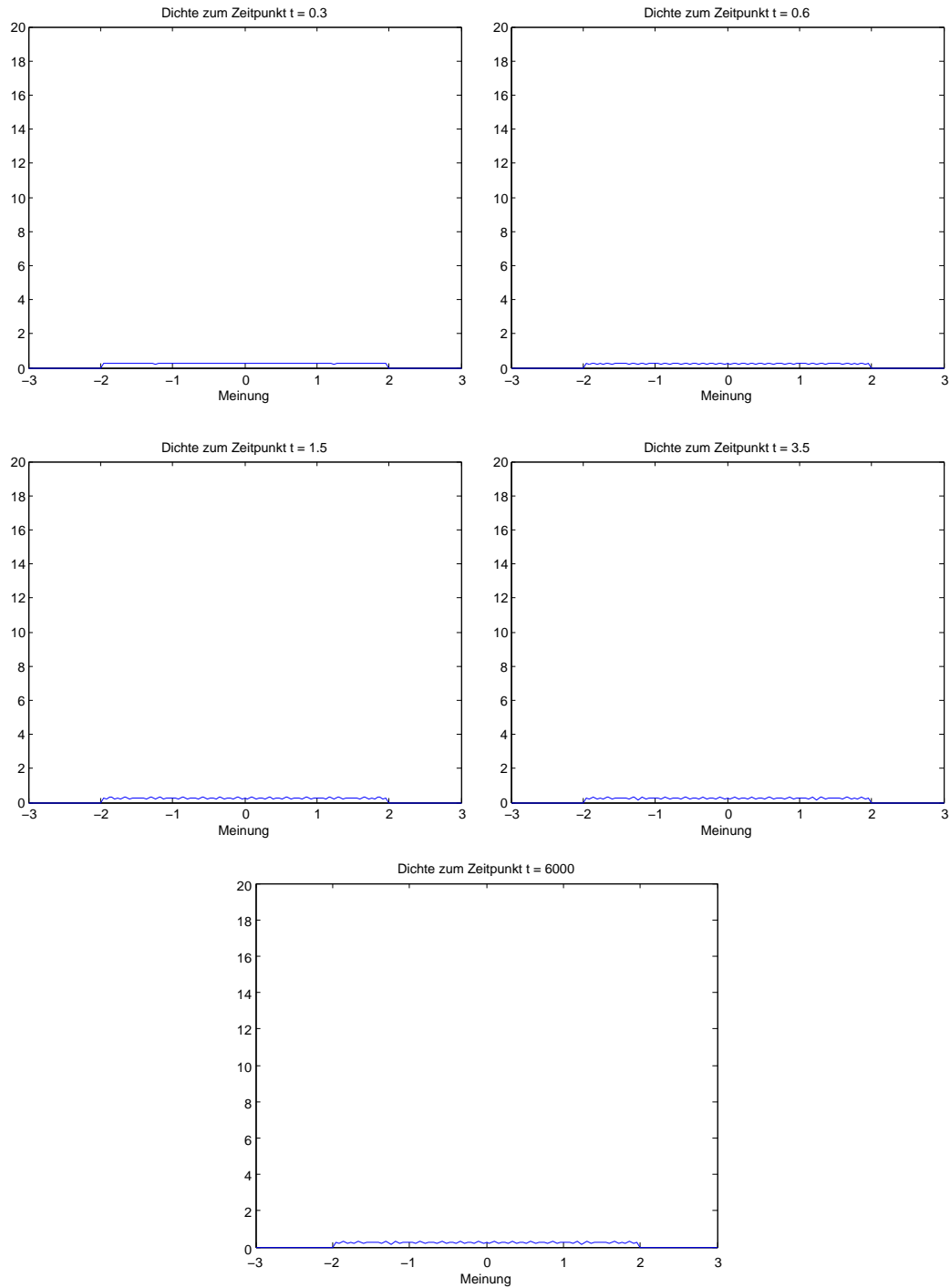


Abbildung 5.4: Numerische Simulation des DW-Modells mit gleichmäßig verteilten Anfangswerten auf $[-2; 2]$, $\mu = 0.3$, $\epsilon = 0.04$

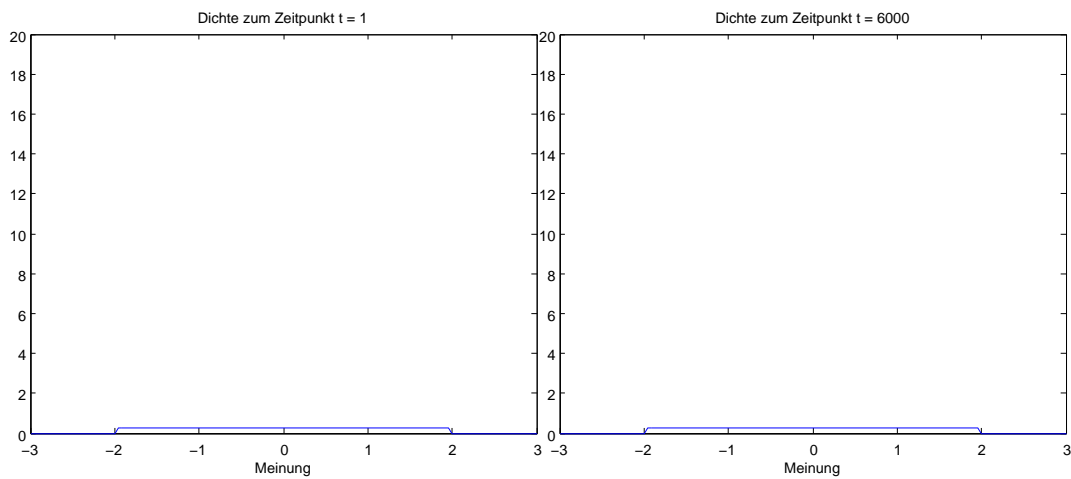


Abbildung 5.5: Numerische Simulation des DW-Modells mit gleichmäßig verteilten Anfangswerten auf $[-2; 2]$, $\mu = 0.3$, $\epsilon = 0.035$

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Zum Abschluss erfolgt nun ein kleiner Überblick über die Ergebnisse dieser Arbeit.

Zuerst sind die wichtigsten diskreten Meinungsbildungsmodelle vorgestellt worden, bestehend aus dem Voter-Modell, dem Sznajd-Modell und Galams Modell. Alle drei sind binäre Modelle mit nur zwei möglichen Meinungen. Die Simulationen der Modelle haben ergeben, dass sowohl das lineare Voter-Modell als auch Galams Modell im Endzustand immer einen Konsens erzielen. Das Sznajd-Modell hingegen kann einen Konsens oder aber einen aus beiden Meinungen alternierenden stationären Zustand annehmen.

Ein besonderes Augenmerk ist auf die Modifikationen und Erweiterungen des Sznajd-Modells gelegt worden, anhand dessen einige Begriffe wie *information noise*, *bounded confidence*, Phasenübergang, Frustration und simultanes und sequentielles Update erklärt worden sind.

Außerdem ist das Sznajd-Modell für mehr als zwei diskrete und für stetige Meinungen untersucht worden, sowie auf einem vollständigem Graphen.

Ein Vergleich zwischen dem Voter-Modell und Sznajd-Modell hat ergeben, dass sich das eindimensionale Sznajd-Modell komplett mittels des linearen Voter-Modells formulieren lässt und somit auch ein lineares Voter-Modell ist.

Im Anschluss sind die beiden stetigen Modelle von Hegselmann-Krause und Deffuant-Weisbuch betrachtet worden, die zuerst als agentenbasierte Modelle und anschließend als dichte-basierte Modelle definiert worden sind. Anhand von Simulationen ist gezeigt worden, dass die Entwicklung und die Anzahl der Meinungen im Endzustand von der Vertrauensschranke ϵ abhängen. Für große ϵ wird stets ein Konsens erreicht, für kleinere ϵ Polarisation und Fragmentation. Sowohl die ϵ -Werte als auch die Konvergenzgeschwindigkeit unterscheiden sich für die verschiedenen Modelle. Dasselbe gilt für die Erweiterungen und Modifikationen des HK- und DW-Modells. Beispielsweise ist das HK-Modell für stetige Meinungen untersucht worden, wodurch der Algorithmus schneller geworden ist, die Konvergenzgeschwindigkeit aber langsamer. Das DW-Modell ist zusätzlich auf einem zweidimensionalen Gitter und unter Anwesenheit von Extremisten modelliert worden, wobei die Extremisten sich nur durchsetzen können, wenn die Nichtextremisten tolerant genug sind, das heißt eine große Vertrauensschranke besitzen.

Als eine weitere gemeinsame Erweiterung der Modelle von HK und DW ist ein multidimensio-

naler Meinungsraum angenommen worden. Die Simulationen haben gezeigt, dass die Anzahl der Meinungsbereiche Einfluss auf die Anzahl der Nebenanhäufungen hat. Abgesehen davon tritt aber schon für kleine Vertrauensschranken ein Mehrheits-Konsens ein.

Auch eine Betrachtung der beiden Modelle im Hinblick auf extreme äußere Ereignisse hat ergeben, dass die Schadensausbreitung von ϵ abhängt.

Als letztes Modell ist ein diskretes Modell untersucht worden, dass die Bedeutung der Diffusion in der Meinungsbildung erläutert. Dabei geht es um die Entwicklung politischer Organisationen. Für starke Diffusion sind die Meinungen gleichverteilt und es bilden sich keine politischen Organisationen. Für schwache Diffusion formen sich Parteien, die sich immer weiterentwickeln, indem kleinere Parteien in größere übergehen. Ohne Diffusion entwickeln sich mehrere Parteien, die alle dieselbe Größe und denselben Abstand haben.

Anschließend sind in Kapitel 3 einige partielle Differentialgleichungen für das ursprüngliche DW-Modell und für das DW-Modell in Anwesenheit weniger Extremisten hergeleitet worden, die die zeitlichen Entwicklungen der Meinungsdichten beschreiben. Auf Grundlage dessen sind in Kapitel 4 die stationären Lösungen des ursprünglichen DW-Modells berechnet worden, die für den Fall homogener Randbedingungen eine von Kosinus abhängige Form haben.

Zusätzlich ist in Kapitel 5 das ursprüngliche DW-Modell mittels Matlab numerisch simuliert worden, wobei sich die Erwartungen an die Ergebnisse abhängig von der Größe der Vertrauensschranke bestätigt haben. Für große ϵ wird ein Konsens erzielt, für kleine ϵ entstehen mehrere Parteien, die im Endzustand mehr als ϵ auseinander liegen.

Die Untersuchungen der einzelnen Modelle lassen sich in viele Richtungen ausweiten. Ein weiterer Aspekt wäre im Fall des HK-Modells neben dem arithmetischen Mittel beim Meinungsupdate auch andere Durchschnitte zu berücksichtigen (siehe hierzu [11]).

Eine wichtige noch bestehende Frage für Modelle mit *bounded confidence* ist der Einfluss der Anfangsprofile auf den Endzustand. Man könnte beispielsweise versuchen Anfangsprofile zu klassifizieren, die zu wesentlich unterschiedlichen Ergebnissen führen. [16]

Zudem wäre es interessant alle Modelle auf skalenfreien Netzwerken von Barabási-Albert [2] zu betrachten, da dies der Realität näher kommt als quadratische Gitter im Sznajd-Modell oder vollständige Graphen im HK- und DW-Modell.

Literaturverzeichnis

- [1] Baker, G.A., Hague, J.P. (2008); Rise of the centrist: from binary to continuous opinion dynamics. *Int. J. Mod. Phys. C* 19, 1459-1475.
- [2] Barbarási, A. L., Albert, R. (1999); Emergence of scaling in random networks. *Science* 286, 509-512.
- [3] Behera, L., Schweitzer, F. (2003); On spatial consensus formation: Is the Sznajd model different from a voter model? *Int. J. Mod. Phys. C* 14, 1331-1354.
- [4] Ben-Naim, E., Krapivsky, P., Redner, S. (2003); Bifurcation and patterns in compromise processes. *Physica D* 183, 190-204.
- [5] Ben-Naim, E. (2005); Opinion dynamics: rise and fall of political parties. *Europhys. Lett.* 69, 671-677.
- [6] De La Lama, M., López, J., Wio, H. (2005); Spontaneous emergence of contrarian-like behaviour in an opinion spreading model. *Europhys. Lett.* 72, 851-857.
- [7] Dittmer, J.C. (2001); Consensus formation under bounded confidence. *Nonlinear Analysis* 47, 4615-4621.
- [8] Fortunato, S. (2004); The Krause-Hegselmann consensus model with discrete opinions. *Int. J. Mod. Phys. C* 15, 1021-1029.
- [9] Fortunato, S., Latora, V., Pluchino, A., Rapisarda, A. (2005); Vector opinion dynamics in a bounded confidence consensus model. *Int. J. Mod. Phys. C* 16, 1535-1551.
- [10] Fortunato, S., Stauffer, D. (2005); Computer simulations of opinions and their reactions to extreme events. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0501730v1>.
- [11] Hegselmann, R., Krause, U. (2004); Opinion dynamics driven by various ways of averaging. *Computational Economics* 25, 381-405.
- [12] Josek, I. (WWU Münster, 2009); Opinion Dynamics with Heterogeneous Agents.
- [13] Lorenz, J. (2005); A stabilization theorem for dynamics of continuous opinions. *Physica A* 355, 217-223.

- [14] Lorenz, J. (2005); Continuous opinion dynamics: Insight through interactive Markov chains. In: *Proceedings of IASTED Conference „Modelling, Simulation and Optimization MSO 2005“*, Ed. by G. Tonella, August 29-31, Oranjestad, Aruba, track 471-823.
- [15] Lorenz, J. (2006); Continuous opinion dynamics of multidimensional allocation problems under bounded confidence: More dimensions lead to better chances for consensus. *European Journal of Economic and Social Systems, EJESS - 19/2006 Beliefs, Norms, and Markets*, 213-227.
- [16] Lorenz, J. (2007); Continuous opinion dynamics under bounded confidence: A survey. *Int. J. Mod. Phys. C* 18, 1819-1838.
- [17] Lorenz, J. (2008); Heterogeneous bounds of confidence: Meet, discuss and find consensus! *Journal of Complexity* 15, 43-52.
- [18] Lorenz, J. (2003); Mehrdimensionale Meinungsdynamiken bei Wechselndem Vertrauen. Diploma thesis, University of Bremen. <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:gbv:46-dipl000000564>.
- [19] Lorenz, J. (2007); Repeated averaging and bounded confidence : Modeling, analysis and simulation of continuous opinion dynamics. PhD Thesis, University of Bremen. <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:gbv:46-diss000106688>.
- [20] Sabatelli, L., Richmond, P. (2003); Phase transitions, memory and frustration in a Sznajd-like model with synchronous updating. *Int. J. Mod. Phys. C* 14, 1223-1229.
- [21] Sánchez, J. R. (2004); A modified one-dimensional Sznajd model. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0408518v1>.
- [22] Schulze, C. (2004); Sznajd opinion dynamics with global and local neighbourhood. *Int. J. Mod. Phys. C* 15, 867-872.
- [23] Schweitzer, F. (2003); Meinungsbildung, Kommunikation und Kooperation aus physikalischer Perspektive. *Physik-Journal* 2, 57-62.
- [24] Schweitzer, F., Behera, L. (2009); Nonlinear voter models: The transition from invasion to coexistence. *Eur. Phys. J. B* 67, 301-318.
- [25] Slanina, F., Lavicka, H. (2004); Analytical results for the Sznajd model of opinion formation. *Eur. Phys. J. B* 35, 279-288.
- [26] Stauffer, D. (2005); Sociophysics simulations II: Opinion dynamics. In: *Modeling Cooperative Behavior in the Social Sciences*. Ed. by P.L. Garrido. *AIP Conference Proceedings* 779, 56-68.

- [27] Stauffer, D. (2003); How to convince others? In: *The Monte Carlo Method in the Physical Sciences: Celebrating the 50th Anniversary of the Metropolis Algorithm*. Ed. by J.E. Gubernatis. *AIP Conference Proceedings* 690, 147-155.
- [28] Sznajd-Weron, K., Sznajd, J. (2000); Opinion evolution in closed community. *Int. J. Mod. Phys. C* 11, 1157-1165.
- [29] Weisbuch, G., Deffuant, G., Amblard, F., Nadal, J.-P. (2006); Interacting agents and continuous opinion dynamics. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0111494v1>.
- [30] Tessone, C.J., Toral, R., Amengual, P., Wio, H.S., San Miguel, M. (2004); Neighborhood models of minority opinion spreading. *Eur. Phys. J. B* 39, 535-544.
- [31] Toral, R., Tessone, J. (2006); Finite size effects in the dynamics of opinion formation. *Communications in Computational Physics* 2, 177-195.
- [32] Weisbuch, G., Deffuant, G., Amblard, F. (2008); Persuasion dynamics. *Physica A* 353, 555-575.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst habe und neben dem Programm MATLAB keine weiteren als die im Literaturverzeichnis angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Alle auf der CD beigefügten Programme sind von mir selbst erstellt worden.

Münster, 11.05.2010