



MATHEMATICAL MODELLING OF LANE FORMATION IN CROWDS

DIPLOMARBEIT
zur Erlangung des akademischen Grades
DIPLOM-MATHEMATIKER/IN

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik

Betreuung:
Prof. Dr. Martin Burger

Eingereicht von:
Andrea Riberi

Münster, 18. Januar 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen der Modellierung von Fußgängerdynamik	2
2.1	Modelltheoretische Grundlagen	2
2.2	Numerische Grundlagen	4
3	Die Herleitung eines mathematischen Modells	6
3.1	Zwei Teilchenarten auf einer Bahn	6
3.2	Zwei Teilchenarten auf zwei Bahnen	10
3.3	Zwei Teilchenarten auf vielen Bahnen	13
4	Stationäre Lösungen: Teilchen auf zwei Bahnen	15
4.1	Analytische Betrachtung stationärer Gleichungen	15
4.2	Numerische Betrachtung stationärer Lösungen	18
5	Numerik des Modells	20
5.1	Diskretisierung des Modells	20
5.2	Implementierung	22
5.2.1	Ortsdiskretisierung	24
5.2.2	Zeitdiskretisierung: Das explizite Euler-Verfahren	25
5.2.3	Fehlerabfrage	27
5.2.4	Graphische Ausgabe	28
6	Simulation: Fußgänger auf zwei Bahnen	30
6.1	Ungekoppelte Bahnen	30
6.2	Symmetrische Wechselraten	32
6.3	Asymmetrische Wechselraten	36
7	Zusammenfassung und Ausblick	42
	Literaturverzeichnis	44

1 Einleitung

Seit der Industrialisierung im 19. Jahrhundert und der damit verbundenen Bevölkerungsexplosion führen große Menschenmassen auf engen Räumen zu verstärkten Problemen. Die Zunahme von in Städten lebenden Menschen erfordert Systeme, die große Mengen von Fußgängern sinnvoll durch Straßen, öffentlichen Einrichtungen, Stadien oder Flughäfen leitet.

Die numerische Mathematik beschäftigt sich u.a. mit der theoretischen Optimierung solcher Systeme. Mit mathematischen Modellen schafft sie ein besseres Verständnis der Fußgängerdynamik und dem Verhalten von Fußgängern auf engem Raum. Aufgrund ihrer Ergebnisse werden Einrichtungen so gestaltet, dass Gedränge vermieden und ein reibungsloser Ablauf gewährleistet wird.

Die Methoden der mathematischen Modellierung sind auch grundlegendes Instrument dieser Arbeit. Das Ziel dieser Arbeit soll es sein, ein Modell der Bewegung von Menschenmengen zu entwickeln und zu analysieren. Dazu werden vorerst in Kapitel 2 modelltheoretische und numerische Grundlagen erläutert, die in Kapitel 3 die Herleitung eines mathematischen Modells der Fußgängerdynamik ermöglichen.

In Kapitel 4 und 5 werden Vorgehensweisen zur Ermittlung von Gleichgewichtslösungen analytisch und numerisch diskutiert. Das Ergebnis ist eine Implementierung in das Software Programm `Mathwork Matlab (R2012a)`. Das implementierte Programm soll die Bewegung von Fußgängern mit unterschiedlichen Annahmen simulieren.

So ist hier von besonderem Interesse, wie Fußgänger sich verhalten, wenn die Dichte der Menschenmenge, d.h. die Anzahl der Menschen pro Quadratmeter, zunimmt. Fußgänger neigen dazu, entgegenkommenden Personen nach rechts und links auszuweichen. Die Wahrscheinlichkeit für die Wahl einer Ausweichrichtung wird als Wechselrate bezeichnet. Neben der Dichte soll außerdem der Effekt von verschiedenen Wechselraten untersucht werden. Zu erwarten ist, dass sich entgegenkommende Fußgänger in sogenannten Spuren organisieren und somit ungestört aneinander vorbeilaufen können. Die grundlegende Frage ist, ob sich nach Veränderung der Dichte oder der Wechselraten Gleichgewichtszustände einstellen.

2 Grundlagen der Modellierung von Fußgängerdynamik

Im folgenden Kapitel wird eine Einführung in die Modellierung der Bewegung von Menschenmengen und ein Überblick über verschiedene Modelle der Fußgängerdynamik gegeben. Im Anschluss werden grundlegende numerische Begriffe zur Modellierung definiert.

2.1 Modelltheoretische Grundlagen

Der Begriff *Menschenmenge* bezieht sich auf eine große Anzahl von Menschen, die sich in einem bestimmten begrenzten Raum aufhält. Das räumliche Verhalten der Menge wird als *Bewegung* der Menge bezeichnet. Videoaufnahmen von Fußgängern zeigen kollektive Phänomene der Menge, wie z.B. Stauformationen oder Spurenbildung. Die *Bildung von Spuren* ist ein wichtiges Beispiel der Selbstorganisation zweier sich entgegengesetzt bewogender Gruppen von Fußgängern. Indem die Fußgänger Zusammenstöße vermeiden und seitlich ausweichen, teilt sich die Menge und es bilden sich Spuren von Fußgängern, die sich in die gleiche Richtung bewegen (s. Abb. 1).



Abbildung 1: Spurenbildung in einem Experiment im Rahmen des Projekts „Hermes“ des Bundesministeriums für Bildung und Forschung [13]

Das Verhalten von Fußgängern wird anhand von mathematischen Modellen analysiert, die

die Bewegung von Menschenmengen simulieren. Das Ziel der Modellierung ist dabei eine qualitative Abbildung des Verhaltens der Menge. Es existiert jedoch kein umfassendes Modell, welches das Verhalten einer Menge in einer Vielzahl unterschiedlicher Situationen beschreibt. Dies liegt an der hohen Komplexität der Fußgängerdynamik. Schon das Verhalten einzelner Personen hängt von diversen Faktoren ab, wie z.B. von Alter, Geschlecht oder Kulturzugehörigkeit (vgl. [3]). Außerdem wird sich ein Fußgänger in einer Alltagssituation maßgeblich anders verhalten als in einer Paniksituation. In dem *social force model* (Sozialkräfte-Modell) von Helbing [8] ist es durch die Wahl eines einzelnen Parameters möglich, die Nervosität der Fußgänger festzulegen und damit eine geordnetes Szenario in ein Panikszenario zu überführen. Im Allgemeinen werden stark vereinfachende Annahmen bei der Modellierung von Menschenmengen getroffen. Die Qualität eines mathematischen Modells lässt sich dabei durch den Vergleich mit realen Phänomenen beurteilen. So werden reale kollektive Phänomene beobachtet und untersucht, indem die Dynamik von Fußgängern in Experimenten gefilmt wird (s. z.B. [14]).

Die mathematische Modellierung von Menschenmengen ermöglicht es auch, Paniksituationen in Gebäuden oder bei Großveranstaltungen zu simulieren. Anhand der Ergebnisse der Simulationen lassen sich Evakuierungspläne erstellen, überprüfen und verbessern.

Bei der mathematischen Modellierung von Menschenmengen werden zwei Arten von Modellen unterschieden. Bei *mikroskopischen Modellen* wird jede Person in der Menge individuell betrachtet. Eine Person der Menge wird dann als Teilchen bezeichnet. Die zeitliche Entwicklung eines Teilchens wird dabei durch physikalische und soziale Gesetzmäßigkeiten bestimmt. Diese Gesetzmäßigkeiten beschreiben die Interaktion der Teilchen sowohl untereinander als auch mit ihrer örtlichen Umgebung. Beispiele für solche Modelle sind das oben erwähnte *social force model* [8] oder Zellularautomaten-Modelle (CA-Modelle) [6, 11]. Bei CA-Modellen wird die betrachtete Fläche in ein regelmäßiges Gitter unterteilt. Jedes Teilchen springt annahmegemäß mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit auf benachbarte Gitterpunkte. Auf besetzte Gitterpunkte können die Teilchen dabei nicht springen.

Im Gegensatz zu mikroskopischen Modellen beschreiben *makroskopische Modelle* die Menge als Ganzes und vernachlässigen die individuelle Teilchenbewegung. Die Menge wird durch eine Dichtefunktion in Abhängigkeiten von (kontinuierlicher) Zeit und Raum dargestellt. Dazu werden unter anderem Konzepte aus der Fluiddynamik herangezogen. In [9] wird die Menschenmenge als „denkendes Fluid“ verstanden. Andere Herangehensweisen beruhen auf der optimalen Transporttheorie [10] oder auf nichtlinearen Erhaltungsgesetzen [4]. Eine ausführliche Betrachtung verschiedener mikroskopischer und makroskopischer Modelle zur Fußgängersimulation findet sich in [7]. Dort wird auch hingewiesen, dass die Fußgängerdynamik Gemeinsamkeiten zur Verkehrsdynamik aufweist.

2.2 Numerische Grundlagen

Im folgenden Abschnitt werden die Begriffe *finite Differenzen*, *Stabilität*, *Konsistenz* und *Konvergenz* eingeführt. Diese Begriffe werden zur Diskretisierung von Differentialoperatoren benötigt (s. Abschnitt 5.1). Der Abschnitt orientiert sich an Kapitel 2 aus [1].

Zur Approximation der Ableitungen einer Funktion können finite Differenzen herangezogen werden. Die Grundidee hierbei ist es, die Ableitungen durch Differenzenbildung auf einem Gitter zu approximieren. Ist u eine eindimensionale Funktion, so lässt sich die erste Ableitung z.B. durch

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x) &\approx D^+ u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x) &\approx D^- u(x) = \frac{u(x-h) - u(x)}{h}, \text{ oder} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x) &\approx D^c u(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}\end{aligned}$$

für kleine $h > 0$ approximieren. Man bezeichnet D^+ als *Vorwärts-*, D^- als *Rückwärts-* und D^c als *zentralen Differenzenquotienten*. Alle drei Differenzenquotienten konvergieren für $h \rightarrow 0$ gegen die Ableitung von u . Daher sollten sie für hinreichend kleine h eine gute Approximation von $\frac{\partial u}{\partial x}$ liefern. Die zweite Ableitung lässt sich durch

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx D^2 u(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

approximieren.

Wendet man bei einer glatten Funktion u den Mittelwertsatz auf das Restglied der Taylor-Entwicklung an, erhält man

$$\|D^+ u(x) - \frac{\partial u}{\partial x}(x)\|_\infty \leq \frac{h}{2} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_\infty.$$

Wir machen also einen Fehler erster Ordnung in h bei der Approximation mit dem Vorwärtsdifferenzenquotienten. Man spricht dann von einer *Konsistenzordnung* eins. Auch der Rückwärtsdifferenzenquotient besitzt Konsistenzordnung eins. Der zentrale Differenzenquotient erreicht Konsistenzordnung zwei. Die Güte einer numerischen Approximation wird durch Konsistenz und Stabilität bewertet.

Definition 2.1 (diskrete Konsistenz). Sei $L : C^k(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$ ein Differentialoperator der Ordnung k und L_h eine diskrete Approximation auf einem Gitter G_h . Die Approximation heißt diskret konsistent, falls

$$\|L_h(u|_{G_h}) - (Lu)|_{G_h}\| \rightarrow 0$$

gilt. Die Konsistenzordnung der Approximation ist m , falls

$$\|L_h(u|_{G_h}) - (Lu)|_{G_h}\| \leq Ch^m$$

für alle $u \in C^{k+m}(\Omega)$ gilt.

Definition 2.2 (diskrete Stabilität). Sei $L_h : G_h \rightarrow \mathbb{R}^N$ die diskrete Approximation eines Differentialoperators. Dann heißt L_h diskret stabil, wenn L_h^{-1} existiert, für $h > 0$ hinreichend klein und $\|L_h^{-1}\|$ gleichmäßig in h beschränkt ist.

In der Numerik impliziert Konsistenz und Stabilität die Konvergenz eines Verfahrens:

Satz 2.3. Sei $L_h : C^k(\omega) \rightarrow C^0(\Omega)$ eine stabile und konsistente Approximation eines Differentialoperators $L : C^k(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$. Sei u die Lösung von $Lu = f$ und u_h die Lösung von $L_h u_h = f_h$, so dass $f_h \rightarrow f$ für $h \rightarrow 0$. Dann ist die Approximation konvergent, d.h. $u_h \rightarrow u$ für $h \rightarrow 0$.

Beweis. Durch Subtraktion von $Lu = f$ und $L_h u_h = f_h$ erhalten wir

$$L_h(u - u_h) = (L_h - L)u + (f - f_h)$$

und wegen der Stabilität von L_h folgt

$$\|u - u_h\| = \|(L_h^{-1}((L_h - L)u + (f - f_h)))\| \leq \|L_h^{-1}\| \cdot (\|(L_h - L)u\| + \|f - f_h\|),$$

mit $\|L_h^{-1}\|$ gleichmäßig beschränkt. Wegen der Konsistenz von L_h folgt $\|(L_h - L)u\| \rightarrow 0$. Da $\|f - f_h\| \rightarrow 0$, folgt die Konvergenz $\|u - u_h\| \rightarrow 0$. \square

3 Die Herleitung eines mathematischen Modells

In diesem Kapitel wird die Bewegung von zwei Teilchenarten auf verschiedenen Bahnen modelliert. Ziel der Modellierung ist es, ein System von kontinuierlichen Gleichungen zu erstellen, das die Bewegung und somit das Verhalten von zwei Teilchenarten auf n Bahnen beschreibt. Dazu wird zunächst die in Abschnitt 3.1 getroffene Annahme von nur einer Bahn in Abschnitt 3.2 auf zwei Bahnen erweitert, bevor in Abschnitt 3.3 von n Bahnen ausgegangen wird.

Die folgenden Überlegungen basieren auf der Modellentwicklung von [12, Chapter 2]. Wir entwickeln zunächst ein mikroskopisches Modell, in dem jedes Teilchen individuell betrachtet wird, und untersuchen dazu einen *Teilchenhüpfprozess* für zwei Teilchenarten mit Volumensausschluss auf einem eindimensionalen Gitter. Dies führt im Übergang zum Kontinuum zu einem System von Drift-Diffusion-Gleichungen.

3.1 Zwei Teilchenarten auf einer Bahn

Wir betrachten ein eindimensionales Gitter $h\mathbb{Z}$ mit Gitterweite $h > 0$. Jeder Gitterpunkt kann von einem roten Teilchen r oder blauen Teilchen b besetzt werden. $r(x, t)$ und $b(x, t)$ beschreiben dann die Wahrscheinlichkeit, ein rotes bzw. blaues Teilchen am Ort x zum Zeitpunkt t zu finden. Die Teilchen bewegen sich abhängig von Diffusion sowie von skalierten Potentialen $V(x, t)$ und $W(x, t)$ und können in einem Zeitschritt τ höchstens einen Gitterpunkt weiterspringen. Die Übergangswahrscheinlichkeiten lassen sich mithilfe der Boltzmannverteilung aus der statistischen Thermodynamik formulieren:

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}_r^+(x, t) &= P(\text{Sprung eines roten Teilchens von } x \rightarrow x + h \text{ in } (t, t + \tau)) \\ &= k \cdot \exp(-\beta(V(x + h, t) - V(x, t))), \\ \tilde{\Pi}_r^-(x, t) &= P(\text{Sprung eines roten Teilchens von } x \rightarrow x - h \text{ in } (t, t + \tau)) \\ &= k \cdot \exp(-\beta(V(x - h, t) - V(x, t))), \\ \tilde{\Pi}_b^+(x, t) &= P(\text{Sprung eines blauen Teilchens von } x \rightarrow x + h \text{ in } (t, t + \tau)) \\ &= k \cdot \exp(-\beta(W(x + h, t) - W(x, t))),\end{aligned}$$

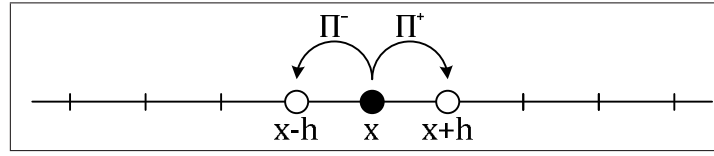


Abbildung 2: Sprünge auf einer Bahn

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}_b^-(x, t) &= P(\text{Sprung eines blauen Teilchens von } x \rightarrow x - h \text{ in } (t, t + \tau)) \\ &= k \cdot \exp(-\beta(W(x - h, t) - W(x, t))).\end{aligned}$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein rotes bzw. blaues Teilchen am Ort x bleibt,

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}_r &= k \cdot \exp(V(x, t) - V(x, t)) = k, \\ \tilde{\Pi}_b &= k \cdot \exp(W(x, t) - W(x, t)) = k.\end{aligned}$$

Ein Teilchen kann jedoch nur auf einen benachbarten Platz springen, falls dieser von keinem anderen Teilchen besetzt ist. Die Wahrscheinlichkeit für einen leeren Ort x zum Zeitpunkt t lautet

$$P(\text{Position } x \text{ ist zum Zeitpunkt } t \text{ leer}) = P_0(x, t) = 1 - r(x, t) - b(x, t).$$

Folglich sind die entsprechend geänderten Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned}\Pi_r^+(x, t) &= \tilde{\Pi}_r^+ \cdot P_0(x + h, t) = \tilde{\Pi}_r^+ \cdot (1 - r(x + h, t) - b(x + h, t)), \\ \Pi_r^-(x, t) &= \tilde{\Pi}_r^- \cdot P_0(x - h, t) = \tilde{\Pi}_r^- \cdot (1 - r(x - h, t) - b(x - h, t)), \\ \Pi_b^+(x, t) &= \tilde{\Pi}_b^+ \cdot P_0(x + h, t) = \tilde{\Pi}_b^+ \cdot (1 - r(x + h, t) - b(x + h, t)), \\ \Pi_b^-(x, t) &= \tilde{\Pi}_b^- \cdot P_0(x - h, t) = \tilde{\Pi}_b^- \cdot (1 - r(x - h, t) - b(x - h, t)).\end{aligned}$$

Dieses Modell lässt sich auch stochastisch herleiten. Dabei zeigt sich, dass die Eigenschaft der *detailed balance* bis zur Ordnung h^2 erfüllt ist (vgl. [12, S. 10])

Die Übergangswahrscheinlichkeiten lassen sich nach Anwendung einer Taylorentwicklung zweiter Ordnung um $x + \frac{h}{2}$ und Skalierung von β umschreiben als

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}_r^+(x, t) &= \alpha_r - h\beta_r \partial_x V(x + \frac{h}{2}, t), \\ \tilde{\Pi}_r^-(x, t) &= \alpha_r + h\beta_r \partial_x V(x - \frac{h}{2}, t), \\ \tilde{\Pi}_b^+(x, t) &= \alpha_b - h\beta_b \partial_x W(x + \frac{h}{2}, t), \\ \tilde{\Pi}_b^-(x, t) &= \alpha_b + h\beta_b \partial_x W(x - \frac{h}{2}, t).\end{aligned}$$

Hierbei sind α_r und α_b Diffusionskonstanten und β_r und β_b Mobilitätskonstanten.

Für die Herleitung des Systems der Drift-Diffusion-Gleichungen werden im Folgenden noch weitere Terme benötigt (s. [12]):

$$\begin{aligned} \partial_x \Pi_r^-(x, t) - \partial_x \Pi_r^+(x, t) &= 2h\beta_r \frac{\partial}{\partial x} (\partial_x V(x, t)(1 - r(x, t) - b(x, t))) \\ &\quad + 2h\alpha_r (\partial_{xx} r(x, t) + \partial_{xx} b(x, t)) + \mathcal{O}(h^2), \end{aligned} \quad (3.1a)$$

$$\partial_{xx} \Pi_r^+(x, t) + \partial_{xx} \Pi_r^-(x, t) = -2\alpha_r (\partial_{xx} r(x, t) + \partial_{xx} b(x, t)) + \mathcal{O}(h), \quad (3.1b)$$

$$\Pi_r^-(x + h, t) - \Pi_r^+(x - h, t) = 2h\beta_r \partial_x V(x, t)(1 - r(x, t) - b(x, t)) + \mathcal{O}(h^2), \quad (3.1c)$$

$$\Pi_r^-(x + h, t) + \Pi_r^+(x - h, t) = 2\alpha_r (1 - r(x, t) - b(x, t)) + \mathcal{O}(h). \quad (3.1d)$$

Die Wahrscheinlichkeit, ein rotes Teilchen am Ort x nach einem Zeitschritt τ , d.h. zum Zeitpunkt $t + \tau$, zu finden, lautet

$$\begin{aligned} r(x, t + \tau) &= P(\text{rotes Teilchen bleibt am Ort } x) \\ &\quad + P(\text{rotes Teilchen springt von } x - h \text{ nach } x) \\ &\quad + P(\text{rotes Teilchen springt von } x + h \text{ nach } x) \\ &= r(x, t) \cdot (1 - \Pi_r^+(x, t) - \Pi_r^-(x, t)) + r(x - h, t) \cdot \Pi_r^+(x - h, t) \\ &\quad + r(x + h, t) \cdot \Pi_r^-(x + h, t). \end{aligned}$$

Umformen dieser Gleichung liefert

$$\begin{aligned} r(x, t + \tau) - r(x, t) &= r(x, t) \cdot (-\Pi_r^+(x, t) - \Pi_r^-(x, t) + \Pi_r^+(x - h, t) \\ &\quad + \Pi_r^-(x + h, t)) + (r(x - h, t) - r(x, t)) \cdot \Pi_r^+(x - h, t) \\ &\quad + (r(x + h, t) - r(x, t)) \cdot \Pi_r^-(x + h, t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Wir nehmen nun an, dass r im Grenzwert eine kontinuierliche Dichte $r = r(x, t)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}_+$ darstellt, vgl. [2], und führen eine Taylorentwicklung für τ und h durch. Es gilt

$$\begin{aligned} r(x, t + \tau) &= r(x, t) + \partial_t r(x, t)\tau + \mathcal{O}(\tau^2), \\ r(x + h, t) &= r(x, t) + \partial_x r(x, t)h + \frac{1}{2}\partial_{xx} r(x, t)h^2 + \mathcal{O}(h^3), \\ r(x - h, t) &= r(x, t) - \partial_x r(x, t)h + \frac{1}{2}\partial_{xx} r(x, t)h^2 + \mathcal{O}(h^3), \\ \Pi_r^+(x - h, t) &= \Pi_r^+(x, t) - \partial_x \Pi_r^+(x, t)h + \frac{1}{2}\partial_{xx} \Pi_r^+(x, t)h^2 + \mathcal{O}(h^3), \\ \Pi_r^-(x + h, t) &= \Pi_r^-(x, t) + \partial_x \Pi_r^-(x, t)h + \frac{1}{2}\partial_{xx} \Pi_r^-(x, t)h^2 + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

Gleichung (3.2) ist nach Einsetzen der Taylorentwicklungen für kleine τ und h äquivalent zu

$$\begin{aligned}
\partial_t r(x, t)\tau &= r(x, t) \cdot (h(\partial_x \Pi_r^-(x, t) - \partial_x \Pi_r^+(x, t)) + \frac{h^2}{2}(\partial_{xx} \Pi_r^+(x, t) + \partial_{xx} \Pi_r^-(x, t))) \\
&\quad + (-h\partial_x r(x, t) + \frac{h^2}{2}\partial_{xx} r(x, t)) \cdot \Pi_r^+(x - h, t) \\
&\quad + (h\partial_x r(x, t) + \frac{h^2}{2}\partial_{xx} r(x, t)) \cdot \Pi_r^-(x + h, t) \\
&= r(x, t) \cdot (h(\partial_x \Pi_r^-(x, t) - \partial_x \Pi_r^+(x, t)) + \frac{h^2}{2}(\partial_{xx} \Pi_r^+(x, t) + \partial_{xx} \Pi_r^-(x, t))) \\
&\quad + h\partial_x r(x, t) \cdot (\Pi_r^-(x + h, t) - \Pi_r^+(x - h, t)) \\
&\quad + \frac{h^2}{2}\partial_{xx} r(x, t) \cdot (\Pi_r^+(x - h, t) + \Pi_r^-(x + h, t)).
\end{aligned}$$

Mit den zuvor berechneten Termen (3.1a) - (3.1d) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\partial_t r(x, t)\tau &= 2h^2\beta_r \cdot r(x, t) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\partial_x V(x, t)(1 - r(x, t) - b(x, t))) \\
&\quad + 2h^2\beta_r \cdot \partial_x r(x, t) \cdot \partial_x V(x, t)(1 - r(x, t) - b(x, t)) \\
&\quad + h^2\alpha_r \cdot r(x, t) \cdot (\partial_{xx} r(x, t) + \partial_{xx} b(x, t)) \\
&\quad + h^2\alpha_r \cdot \partial_{xx} r(x, t)(1 - r(x, t) - b(x, t))
\end{aligned}$$

und die Kettenregel liefert anschließend

$$\begin{aligned}
\partial_t r(x, t)\tau &= 2h^2\beta_r \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(r(x, t) \cdot (1 - r(x, t) - b(x, t)) \cdot \partial_x V(x, t) \right) \\
&\quad + h^2\alpha_r \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - r(x, t) - b(x, t)) \cdot \partial_x r(x, t) + r(x, t) \cdot (\partial_x r(x, t) + \partial_x b(x, t)) \right).
\end{aligned}$$

Setzen wir $\tau := 2h^2$ als Zeitschritt, $\mu_r := \frac{2\beta_r}{\alpha_r}$ als Mobilitätskoeffizienten und $D_r := \frac{\alpha_r}{2}$ als Diffusionskoeffizient, dann lautet die Kontinuumsgleichung der roten Teilchen

$$\begin{aligned}
\partial_t r(x, t) &= D_r \cdot \frac{\partial}{\partial x} [(1 - r(x, t) - b(x, t))\partial_x r(x, t) + r(x, t)(\partial_x r(x, t) + \partial_x b(x, t))] \\
&\quad + \mu_r r(x, t)(1 - r(x, t) - b(x, t))\partial_x V(x, t).
\end{aligned}$$

Die Kontinuumsgleichung der blauen Teilchen ergibt sich analog und somit erhalten wir das System von Drift-Diffusion-Gleichungen

$$\begin{aligned}
\partial_t r &= D_r \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - r - b)\partial_x r + r(\partial_x r + \partial_x b) + \mu_r r(1 - r - b)\partial_x V \right), \\
\partial_t b &= D_b \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - r - b)\partial_x b + b(\partial_x r + \partial_x b) + \mu_b b(1 - r - b)\partial_x W \right).
\end{aligned}$$

Die Gleichungen lassen sich auch ohne die Volumendichte $r + b$ schreiben als

$$\begin{aligned}\partial_t r &= D_r \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left((1-b)\partial_x r + r\partial_x b + \mu_r r(1-r-b)\partial_x V \right), \\ \partial_t b &= D_b \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left((1-r)\partial_x b + b\partial_x r + \mu_b b(1-r-b)\partial_x W \right).\end{aligned}$$

3.2 Zwei Teilchenarten auf zwei Bahnen

Im vorherigen Abschnitt wurden die Drift-Diffusion-Gleichungen für zwei Arten von Teilchen, die sich auf einer Bahn bewegen, bestimmt. Im folgendem Abschnitt betrachten wir zwei Bahnen, zwischen denen die Teilchen springen können. Die Teilchendichte auf der jeweiligen Bahn wird mit r_1, b_1 bzw. mit r_2, b_2 beschrieben. Die Wahrscheinlichkeit, ein rotes Teilchen auf Bahn 1 am Ort x nach einem Zeitschritt τ zu finden, lautet dann

$$\begin{aligned}r_1(x, t + \tau) &= P(\text{rotes Teilchen bleibt auf Bahn 1 am Ort } x) \\ &+ P(\text{rotes Teilchen springt auf Bahn 1 von } x - h \text{ nach } x) \\ &+ P(\text{rotes Teilchen springt auf Bahn 1 von } x + h \text{ nach } x) \\ &+ P(\text{rotes Teilchen springt am Ort } x \text{ von Bahn 2 auf Bahn 1}).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Ein rotes Teilchen springt mit Wahrscheinlichkeit $\tilde{\Pi}_r^+$ und $\tilde{\Pi}_r^-$ nach rechts und links sowie mit Wahrscheinlichkeit $\tilde{\Pi}_r^\downarrow$ und $\tilde{\Pi}_r^\uparrow$ von Bahn 2 auf Bahn 1 und umgekehrt. $\tilde{\Pi}^\downarrow$ und $\tilde{\Pi}^\uparrow$ werden im Folgenden als *Wechselraten* bezeichnet. Unter Beachtung des Volumensausschluss lauten die entsprechend geänderten Übergangswahrscheinlichkeiten auf Bahn 1

$$\begin{aligned}\Pi_{r_1}^+(x, t) &= \tilde{\Pi}_r^+(x, t) \cdot (1 - r_1(x+h, t) - b_1(x+h, t)), \\ \Pi_{r_1}^-(x, t) &= \tilde{\Pi}_r^-(x, t) \cdot (1 - r_1(x-h, t) - b_1(x-h, t)), \\ \Pi_{r_2}^\downarrow(x, t) &= \tilde{\Pi}_r^\downarrow(x, t) \cdot (1 - r_1(x, t) - b_1(x, t)), \\ \Pi_{r_1}^\uparrow(x, t) &= \tilde{\Pi}_r^\uparrow(x, t) \cdot (1 - r_2(x, t) - b_2(x, t)).\end{aligned}$$

Somit ist Gleichung (3.3) äquivalent zu

$$\begin{aligned}r_1(x, t + \tau) &= r_1(x, t) \cdot (1 - \Pi_{r_1}^+(x, t) - \Pi_{r_1}^-(x, t) - \Pi_{r_1}^\uparrow(x, t)) \\ &+ r_1(x-h, t) \cdot \Pi_{r_1}^+(x-h, t) + r_1(x+h, t) \cdot \Pi_{r_1}^-(x+h, t) \\ &+ r_2(x, t) \cdot \Pi_{r_2}^\downarrow(x, t) \\ &= r_1(x, t) \cdot (1 - \Pi_{r_1}^+(x, t) - \Pi_{r_1}^-(x, t)) + r_1(x-h, t) \cdot \Pi_{r_1}^+(x-h, t) \\ &+ r_1(x+h, t) \cdot \Pi_{r_1}^-(x+h, t) + r_2(x, t) \cdot \Pi_{r_2}^\downarrow(x, t) - r_1(x, t) \cdot \Pi_{r_1}^\uparrow(x, t).\end{aligned}$$

Dies entspricht Gleichung (3.2) mit dem zusätzlichen Term $r_2\Pi_{r_2}^\downarrow - r_1\Pi_{r_1}^\uparrow$, der die Bewegung der roten Teilchen in y -Richtung zwischen den Bahnen beschreibt. Ein analoges Vorgehen wie

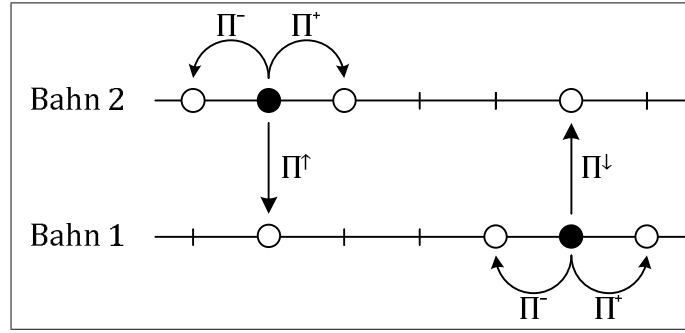


Abbildung 3: Sprünge auf und zwischen zwei Bahnen

in Abschnitt 3.1 mit kontinuierlichem Übergang in x -Richtung und diskreter Beschreibung in y -Richtung führt auf die Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t r_1 &= D_r \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - r_1 - b_1) \partial_x r_1 + r_1 (\partial_x r_1 + \partial_x b_1) + \mu_r r_1 ((1 - r_1 - b_1) \partial_x V) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2h^2} \Pi_{r_2}^\downarrow r_2 - \frac{1}{2h^2} \Pi_{r_1}^\uparrow r_1. \end{aligned}$$

Nachdem wir obiges Vorgehen auf die übrigen Teilchendichten r_2 , b_1 und b_2 mit entsprechenden Wechselraten angewendet haben, erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \partial_t r_2 &= D_r \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - r_2 - b_2) \partial_x r_2 + r_2 (\partial_x r_2 + \partial_x b_2) + \mu_r r_2 ((1 - r_2 - b_2) \partial_x V) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2h^2} \cdot (\Pi_{r_1}^\uparrow r_1 - \Pi_{r_2}^\downarrow r_2), \\ \partial_t b_1 &= D_b \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - r_1 - b_1) \partial_x b_1 + b_1 (\partial_x r_1 + \partial_x b_1) + \mu_b b_1 ((1 - r_1 - b_1) \partial_x W) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2h^2} \cdot (\Pi_{b_2}^\downarrow b_2 - \Pi_{b_1}^\uparrow b_1), \\ \partial_t b_2 &= D_b \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - r_2 - b_2) \partial_x b_2 + b_2 (\partial_x r_2 + \partial_x b_2) + \mu_b b_2 ((1 - r_2 - b_2) \partial_x W) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2h^2} \cdot (\Pi_{b_1}^\uparrow b_1 - \Pi_{b_2}^\downarrow b_2). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Wahl der Sprungwahrscheinlichkeiten Π^\downarrow und Π^\uparrow

Im Folgenden soll diskutiert werden, welche Form die Gleichungen erhalten, wenn unterschiedliche Annahmen für die Sprungwahrscheinlichkeiten Π^\downarrow und Π^\uparrow getroffen werden. Diese Diskussion wird beispielhaft anhand der Gleichung für rote Teilchen auf Bahn 1 durchgeführt. Zur Vereinfachung werden die folgenden Ausdrücke bei (x, t) ausgewertet, sofern keine anderen Angaben gemacht werden.

Betrachten wir *symmetrisch konstante Wechselraten* und ignorieren beim Wechsel der Bahn

den Volumensausschluss, d.h. wir nehmen $\Pi_{r_1}^\uparrow = \Pi_{r_2}^\downarrow = \tilde{c} = 2h^2c$ an, so gilt

$$\begin{aligned} \partial_t r_1 = D_r \frac{\partial}{\partial x} & \left((1 - r_1 - b_1) \partial_x r_1 + r_1 (\partial_x r_1 + \partial_x b_1) + \mu_r r_1 ((1 - r_1 - b_1) \partial_x V) \right) \\ & + c(r_2 - r_1). \end{aligned}$$

Für *asymmetrisch konstante Wechselraten* $\Pi_{r_1}^\uparrow = \tilde{c}_1 = 2h^2c_1$ und $\Pi_{r_2}^\downarrow = \tilde{c}_2 = 2h^2c_2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_t r_1 = D_r \frac{\partial}{\partial x} & \left((1 - r_1 - b_1) \partial_x r_1 + r_1 (\partial_x r_1 + \partial_x b_1) + \mu_r r_1 ((1 - r_1 - b_1) \partial_x V) \right) \\ & + c_2 r_2 - c_1 r_1. \end{aligned}$$

Beachten wir nun noch den *Volumensausschluss bei asymmetrisch konstanten Wechselraten* und setzen also voraus, dass der Platz auf der anderen Bahn frei ist, damit ein Teilchen nach oben oder unten springen kann, d.h.

$$\begin{aligned} \Pi_{r_1}^\uparrow = \tilde{c}_1(1 - r_2 - b_2) = 2h^2c_1(1 - r_2 - b_2) \quad \text{und} \\ \Pi_{r_2}^\downarrow = \tilde{c}_2(1 - r_1 - b_2) = 2h^2c_2(1 - r_1 - b_2), \end{aligned} \tag{3.5}$$

dann ist

$$\begin{aligned} \partial_t r_1 = D_r \frac{\partial}{\partial x} & \left((1 - r_1 - b_1) \partial_x r_1 + r_1 (\partial_x r_1 + \partial_x b_1) + \mu_r r_1 ((1 - r_1 - b_1) \partial_x V) \right) \\ & + c_2 r_2 (1 - r_1 - b_1) - c_1 r_1 (1 - r_2 - b_2). \end{aligned}$$

Abschließend soll angenommen werden, dass die Teilchen *vorausschauend* agieren. In unserem Modell wird das Potential V später so gewählt, dass $\partial_x V = 1$. Dies bedeutet, dass sich die roten Teilchen somit nur nach rechts bewegen. Damit springt ein rotes Teilchen am Ort x nur dann auf die andere Bahn, wenn auch der Ort $x + h$ nicht von einem blauen Teilchen besetzt ist. Ob sich ein blaues Teilchen auf $x - h$ befindet, ist aufgrund der Laufrichtung irrelevant für die Wahrscheinlichkeit eines Sprunges. Die Wechselraten lauten dann

$$\begin{aligned} \Pi_{r_1}^\uparrow = \tilde{c}_1(1 - r_2 - b_2)(1 - b_2(x + h)) = 2h^2c_1(1 - r_2 - b_2)(1 - b_2(x + h)) \quad \text{und} \\ \Pi_{r_2}^\downarrow = \tilde{c}_2(1 - r_1 - b_2)(1 - b_1(x + h)) = 2h^2c_2(1 - r_1 - b_2)(1 - b_1(x + h)). \end{aligned}$$

Mit Taylorentwicklung gilt

$$b_{1,2}(x + h) = b_{1,2}(x) + \mathcal{O}(h).$$

Damit lassen sich die Wechselraten für kleine Gitterweiten h schreiben als

$$\begin{aligned} \Pi_{r_1}^\uparrow = 2h^2c_1(1 - r_2 - b_2)(1 - b_2) \quad \text{und} \\ \Pi_{r_2}^\downarrow = 2h^2c_2(1 - r_1 - b_2)(1 - b_1). \end{aligned}$$

Die Drift-Diffusion-Gleichung der roten Teilchen auf Bahn 1 lautet dann

$$\begin{aligned} \partial_t r_1 = D_r \frac{\partial}{\partial x} & \left((1 - r_1 - b_1) \partial_x r_1 + r_1 (\partial_x r_1 + \partial_x b_1) + \mu_r r_1 ((1 - r_1 - b_1) \partial_x V) \right) \\ & + c_2 r_2 (1 - r_1 - b_1) (1 - b_1) - c_1 r_1 (1 - r_2 - b_2) (1 - b_2). \end{aligned}$$

3.3 Zwei Teilchenarten auf vielen Bahnen

Mithilfe der bisherigen Ergebnisse können wir jetzt ein Modell mit beliebig vielen Bahnen aufstellen. Wir betrachten rote und blaue Teilchen, die sich auf n Bahnen, $n > 2$, bewegen. Für die äußeren Bahnen mit Index 1 und n können die Teilchen nur nach oben bzw. unten springen. Dies entspricht dem Fall von zwei Bahnen, der im vorherigen Abschnitt behandelt wurde. Um die zeitliche Änderung der Teilchendichte auf den inneren Bahnen zu modellieren, wird berücksichtigt, dass Teilchen jeweils von oben als auch von unten springen können. Die Gleichungen für die blauen Teilchen lassen sich wieder analog zu den Gleichungen der roten Teilchen herleiten. Die Übergangswahrscheinlichkeiten der roten Teilchen werden wie im vorherigen Abschnitt mit $\tilde{\Pi}_r^+$, $\tilde{\Pi}_r^-$, $\tilde{\Pi}_r^\downarrow$ und $\tilde{\Pi}_r^\uparrow$ bezeichnet. Somit lauten die geänderten Übergangswahrscheinlichkeiten auf der i -ten Bahn mit $1 < i < n$

$$\begin{aligned} \Pi_{r_i}^+(x, t) &= \tilde{\Pi}_r^+(x, t) \cdot (1 - r_i(x + h, t) - b_i(x + h, t)), \\ \Pi_{r_i}^-(x, t) &= \tilde{\Pi}_r^+(x, t) \cdot (1 - r_i(x - h, t) - b_i(x - h, t)), \\ \Pi_{r_i}^\downarrow(x, t) &= \tilde{\Pi}_r^\downarrow(x, t) \cdot (1 - r_{i-1}(x, t) - b_{i-1}(x, t)), \\ \Pi_{r_i}^\uparrow(x, t) &= \tilde{\Pi}_r^\uparrow(x, t) \cdot (1 - r_{i+1}(x, t) - b_{i+1}(x, t)). \end{aligned}$$

Der Fall, dass zwei Teilchen gleichzeitig von oben und von unten auf eine Bahn springen, wurde dabei vernachlässigt. Dies ist erlaubt, da wir einen sehr kleinen Zeitschritt τ annehmen und damit Konflikte beim Bahnenwechsel vermeiden.

Wir betrachten nun die Teilchendichte r_i der roten Teilchen auf einer inneren Bahn i mit $1 < i < n$. Dann lautet die Wahrscheinlichkeit, ein rotes Teilchen auf dieser Bahn am Ort x zum Zeitpunkt $t + \tau$ anzutreffen,

$$\begin{aligned} r_i(x, t + \tau) &= P(\text{rotes Teilchen bleibt auf Bahn } i \text{ am Ort } x) \\ &+ P(\text{rotes Teilchen springt auf Bahn } i \text{ von } x - h \text{ nach } x) \\ &+ P(\text{rotes Teilchen springt auf Bahn } i \text{ von } x + h \text{ nach } x) \\ &+ P(\text{rotes Teilchen springt am Ort } x \text{ von Bahn } i + 1 \text{ auf Bahn } i) \\ &+ P(\text{rotes Teilchen springt am Ort } x \text{ von Bahn } i - 1 \text{ auf Bahn } i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r_i(x, t) \cdot (1 - \Pi_{r_i}^+(x, t) - \Pi_{r_i}^-(x, t) - \Pi_{r_i}^\uparrow(x, t) - \Pi_{r_i}^\downarrow(x, t)) \\
&\quad + r_i(x - h, t) \cdot \Pi_{r_i}^+(x - h, t) + r_i(x + h, t) \cdot \Pi_{r_i}^-(x + h, t) \\
&\quad + r_{i+1}(x, t) \cdot \Pi_{r_{i+1}}^\downarrow(x, t) + r_{i-1}(x, t) \cdot \Pi_{r_{i-1}}^\uparrow(x, t).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir ähnlich wie im Fall von zwei Bahnen durch kontinuierliche Betrachtung in x -Richtung und diskreter Betrachtung in y -Richtung die Gleichung

$$\begin{aligned}
\partial_t r_i &= D_r \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - r_i - b_i) \partial_x r_i + r_i (\partial_x r_i + \partial_x b_i) + \mu_r r_i ((1 - r_i - b_i) \partial_x V) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2h^2} \Pi_{r_{i+1}}^\downarrow r_{i+1} + \frac{1}{2h^2} \Pi_{r_{i-1}}^\uparrow r_{i-1} - \frac{1}{2h^2} \Pi_{r_i}^\uparrow r_i - \frac{1}{2h^2} \Pi_{r_i}^\downarrow r_i
\end{aligned}$$

für $1 < i < n$.

Insgesamt ergibt sich dann das System

$$\begin{aligned}
\partial_t r_1 &= D_r \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - r_1 - b_1) \partial_x r_1 + r_1 (\partial_x r_1 + \partial_x b_1) + \mu_r r_1 ((1 - r_1 - b_1) \partial_x V) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2h^2} \cdot (\Pi_{r_2}^\downarrow r_2 - \Pi_{r_1}^\uparrow r_1), \\
\partial_t r_i &= D_r \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - r_i - b_i) \partial_x r_i + r_i (\partial_x r_i + \partial_x b_i) + \mu_r r_i ((1 - r_i - b_i) \partial_x V) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2h^2} (\Pi_{r_{i+1}}^\downarrow r_{i+1} + \Pi_{r_{i-1}}^\uparrow r_{i-1} - \Pi_{r_i}^\uparrow r_i - \Pi_{r_i}^\downarrow r_i), \quad \text{für } 1 < i < n, \\
\partial_t r_n &= D_r \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - r_n - b_n) \partial_x r_n + r_n (\partial_x r_n + \partial_x b_n) + \mu_r r_n ((1 - r_n - b_n) \partial_x V) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2h^2} \cdot (\Pi_{r_{n-1}}^\uparrow r_{n-1} - \Pi_{r_n}^\downarrow r_n), \\
\partial_t b_1 &= D_b \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - r_1 - b_1) \partial_x b_1 + b_1 (\partial_x r_1 + \partial_x b_1) + \mu_b b_1 ((1 - r_1 - b_1) \partial_x W) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2h^2} \cdot (\Pi_{b_2}^\downarrow b_2 - \Pi_{b_1}^\uparrow b_1), \\
\partial_t b_i &= D_b \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - r_i - b_i) \partial_x b_i + b_i (\partial_x r_i + \partial_x b_i) + \mu_b b_i ((1 - r_i - b_i) \partial_x W) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2h^2} (\Pi_{b_{i+1}}^\downarrow b_{i+1} + \Pi_{b_{i-1}}^\uparrow b_{i-1} - \Pi_{b_i}^\uparrow b_i - \Pi_{b_i}^\downarrow b_i), \quad \text{für } 1 < i < n, \\
\partial_t b_n &= D_b \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - r_n - b_n) \partial_x b_n + b_n (\partial_x r_n + \partial_x b_n) + \mu_b b_n ((1 - r_n - b_n) \partial_x W) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2h^2} \cdot (\Pi_{b_{n-1}}^\uparrow b_{n-1} - \Pi_{b_n}^\downarrow b_n).
\end{aligned}$$

4 Stationäre Lösungen: Teilchen auf zwei Bahnen

Im folgenden Abschnitt betrachten wir das Modell aus Abschnitt 3.2 mit zwei Teilchenarten auf zwei Bahnen. Wir modellieren zwei Gruppen von Fußgängern, die sich auf Kreisbahnen in entgegengesetzter Richtung bewegen. Dazu betrachten wir rote Teilchen r und blaue Teilchen b , welche sich nur in ihren Potentialen unterscheiden. Wählen wir als Potential der roten Teilchen $V(x, t) = x$ und als Potential der blauen Teilchen $W(x, t) = -x$, so ist

$$\partial_x V(x, t) = 1 \text{ und } \partial_x W(x, t) = -1.$$

Diese Wahl der Potentiale bedeutet, dass sich die Fußgänger entgegengesetzt bewegen. Wir versehen das Modell mit periodischen Randbedingungen. Damit stellen wir sicher, dass ein Teilchen, das die Bahn am rechten Rand verlässt, die Bahn am linken Rand wieder betritt und umgekehrt. Die Masse der roten und blauen Teilchen wird erhalten.

Wir untersuchen für dieses Modell, ob sich Gleichgewichtszustände einstellen. Dazu führen wir zunächst eine analytische Betrachtung stationärer Lösungen der Differentialgleichung (3.4) in einer einfacheren Form ohne Diffusion durch. Für den allgemeinen Fall mit Diffusion diskutieren wir im Anschluss die numerische Betrachtung von stationären Lösungen.

4.1 Analytische Betrachtung stationärer Gleichungen

Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass ein Fußgänger nicht willkürlich nach vorne oder hinten laufen wird. Damit können wir die Diffusion der Teilchen vernachlässigen und nur den Drift betrachten. Diese Annahmen führen auf das System

$$\begin{aligned} \partial_t r_1 &= D\mu \frac{\partial}{\partial x} (r_1(1 - r_1 - b_1)) + \frac{1}{2h^2} \cdot (\Pi_{r_2}^\downarrow r_2 - \Pi_{r_1}^\uparrow r_1), \\ \partial_t r_2 &= D\mu \frac{\partial}{\partial x} (r_2(1 - r_2 - b_2)) + \frac{1}{2h^2} \cdot (\Pi_{r_1}^\uparrow r_1 - \Pi_{r_2}^\downarrow r_2), \\ \partial_t b_1 &= D\mu \frac{\partial}{\partial x} (b_1(1 - r_1 - b_1)) + \frac{1}{2h^2} \cdot (\Pi_{b_2}^\downarrow b_2 - \Pi_{b_1}^\uparrow b_1), \\ \partial_t b_2 &= D\mu \frac{\partial}{\partial x} (b_2(1 - r_2 - b_2)) + \frac{1}{2h^2} \cdot (\Pi_{b_1}^\uparrow b_1 - \Pi_{b_2}^\downarrow b_2). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Wir erwarten, dass sich nach einer gewissen Zeit ein Gleichgewichtszustand der Teilchendichten einstellt. In diesem Zustand ändern sich die Teilchendichten nicht mehr. Also suchen wir stationäre Lösungen des obigen Systems, d.h. Dichten mit

$$\partial_t r_1^\infty = 0, \quad \partial_t r_2^\infty = 0, \quad \partial_t b_1^\infty = 0, \quad \partial_t b_2^\infty = 0.$$

Dieses Vorgehen führt uns auf das zeitunabhängige Problem

$$\begin{aligned} 0 &= D\mu \frac{\partial}{\partial x} (r_1^\infty (1 - r_1^\infty - b_1^\infty)) + \frac{1}{2h^2} \cdot (\Pi_{r_2}^\downarrow r_2^\infty - \Pi_{r_1}^\uparrow r_1^\infty), \\ 0 &= D\mu \frac{\partial}{\partial x} (r_2^\infty (1 - r_2^\infty - b_2^\infty)) + \frac{1}{2h^2} \cdot (\Pi_{r_1}^\uparrow r_1^\infty - \Pi_{r_2}^\downarrow r_2^\infty), \\ 0 &= D\mu \frac{\partial}{\partial x} (b_1^\infty (1 - r_1^\infty - b_1^\infty)) + \frac{1}{2h^2} \cdot (\Pi_{b_2}^\downarrow b_2^\infty - \Pi_{b_1}^\uparrow b_1^\infty), \\ 0 &= D\mu \frac{\partial}{\partial x} (b_2^\infty (1 - r_2^\infty - b_2^\infty)) + \frac{1}{2h^2} \cdot (\Pi_{b_1}^\uparrow b_1^\infty - \Pi_{b_2}^\downarrow b_2^\infty). \end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst Teilchen, die nicht zwischen den Bahnen springen. Da die Bahnen in diesem Fall nicht gekoppelt sind, genügt es, die Situation von Teilchen auf einer Bahn zu betrachten. Hierfür lautet das stationäre Problem ohne Diffusion

$$\begin{aligned} 0 &= D\mu \frac{\partial}{\partial x} (r^\infty (1 - r^\infty - b^\infty)), \\ 0 &= D\mu \frac{\partial}{\partial x} (b^\infty (1 - r^\infty - b^\infty)). \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$r^\infty (1 - r^\infty - b^\infty) = c_1 = \text{const.}, \quad (4.2)$$

$$b^\infty (1 - r^\infty - b^\infty) = c_2 = \text{const.} \quad (4.3)$$

Division von Gleichung (4.2) durch Gleichung (4.3) ergibt

$$r^\infty = \frac{c_1}{c_2} b^\infty.$$

Damit ist Gleichung (4.3) äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 &= b^\infty \left(1 - \frac{c_1}{c_2} b^\infty - b^\infty\right) - c_2 \\ &= (b^\infty)^2 - \frac{c_2}{c_1 + c_2} b^\infty + \frac{c_2^2}{c_1 + c_2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Für $0 \neq c_1 + c_2 \leq \frac{1}{4}$ lauten die Lösungen von (4.4)

$$b_{1,2}^\infty = \frac{c_2 \pm \sqrt{c_2^2 (1 - 4c_1 - 4c_2)}}{2(c_1 + c_2)}$$

und mit $r^\infty = \frac{c_1}{c_2} b^\infty$ ist

$$r_{1,2}^\infty = \frac{c_1 \pm \sqrt{c_1^2(1 - 4c_1 - 4c_2)}}{2(c_1 + c_2)}.$$

Die Konstanten c_1 und c_2 werden durch die Massenerhaltung

$$\int_0^1 r =: M_r, \quad \int_0^1 b =: M_b \quad (4.5)$$

eindeutig bestimmt.

Bemerkung 4.1 (konstante stationäre Lösungen auf ungekoppelten Bahnen). *Die stationäre Gleichung (4.1) wird von $r^\infty = \text{const.}$ und $b^\infty = \text{const.}$ gelöst. Aus (4.5) folgt*

$$r^\infty = M_r, \quad b^\infty = M_b.$$

Es existieren also immer konstante stationäre Lösungen, welche eindeutig durch die Massen M_r und M_b bestimmt sind.

Wir betrachten nun *dominante Wechselraten*, d.h. Wechselraten mit

$$\begin{aligned} D\mu \frac{\partial}{\partial x} (r_1(1 - r_1 - b_1)) &\ll \Pi_{r_2}^\downarrow r_2 - \Pi_{r_1}^\uparrow r_1, \\ D\mu \frac{\partial}{\partial x} (r_2(1 - r_2 - b_2)) &\ll \Pi_{r_1}^\uparrow r_1 - \Pi_{r_2}^\downarrow r_2, \\ D\mu \frac{\partial}{\partial x} (b_1(1 - r_1 - b_1)) &\ll \Pi_{b_2}^\downarrow b_2 - \Pi_{b_1}^\uparrow b_1, \\ D\mu \frac{\partial}{\partial x} (b_2(1 - r_2 - b_2)) &\ll \Pi_{b_1}^\uparrow b_1 - \Pi_{b_2}^\downarrow b_2. \end{aligned}$$

Dann können wir für stationäre Lösungen r_1^∞ und r_2^∞

$$\Pi_{r_2}^\downarrow r_2^\infty = \Pi_{r_1}^\uparrow r_1^\infty \quad (4.6)$$

annehmen. Die Gesamtmasse M_r aller roten Teilchen ist aufgrund der Massenerhaltung konstant. Es gilt

$$r_1^\infty + r_2^\infty = M_r \quad (4.7)$$

mit

$$M_r = \int_0^1 r_1 + \int_0^1 r_2 = \int_0^1 r_1 + r_2. \quad (4.8)$$

Mit (4.6) und (4.8) lassen sich konstante stationäre Lösungen berechnen. Es gilt

$$r_1^\infty = \frac{\Pi_{r_2}^\downarrow}{\Pi_{r_1}^\uparrow} r_2^\infty = \frac{\Pi_{r_2}^\downarrow}{\Pi_{r_1}^\uparrow} (M_r - r_1^\infty),$$

d.h.

$$r_1^\infty = \frac{M_r}{\frac{\Pi_{r_2}^\uparrow}{\Pi_{r_1}^\downarrow} + 1}.$$

Mit (4.7) ist dann

$$r_2^\infty = \frac{M_r}{\frac{\Pi_{r_2}^\downarrow}{\Pi_{r_1}^\uparrow} + 1}.$$

Analog lassen sich konstante stationäre Lösungen b_1^∞ und b_2^∞ berechnen.

Bemerkung 4.2 (konstante stationäre Lösungen bei dominanten Wechselraten). *Die stationäre Gleichung (4.1) wird von $r_1^\infty = \text{const.}$, $r_2^\infty = \text{const.}$, $b_1^\infty = \text{const.}$ und $b_2^\infty = \text{const.}$ gelöst. Aus (4.6) und (4.7) folgt*

$$\begin{aligned} r_1^\infty &= \frac{M_r}{\frac{\Pi_{r_2}^\uparrow}{\Pi_{r_1}^\downarrow} + 1}, & b_1^\infty &= \frac{M_b}{\frac{\Pi_{b_2}^\uparrow}{\Pi_{b_1}^\downarrow} + 1}, \\ r_2^\infty &= \frac{M_r}{\frac{\Pi_{r_2}^\downarrow}{\Pi_{r_1}^\uparrow} + 1}, & b_2^\infty &= \frac{M_b}{\frac{\Pi_{b_2}^\downarrow}{\Pi_{b_1}^\uparrow} + 1}. \end{aligned}$$

Es existieren also immer konstante stationäre Lösungen, welche eindeutig durch die Gesamtmassen M_r und M_b bestimmt sind.

4.2 Numerische Betrachtung stationärer Lösungen

Das numerische Vorgehen zum Auffinden stationärer Lösungen wird im folgenden Abschnitt besprochen. Anstelle stationäre Lösungen einer Differentialgleichung analytisch zu berechnen, können wir auch numerisch prüfen, ob sich stationäre Lösungen als Lösung der Differentialgleichung einstellen. Dazu wird die Differentialgleichung in ein Anfangswertproblem überführt und anschließend numerisch gelöst.

Definition 4.3 (Anfangswertproblem). *Ein Anfangswertproblem ist eine Differentialgleichung*

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = f(t, u(t))$$

mit Anfangswerten

$$u(t_0) = u_0.$$

Wählen wir zur Approximation der Zeitableitung den Vorwärtsdifferenzenquotienten

$D^+u(t) = \frac{u(t+\tau)-u(t)}{\tau}$, so erhalten wir das *explizite Euler-Verfahren*

$$u(t + \tau) = u(t) + \tau \cdot f(t, u(t)).$$

Das explizite Eulerverfahren besitzt Konsistenzordnung eins.

Eine *stationäre Lösung* einer Differentialgleichung ist eine zeitunabhängige Lösung.

Definition 4.4 (stationäre Lösung). $u(t)$ heißt stationäre Lösung des Anfangswertproblems, falls

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = 0, \quad u(t_0) = u_0.$$

Wir möchten nun für das System von Differentialgleichungen (3.4) mit gegebenen Anfangswerten prüfen, ob sich eine Lösung als Langzeitlösung einstellt. Dies bedeutet formal

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_1(t)}{\partial t} &\approx 0, \\ \frac{\partial r_2(t)}{\partial t} &\approx 0, \\ \frac{\partial b_1(t)}{\partial t} &\approx 0, \\ \frac{\partial b_2(t)}{\partial t} &\approx 0 \end{aligned}$$

für $t > 0$ groß. Das numerische Vorgehen zur Lösung der Differentialgleichungen wird im folgenden Kapitel besprochen.

5 Numerik des Modells

In diesem Kapitel werden stationäre Lösungen des Modells 3.2 numerisch mit den in Abschnitt 4.2 vorgestellten Methoden ermittelt. Die Implementierung ermöglicht die Simulation der Bewegung von Fußgängern, deren Ergebnisse in Kapitel 6 aufgeführt werden. Das System von Differentialgleichungen mit vorgegeben Anfangswerten und periodischen Randbedingungen wird auf einem Gitter diskretisiert. Im Anschluss wird das Modell in der Software `Mathwork Matlab (R2012a)` implementiert. Der Aufbau des Kapitels orientiert sich an [5].

5.1 Diskretisierung des Modells

Wir betrachten das System (3.4) mit $\partial_x V = 1$ und $\partial_x W = -1$ (vgl. Kapitel 4):

$$\begin{aligned}
 \partial_t r_1(x, t) &= D_r \frac{\partial}{\partial x} ((1 - r_1(x, t) - b_1(x, t)) \partial_x r_1(x, t) + r_1(x, t) (\partial_x r_1(x, t) + \partial_x b_1(x, t))) \\
 &\quad + \mu_r r_1(x, t) (1 - r_1(x, t) - b_1(x, t)) + \frac{1}{2h^2} (\Pi_{r_2}^\downarrow(x, t) r_2(x, t) \\
 &\quad - \Pi_{r_1}^\uparrow(x, t) r_1(x, t)) \\
 \partial_t r_2(x, t) &= D_r \frac{\partial}{\partial x} ((1 - r_2(x, t) - b_2(x, t)) \partial_x r_2(x, t) + r_2(x, t) (\partial_x r_2(x, t) + \partial_x b_2(x, t))) \\
 &\quad + \mu_r r_2(x, t) (1 - r_2(x, t) - b_2(x, t)) + \frac{1}{2h^2} (\Pi_{r_1}^\uparrow(x, t) r_1(x, t) \\
 &\quad - \Pi_{r_2}^\downarrow(x, t) r_2(x, t)) \\
 \partial_t b_1(x, t) &= D_b \frac{\partial}{\partial x} ((1 - r_1(x, t) - b_1(x, t)) \partial_x b_1(x, t) + b_1(x, t) (\partial_x r_1(x, t) + \partial_x b_1(x, t))) \\
 &\quad - \mu_b b_1(x, t) (1 - r_1(x, t) - b_1(x, t)) + \frac{1}{2h^2} (\Pi_{b_2}^\downarrow(x, t) b_2(x, t) \\
 &\quad - \Pi_{b_1}^\uparrow(x, t) b_1(x, t)) \\
 \partial_t b_2(x, t) &= D_b \frac{\partial}{\partial x} ((1 - r_2(x, t) - b_2(x, t)) \partial_x b_2(x, t) + b_2(x, t) (\partial_x r_2(x, t) + \partial_x b_2(x, t))) \\
 &\quad - \mu_b b_2(x, t) (1 - r_2(x, t) - b_2(x, t)) + \frac{1}{2h^2} (\Pi_{b_1}^\uparrow(x, t) b_1(x, t) \\
 &\quad - \Pi_{b_2}^\downarrow(x, t) b_2(x, t))
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

mit $x \in (0, L)$, $t \in (0, T)$ und Anfangswerten

$$r_1^{AW} = r_1(x, 0), \quad r_2^{AW} = r_2(x, 0), \quad b_1^{AW} = b_1(x, 0), \quad b_2^{AW} = b_2(x, 0).$$

Wir bezeichnen im Folgenden die rechte Seite der Differentialgleichung zur einfacheren Handhabung mit $DGL(r_1(x, t))$, $DGL(r_2(x, t))$, $DGL(b_1(x, t))$ und $DGL(b_2(x, t))$.

Das obige Anfangswertproblem ist im Raum-Zeit-Zylinder zu lösen und es wird zusätzlich zur Ortsdiskretisierung auch noch eine Zeitdiskretisierung benötigt (vgl. [1, S. 8]). Wir verwenden dazu die *vertikale Linienmethode*, d.h. wir diskretisieren zuerst im Ort und dann in der Zeit.

Definitor der Gitter

Für die Ortsdiskretisierung definieren wir ein reguläres Gitter

$$G_h := \{x \in [0, L] \mid x = x_j, 0 \leq j \leq n\}$$

auf dem Ortsgebiet $(0, L)$ mit Feinheit $h = \frac{1}{n}$ und Gitterpunkten $x_j = j \cdot h$.

Für die Zeitdiskretisierung wählen wir ein reguläres Gitter

$$G_\tau := \{t \in [0, T] \mid t = t_k, 0 \leq k \leq m\}$$

auf dem Ortsgebiet $(0, T)$ mit Feinheit $\tau = \frac{1}{m}$ und Gitterpunkten $t_k = k \cdot \tau$. Wir schreiben im Folgenden

$$r_1(x_j, t_k) = r_1^{j,k}, \quad r_2(x_j, t_k) = r_2^{j,k}, \quad b_1(x_j, t_k) = b_1^{j,k}, \quad b_2(x_j, t_k) = b_2^{j,k}.$$

Wir führen nun die Diskretisierung am Beispiel der Gleichung

$$\partial_t r_1(x, t) = DGL(r_1(x, t))$$

durch. Die restlichen Gleichungen werden analog diskretisiert.

Ortsdiskretisierung

Zur Ortsdiskretisierung von $DGL(r_1(x, t))$ an einem Zeitpunkt t_k nutzen wir den zentralen Differenzenquotienten $D^c u^j = \frac{u^{j+1} - u^{j-1}}{2h}$ als Approximation der ersten Ableitung und $D^2 u^j = \frac{u^{j+1} - 2u^j + u^{j-1}}{h^2}$ als Approximation der zweiten Ableitung (s. Kapitel 2.2).

Für die inneren Gitterpunkte x_j mit Index $1 \leq j \leq n-1$ ist dann

$$\begin{aligned}
DGL(r_1^{j,k}) &= D_r \frac{\partial}{\partial x} ((1 - r_1^{j,k} - b_1^{j,k}) \partial_x r_1^{j,k} + r_1^{j,k} (\partial_x r_1^{j,k} + \partial_x b_1^{j,k})) \\
&\quad + \mu_r r_1^{j,k} (1 - r_1^{j,k} - b_1^{j,k}) + \frac{1}{2h^2} (\Pi_{r_2}^{\downarrow j,k} r_2^{j,k} - \Pi_{r_1}^{\uparrow j,k} r_1^{j,k}) \\
&= D_r ((1 - b_1^{j,k}) \partial_{xx} r_1^{j,k} + r_1^{j,k} \partial_{xx} b_1^{j,k} + \mu_r ((1 - 2r_1^{j,k} - b_1^{j,k}) \partial_x r_1^{j,k} \\
&\quad - r_1^{j,k} \partial_x b_1^{j,k}) + \frac{1}{2h^2} (\Pi_{r_2}^{\downarrow j,k} r_2^{j,k} - \Pi_{r_1}^{\uparrow j,k} r_1^{j,k}) \\
&= D_r \left(\frac{1}{h^2} (1 - b_1^{j,k}) (r_1^{j+1,k} - 2r_1^{j,k} + r_1^{j-1,k}) + \frac{1}{h^2} r_1^{j,k} (b_1^{j+1,k} - 2b_1^{j,k} + b_1^{j-1,k}) \right. \\
&\quad \left. + \mu_r \left(\frac{1}{2h} (1 - 2r_1^{j,k} - b_1^{j,k}) (r_1^{j+1,k} - r_1^{j-1,k}) - \frac{1}{2h} r_1^{j,k} (b_1^{j+1,k} - b_1^{j-1,k}) \right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2h^2} (\Pi_{r_2}^{\downarrow j,k} r_2^{j,k} - \Pi_{r_1}^{\uparrow j,k} r_1^{j,k}) \right). \tag{5.2}
\end{aligned}$$

Die Diskretisierung an den Randpunkten $x_0 = 0$ und $x_n = L$ hängt von der Wahl der Randbedingungen ab. *Periodische Randbedingungen* werden verwendet, wenn die Bewegung auf einer Kreisbahn modelliert werden soll. Dabei ist dann $x_0 = x_n$. Die diskretisierte Gleichung an $(x_0, t_k) = (x_n, t_k)$ lautet dann

$$\begin{aligned}
DGL(r_1^{0,k}) &= D_r \left(\frac{1}{h^2} (1 - b_1^{0,k}) (r_1^{1,k} - 2r_1^{0,k} + r_1^{n-1,k}) + \frac{1}{h^2} r_1^{0,k} (b_1^{1,k} - 2b_1^{0,k} + b_1^{n-1,k}) \right. \\
&\quad \left. + \mu_r \left(\frac{1}{2h} (1 - 2r_1^{0,k} - b_1^{0,k}) (r_1^{1,k} - r_1^{n-1,k}) - \frac{1}{2h} r_1^{0,k} (b_1^{1,k} - b_1^{n-1,k}) \right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2h^2} (\Pi_{r_2}^{\downarrow 0,k} r_2^{0,k} - \Pi_{r_1}^{\uparrow 0,k} r_1^{0,k}) \right).
\end{aligned}$$

Zeitdiskretisierung

Die Zeitdiskretisierung wird mit dem expliziten Euler-Verfahren realisiert (s. Abschnitt 4.2). Als Approximation der Werte $r_1(x_j, t_{k+1})$ erhalten wir damit iterativ

$$r_1^{j,k+1} = r_1^{j,k} + \tau \cdot DGL(r_1^{j,k}). \tag{5.3}$$

5.2 Implementierung

Wir werden nun das Modell für Fußgänger mit entgegengesetzter Laufrichtung auf zwei Bahnen aus Abschnitt 3.2 in Mathwork Matlab (R2012a) implementieren. Dabei wählen wir Wechselraten mit Volumenausschluss und periodische Randbedingungen. Das Programm wird über `Main_periodisch.m` aufgerufen. Als Erstes wird die Länge des Ortsgebietes und die Simulationszeit festgelegt.

21 L = 1 ;

22 T = 1 ;

Dann wird die Feinheit der Gitter bestimmt.

```
29 h=1/10;
30 tau=1/2000;
```

Anschließend werden die Gitter G_h und G_τ erzeugt.

```
33 x=0:h:L;
34 t=0:tau:T;
```

Die Anzahl der Iterationen für das Euler-Verfahren wird dann berechnet.

```
38 k_max=T/tau;
```

Als nächstes werden die Werte für den Diffusionskoeffizienten D , den Mobilitätskoeffizienten μ , die Wechselraten Π_r^\downarrow , Π_r^\uparrow , Π_b^\downarrow , Π_b^\uparrow sowie die Gitterweite h aus der diskreten Modellentwicklung manuell festgelegt.

```
45 D = 1;
46
47 mu = 1;
48
49 h_m = 1/10;
50
51 pi.r_up = 5/10;
52 pi.r_down = 1/10;
53 pi.b_up = 1/10;
54 pi.b_down = 5/10;
```

Nachdem entsprechende anonyme Funktionen f und g definiert wurden, werden mit ihnen die Anfangsdichten vorgegeben. Dabei wird sichergestellt, dass die Dichten positiv sind.

```
67 r1_AW=ones(size(x)).*(f(x).*(f(x)>0));
68 r2_AW=ones(size(x)).*(f(x).*(f(x)>0));
69 b1_AW=ones(size(x)).*(g(x).*(g(x)>0));
70 b2_AW=ones(size(x)).*(g(x).*(g(x)>0));
```

Abschließend werden die Dichten $r1$, $r2$, $b1$ und $b2$ und die Vektoren delta_r1 , delta_r2 , delta_b1 und delta_b2 initialisiert. Diese dienen später dazu, die Konvergenzrate zu betrachten.

```
76 r1=r1_AW;
77 r2=r2_AW;
78 b1=b1_AW;
79 b2=b2_AW;
80
81 delta_r1=zeros(size(1:k_max));
82 delta_r2=zeros(size(1:k_max));
83 delta_b1=zeros(size(1:k_max));
84 delta_b2=zeros(size(1:k_max));
```

Bevor das Euler-Verfahren gestartet wird, werden die Anfangsdichten graphisch dargestellt.

```
90 figure(1);
91 plotten_dichte(r1,r2,b1,b2,x,0,T);
```

Die Variablen und der Plot der Anfangsdichten werden gespeichert. Dazu wird mithilfe des `fullfile`-Befehls der Unterordner `Daten\` als Speicherort ausgewählt.

```
96 saveas(gcf, fullfile(pwd, '\Daten\Anfangsdichten.eps'), 'psc2');
97 save(fullfile(pwd, ['\Daten\Daten_', num2str(0)]));
```

Nach dem Einlesen der Modellparameter und der Anfangsdichten wird das explizite Eulerverfahren gestartet.

5.2.1 Ortsdiskretisierung

Mit Übergabe aller nötigen Variablen an die Funktion

```
function [DGL_r1 DGL_r2 DGL_b1 DGL_b2] = euler_periodisch_VA(...
    r1, r2, b1, b2, h, D,...
    mu, h_m, pi)
```

wird die Ortsdiskretisierung der Dichtefunktionen aus 5.1 zu einem festen Zeitpunkt durchgeführt. Es werden dabei periodische Randbedingungen und Wechselraten mit Volumenausschluss verwendet (s. Abschnitt 3.2). Die Funktion gibt die Vektoren `DGL_r1`, `DGL_r2`, `DGL_b1`, `DGL_b2` zurück. Diese werden über die übergebenen Vektoren `r1`, `r2`, `b1` und `b2` initialisiert.

```
12 DGL_r1=r1;
13 DGL_r2=r2;
14 DGL_b1=b1;
15 DGL_b2=b2;
```

Die Werte von `DGL_r1`, `DGL_r2`, `DGL_b1` und `DGL_b2` werden anhand der Diskretisierungsvorschrift (5.2) berechnet. Wir erläutern dies hier an `DGL_r1`. Als Erstes werden die Werte an den inneren Gitterpunkten x_1, \dots, x_{n-1} berechnet. Diese entsprechen den Vektorindizes $j=2, \dots, n-1$. Anstatt den Index $n-1$ direkt anzusprechen, können wir ihn als vorletzten Index des Vektors ansprechen. Desweiteren berücksichtigen wir den Volumenausschluss beim Wechsel zwischen den Bahnen (s. (3.5)) und diskretisieren die Wechselraten durch Werte an den Gitterpunkten.

```
21 DGL_r1(2:end-1)= ...
22     D*(1/h^2*(1-b1(2:end-1)).*...
23         (r1(3:end)-2*r1(2:end-1)+r1(1:end-2)))...
24     +1/h^2*r1(2:end-1).*...
25         (b1(3:end)-2*b1(2:end-1)+b1(1:end-2)))...
26     +mu*(1/(2*h))*(1-2*r1(2:end-1)...
27         -b1(2:end-1)).*(r1(3:end)-r1(1:end-2)))...
28     -1/(2*h)*r1(2:end-1).*(b1(3:end)-b1(1:end-2)))...;
```

```

29     +1/(2*h_m^2)*(pi.r_down*r2(2:end-1).*...
30         (1-r1(2:end-1)-b1(2:end-1))...
31     -pi.r_up*r1(2:end-1).*...
32         (1-r2(2:end-1)-b2(2:end-1)));

```

Nun wird der Wert am periodischen Rand berechnet. Dies geschieht am Gitterpunkt x_0 , dem der Vektorindex $j = 1$ zugeordnet ist. Der rechte Nachbar von x_0 ist x_1 , der linke Nachbar von x_0 ist x_{n-1} .

```

62 DGL_r1(1)= ...
63     D*(1/h^2*(1-b1(1)).*(r1(2)-2*r1(1)+r1(end-1))...
64     +1/h^2*r1(1).*(b1(2)-2*b1(1)+b1(end-1))...
65     +mu*(1/(2*h)*(1-2*r1(1)-b1(1)).*(r1(2)-r1(end-1))...
66     -1/(2*h)*r1(1).*(b1(2)-b1(end-1)))...
67     +1/(2*h_m^2)*(pi.r_down*r2(1).*(1-r1(1)-b1(1))...
68     -pi.r_up*r1(1).*(1-r2(1)-b2(1)));

```

Der Rand wurde so gewählt, dass $x_0 = x_n$. Daher wird

```

95 DGL_r1(end)=DGL_r1(1);

```

gesetzt. Damit ist die Ortsdiskretisierung für einen Zeitschritt abgeschlossen.

5.2.2 Zeitdiskretisierung: Das explizite Euler-Verfahren

Das explizite Euler-Verfahren wird in einer `for`-Schleife mit Startwert `k=1` und Endwert `k_max` durchlaufen. Um die Differenz $r_1(t_{k+1}) - r_1(t_k)$, $r_2(t_{k+1}) - r_2(t_k)$, $b_1(t_{k+1}) - b_1(t_k)$ und $b_2(t_{k+1}) - b_2(t_k)$ zu berechnen, werden zunächst die Dichten im aktuellen Zeitschritt gesichert.

```

105     r1_alt=r1;
106     r2_alt=r2;
107     b1_alt=b1;
108     b2_alt=b2;

```

Nachdem für die periodischen Randbedingungen $x_0 = x_n$ gesetzt wird und die Ortsdiskretisierung durchgeführt wird,

```

111     r1(end)= r1(1);
112     r2(end)= r2(1);
113     b1(end)= b1(1);
114     b2(end)= b2(1);
115     [DGL_r1 DGL_r2 DGL_b1 DGL_b2] = euler_periodisch_VA(r1, r2,...
116         b1, b2, h, D, mu, h_m, pi);

```

wird eine Fehlerabfrage gestartet, die überprüft, ob die Vektoren `DGL_r1`, `DGL_r2`, `DGL_b1` oder `DGL_b2` die Werte `NaN` (*Not a Number*) oder `Inf` (∞) enthalten. Ist dies der Fall, wird das Euler-Verfahren abgebrochen.

```

119     [abbrechen]=abbruch(DGL_r1, DGL_r2, DGL_b1, DGL_b2, k);

```

```

120     if abbrechen==1
121         break
122     end

```

Nach der Berechnung von $r_1(t_{k+1})$, $r_2(t_{k+1})$, $b_1(t_{k+1})$ und $b_2(t_{k+1})$ (s. 5.3)

```

126     r1=r1+tau*DGL_r1;
127     r2=r2+tau*DGL_r2;
128     b1=b1+tau*DGL_b1;
129     b2=b2+tau*DGL_b2;

```

wird die betragsmäßig größte Differenz von $r_1(t_{k+1})-r_1(t_k)$, $r_2(t_{k+1})-r_2(t_k)$, $b_1(t_{k+1})-b_1(t_k)$ und $b_2(t_{k+1})-b_2(t_k)$ berechnet und in den Vektor `delta_r1`, `delta_r2`, `delta_b1` bzw. `delta_b2` eingetragen.

```

133     delta_r1(k)=max(abs(r1-r1_alt));
134     delta_r2(k)=max(abs(r2-r2_alt));
135     delta_b1(k)=max(abs(b1-b1_alt));
136     delta_b2(k)=max(abs(b2-b2_alt));

```

Abschließend werden die Dichten über den Aufruf der Funktion

```

140     plotten_dichte(r1, r2, b1, b2, x, k*tau, T);

```

graphisch dargestellt und der aktuelle Zeitschritt im Command Window zur Orientierung angezeigt. Die Daten aus dem vorherigen Zeitschritt werden gelöscht und durch die aktuellen Daten ersetzt.

```

147     if k>0
148         delete(fullfile(pwd,['\Daten\Daten_', num2str(k-1),...
149             '.mat']));
150     end
151     save(fullfile(pwd,['\Daten\Daten_', num2str(k)]));

```

Nach dem Durchlaufen der Schleife werden die Differenzen $r_1(t_{k+1})-r_1(t_k)$, $r_2(t_{k+1})-r_2(t_k)$, $b_1(t_{k+1})-b_1(t_k)$ und $b_2(t_{k+1})-b_2(t_k)$ gegen die Zeitschritte aufgetragen. Diese Abbildung stellt die Konvergenzraten der Dichten ab einem gewissen Zeitschritt `k_min` dar. Sie zeigt damit das Konvergenzverhalten von Langzeitlösungen.

```

104 k_min=100;
105 plotten_konvergenz(delta_r1, delta_r2, delta_b1, delta_b2,...
106     k_min,k_max);

```

Diese Graphen werden als `Konvergenzrate_r_k_min.eps`, `Konvergenzrate_b_k_min.eps` und `Konvergenzrate_rb_k_min.eps` im Unterordner `Daten\` gespeichert.

5.2.3 Fehlerabfrage

Mit der Funktion `[abbrechen]=abbruch(DGL_r1, DGL_r2, DGL_b1, DGL_b2, k)` wird in jedem Zeitschritt überprüft, ob die übergebenen Vektoren die Werte `NaN` oder `Inf` enthalten. Diese Werte treten auf, wenn z.B. durch 0 dividiert wird oder die reelle Zahl nicht im gültigen Wertebereich $(-10^{308}, 10^{308})$ liegt. Enthält ein Vektor `NaN` oder `Inf`, so wird der aktuelle Zeitschritt `k` im Command Window ausgegeben und `[abbrechen]=1` zurückgegeben. Dies führt zum Abbruch des Euler-Verfahrens.

```
11 if find(isnan(DGL_r1))>0
12     disp(['"nan" in r_1: Abbruchh bei k=' num2str(k)]);
13     abbrechen=1;
14 end
15 if find(isinf(DGL_r1))>0
16     disp(['"inf" in r_1: Abbruchh bei k=' num2str(k)]);
17     abbrechen=1;
18 end
19 if find(isnan(DGL_r2))>0
20     disp(['"nan" in r_2: Abbruchh bei k=' num2str(k)]);
21     abbrechen=1;
22 end
23 if find(isinf(DGL_r2))>0
24     disp(['"inf" in r_2: Abbruchh bei k=' num2str(k)]);
25     abbrechen=1;
26 end
27 if find(isnan(DGL_b1))>0
28     disp(['"nan" in b_1: Abbruchh bei k=' num2str(k)]);
29     abbrechen=1;
30 end
31 if find(isinf(DGL_b1))>0
32     disp(['"inf" in b_1: Abbruchh bei k=' num2str(k)]);
33     abbrechen=1;
34 end
35 if find(isnan(DGL_b2))>0
36     disp(['"nan" in b_2: Abbruchh bei k=' num2str(k)]);
37     abbrechen=1;
38 end
39 if find(isinf(DGL_b2))>0
40     disp(['"inf" in b_2: Abbruchh bei k=' num2str(k)]);
41     abbrechen=1;
42 end
```

5.2.4 Graphische Ausgabe

Nach Berechnung der Dichten für den Zeitschritt k werden diese graphisch dargestellt. Dies geschieht über den Aufruf der Funktion

```
function plotten_dichte(r1, r2, b1, b2, xAchse, t, T)
```

Die Dichten r_1 und b_1 werden in den unteren Graphen und r_2 und b_2 in den oberen Graphen gezeichnet. Der Titel der Graphik zeigt den aktuellen Zeitwert.

```
8 subplot(2,1,1);
9 plot(xAchse, r2, 'r', xAchse, b2, 'b');
10 axis([0 xAchse(end) -0.2 1.2]);
11 title('Bahn 2');
12
13 subplot(2,1,2);
14 plot(xAchse, r1, 'r', xAchse, b1, 'b');
15 axis([0 xAchse(end) -0.2 1.2]);
16 title('Bahn 1');
17
18 suptitle(['Dichte zum Zeitpunkt t=' num2str(t) ' von '...
19         num2str(T)]);
```

Nachdem das Euler-Verfahren für alle Zeitschritte durchlaufen wurde, wird die Konvergenzrate mit der Funktion

```
function plotten_konvergenz(delta_r1, delta_r2, delta_b1, ...
                           delta_b2, k_min, k_max)
```

dargestellt. Es werden ab einem Zeitschritt k_{\min} bis zu einem Zeitschritt k_{\max} die Differenzen $r_1(t_{k+1}) - r_1(t_k)$, $r_2(t_{k+1}) - r_2(t_k)$, $b_1(t_{k+1}) - b_1(t_k)$ und $b_2(t_{k+1}) - b_2(t_k)$ geplottet.

```
10 t=k_min:k_max;
11
12 figure(3);
13 plot(t,delta_r1(t),'r',t,delta_r2(t),'-r',t,delta_b1(t),'b',t,...
14     delta_b2(t),'-b');
15 title(['Konvergenzrate für k> ' num2str(k_min)])
16 xlabel('k');
17 ylabel('\Delta');
18 legend('r_1','r_2','b_1','b_2');
19
20 figure(4);
21 plot(t,delta_r1(t),'r',t,delta_r2(t),'-r');
22 title(['Konvergenzrate für k> ' num2str(k_min)])
23 xlabel('k');
24 ylabel('\Delta');
25 legend('r_1','r_2');
26
```

```
27 figure(5);
28 plot(t,delta_b1(t),'b',t,delta_b2(t),'-b');
29 title(['Konvergenzrate für k> ' num2str(k_min)])
30 xlabel('k');
31 ylabel('\Delta');
32 legend('b_1','b_2');
```

6 Simulation: Fußgänger auf zwei Bahnen

Mit dem implementierten Programm aus 5.2 werden nun mehrere Situationen mit verschiedenen Annahmen simuliert. Dazu werden die Anfangsdichten und Wechselraten variiert. Die graphische Analyse der Konvergenzrate ermöglicht es, die Ergebnisse in Hinblick auf stationäre Lösungen zu untersuchen. Die Ergebnisse der Simulation werden mit den analytisch berechneten stationären Lösungen aus 4.1 verglichen.

Beschreibung	Parameter	Wert
Länge des Bahn	L	1
Simulationszeit	T	1
Gitterweite des Gitters G_h	h	0,1
Gitterweite des Gitters G_τ	τ	0,0005
Diffusionkoeffizient	D	1
Mobilitätskoeffizient	μ	1
Gitterweite des diskreten Modells	h_m	0,1

Tabelle 1: Wahl der Modellparameter.

6.1 Ungekoppelte Bahnen

Parameter	Wert
Π_r^\uparrow	0
Π_r^\downarrow	0
Π_b^\uparrow	0
Π_b^\downarrow	0
$r_1^{AW}(x)$	$\frac{1}{2}(1 - (4x - 1)^2)$
$r_2^{AW}(x)$	$1 - (4x - 1)^2$
$b_1^{AW}(x)$	$\frac{1}{2}(1 - (4x - 3)^2)$
$b_2^{AW}(x)$	$1 - (4x - 3)^2$

Tabelle 2: Wahl der Modellparameter: ungekoppelte Bahnen.

Als Erstes betrachten wir rote und blaue Teilchen, die nicht zwischen den Bahnen springen. Die Wechselraten werden dazu auf null gesetzt. Die Bahnen sind dann ungekoppelt. Die Modellparameter werden in Tabelle 2 aufgeführt. Am Anfang befinden sich die roten Teilchen gegenüber von den blauen Teilchen im Kreiskorridor. Auf Bahn 1 wird die Dichte doppelt so

groß wie auf Bahn 2 gewählt. Es ist zu vermuten, dass sich konstante stationäre Lösungen einstellen, die durch die Masse der Teilchen bestimmt werden. Wir erwarten nach 4.1 konstante stationäre Lösungen

$$\begin{aligned} r_1^\infty = M_{r_1} &= \int_0^1 r_1^{AW} = \frac{1}{6}, & r_2^\infty = M_{r_2} &= \int_0^1 r_2^{AW} = \frac{1}{3}, \\ b_1^\infty = M_{b_1} &= \int_0^1 b_1^{AW} = \frac{1}{3}, & b_2^\infty = M_{b_2} &= \int_0^1 b_2^{AW} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Abbildung 4 zeigt die Konvergenzrate der Dichten r_1 , r_2 , b_1 und b_2 für $k > 300$. Die Konvergenzrate für die roten und blauen Teilchen auf Bahn 1 bzw. Bahn 2 ist identisch. Die Differenz der Dichten zum vorherigen Zeitschritt fällt deutlich innerhalb der ersten 400 Zeitschritte und nähert sich der x-Achse an. Wir erhalten also stationäre Lösungen mit einer Ungenauigkeit der Größenordnung 10^{-4} . Die Dichten auf Bahn 1 werden nach ca. 600 Zeitschritten stationär. Die Dichten auf Bahn 2, welche am Anfang der Simulation doppelt so groß waren, werden erst nach ca. 1200 Zeitschritten stationär.

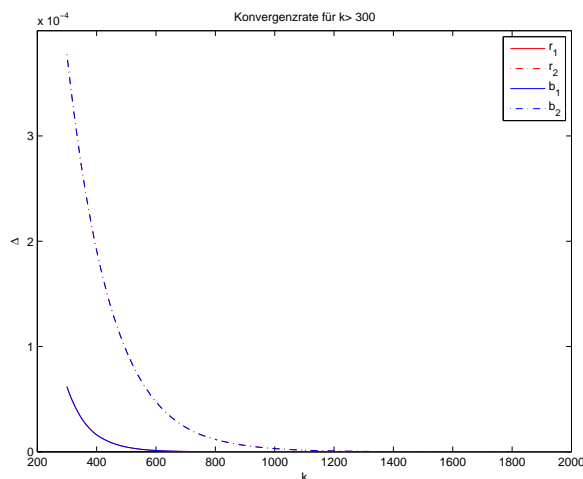


Abbildung 4: Konvergenzrate: ungekoppelte Bahnen, $k > 300$.

Nach Ablauf der Simulation überprüfen wir, ob die Ergebnisse mit den erwarteten konstanten stationären Dichten aus Abschnitt 4.1 übereinstimmen. Abbildung 5 zeigt, dass die Dichten, die sich als Langzeitlösungen einstellen, konstant sind. Die Mittelwerte der Einträge von r_1 , r_2 , b_1 , b_2 lauten

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=0, \dots, n-1} r_1(i) &= 0,1760, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=0, \dots, n-1} r_2(i) &= 0,3520, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=0, \dots, n-1} b_1(i) &= 0,1760, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0, \dots, n-1} b_2(i) = 0,03520.$$

Die numerischen Werte stimmen mit Ungenauigkeit 10^{-2} mit den erwarteten Werten überein.

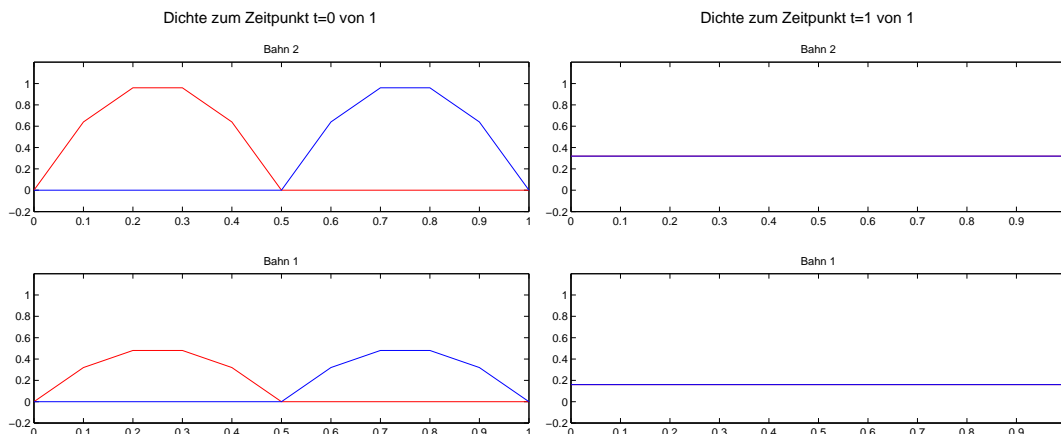


Abbildung 5: Dichten zum Zeitpunkt $t = 0$ und $t = 1$: unkoppelte Bahnen.

6.2 Symmetrische Wechselraten

Schwache symmetrische Wechselraten

Als Nächstes betrachten wir schwache symmetrische Wechselraten. Die roten und blauen Teilchen werden zu Anfang mit unterschiedlichen Dichten gegenüber gesetzt.

Parameter	Wert
Π_r^\uparrow	$\frac{1}{10}$
Π_r^\downarrow	$\frac{1}{10}$
Π_b^\uparrow	$\frac{1}{10}$
Π_b^\downarrow	$\frac{1}{10}$
$r_1^{AW}(x)$	$\frac{1}{2}(1 - (4x - 1)^2)$
$r_2^{AW}(x)$	$\frac{1}{3}(1 - (4x - 1)^2)$
$b_1^{AW}(x)$	$\frac{3}{4}(1 - (4x - 3)^2)$
$b_2^{AW}(x)$	$\frac{1}{4}(1 - (4x - 3)^2)$

Tabelle 3: Wahl der Modellparameter: schwache symmetrische Wechselraten.

Zum Ende der Simulation stellen sich stationäre Lösungen mit Ungenauigkeit 10^{-5} ein (s. Abbildung 6). Die Differenz der Dichten fällt in den ersten 600 Zeitschritten stark. Die Dichten der roten Teilchen entfernen sich bei $k \approx 800$ zeitweilig von ihren stationären Lösungen.

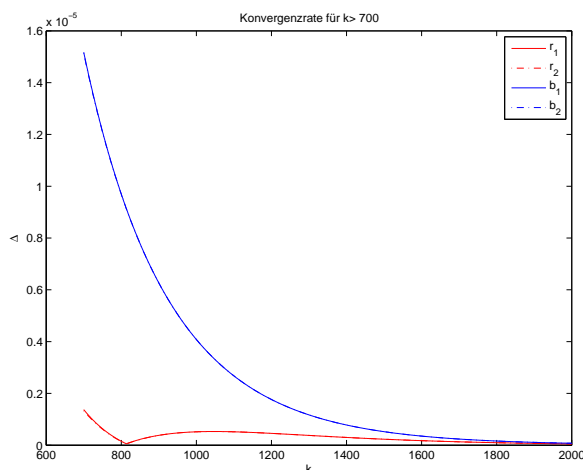


Abbildung 6: Konvergenzrate: schwache symmetrischen Wechselraten, $k > 700$.

Die Dichten der blauen Teilchen konvergieren insgesamt langsamer gegen ihre stationäre Lösungen. Für die Gesamtmasse der Teilchen gilt.

$$M_r = \int_0^1 r_1^{AW} + r_2^{AW} = \frac{5}{18}$$

$$M_b = \int_0^1 b_1^{AW} + b_2^{AW} = \frac{1}{3}$$

Nach Bemerkung 4.2 erwarten wir konstante stationäre Lösungen

$$r_1^\infty = r_2^\infty = \frac{1}{2} M_r \approx 0.139,$$

$$b_1^\infty = b_2^\infty = \frac{1}{2} M_b = \frac{1}{6}.$$

Die Mittelwerte der Einträge der simulierten Langzeitlösungen sind

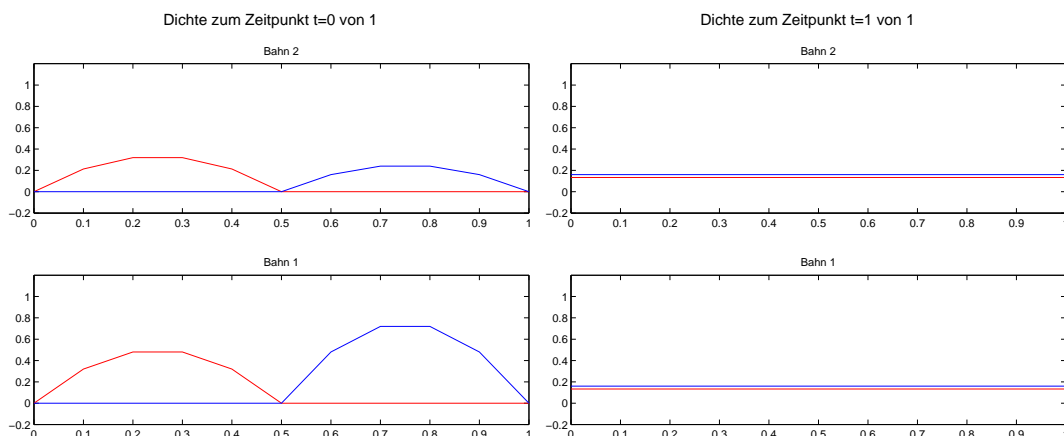
$$\frac{1}{n} \sum_{i=0, \dots, n-1} r1(i) = 0,1466$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0, \dots, n-1} r2(i) = 0,1467,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0, \dots, n-1} b1(i) = 0,1760,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0, \dots, n-1} b2(i) = 0,1760.$$

und stimmen mit Ungenauigkeit der Ordnung 10^{-2} mit den erwarteten Lösungen überein.

Abbildung 7: Dichten zum Zeitpunkt $t = 0$ und $t = 1$: schwache symmetrische Wechselraten.

Starke symmetrische Wechselraten

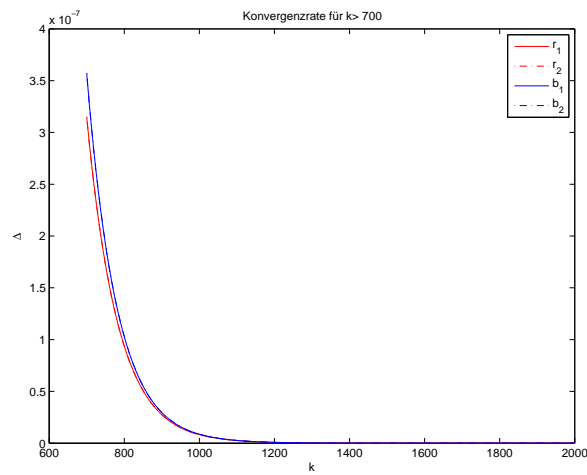
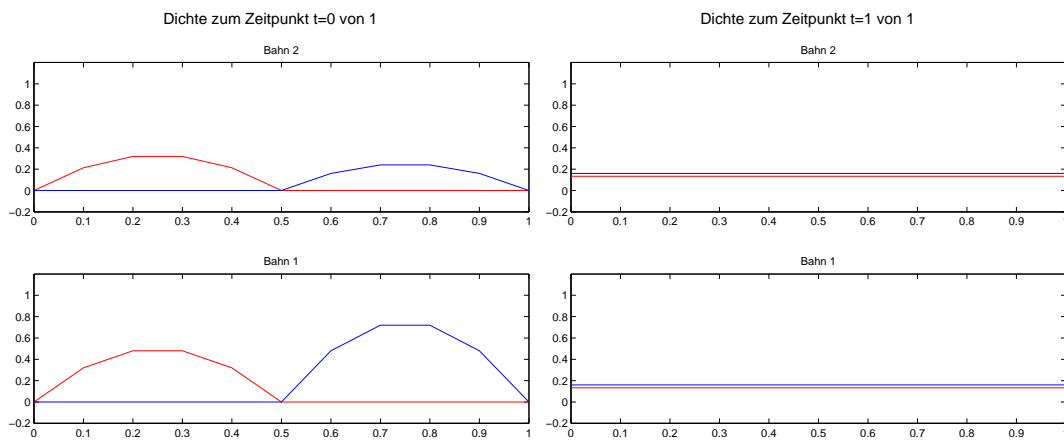
Für die gleichen Anfangsdichten wie in Tabelle 3 wählen wir nun größere Wechselraten.

Parameter	Wert
Π_r^\uparrow	$\frac{3}{10}$
Π_r^\downarrow	$\frac{3}{10}$
Π_b^\uparrow	$\frac{3}{10}$
Π_b^\downarrow	$\frac{3}{10}$
$r_1^{AW}(x)$	$\frac{1}{2}(1 - (4x - 1)^2)$
$r_2^{AW}(x)$	$\frac{1}{2}(1 - (4x - 1)^2)$
$b_1^{AW}(x)$	$\frac{3}{4}(1 - (4x - 3)^2)$
$b_2^{AW}(x)$	$\frac{1}{4}(1 - (4x - 3)^2)$

Tabelle 4: Wahl der Modellparameter: starke symmetrische Wechselraten.

Es zeigt sich, dass der Unterschied zum vorherigen Iterationsschritt von der Größenordnung 10^{-7} ist. Die Dichten nähern sich schneller an die stationären Dichten an als bei der Simulation schwacher Wechselraten. Es werden die gleichen konstanten stationären Dichten wie in der vorherigen Simulation erwartet. Die Ergebnisse der Simulation stimmen damit mit Ungenauigkeit 10^{-2} überein:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=0, \dots, n-1} r1(i) &= 0,1467 \\ \frac{1}{n} \sum_{i=0, \dots, n-1} r2(i) &= 0,1467, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=0, \dots, n-1} b1(i) &= 0,1760, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=0, \dots, n-1} b2(i) &= 0,1760. \end{aligned}$$

Abbildung 8: Konvergenzrate: starke symmetrische Wechselraten, $k > 700$.Abbildung 9: Dichten zum Zeitpunkt $t = 0$ und $t = 1$: starke symmetrische Wechselraten.

6.3 Asymmetrische Wechselraten

Wir betrachten im Folgenden asymmetrische Wechselraten. Dabei wählen wir jeweils $\Pi_r^\downarrow > \Pi_r^\uparrow$ und $\Pi_b^\uparrow > \Pi_b^\downarrow$. Dies bedeutet, dass die Teilchen bevorzugt nach rechts ausweichen. Für Fußgänger ist diese Wahl kulturabhängig. Soll etwa die Bewegung indischer Fußgänger simuliert werden, werden die Raten getauscht um realistische Ergebnisse zu erhalten (s. [3]).

Einseitige Wechselraten

Wir wählen identische Dichten und den Spezialfall der asymmetrischen Wechselraten mit $\Pi_r^\uparrow = 0$ und $\Pi_b^\downarrow = 0$. Die Teilchen werden somit immer nur auf die von ihnen aus gesehen rechte Bahn springen. Wir erwarten am Ende der Simulation, dass sich die gesamte Masse der roten Teilchen auf Bahn 1 befindet und die gesamte Masse der blauen Teilchen auf Bahn 2.

Parameter	Wert
Π_r^\uparrow	0
Π_r^\downarrow	$\frac{1}{10}$
Π_b^\uparrow	$\frac{1}{10}$
Π_b^\downarrow	0
$r_1^{AW}(x)$	$1 - (4x - 1)^2$
$r_2^{AW}(x)$	$1 - (4x - 1)^2$
$b_1^{AW}(x)$	$1 - (4x - 3)^2$
$b_2^{AW}(x)$	$1 - (4x - 3)^2$

Tabelle 5: Wahl der Modellparameter: einseitige Bahnenwechsel.

Die Massen lauten

$$\begin{aligned}
 M_{r_1} &= \int_0^1 r_1^{AW} = \frac{1}{6}, & M_{r_2} &= \int_0^1 r_2^{AW} = \frac{1}{6}, \\
 M_{b_1} &= \int_0^1 b_1^{AW} = \frac{1}{6}, & M_{b_2} &= \int_0^1 b_2^{AW} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

und wir erwarten konstante stationäre Lösungen

$$\begin{aligned}
 r_1^\infty &= \frac{1}{3}, & r_2^\infty &= 0, \\
 b_1^\infty &= 0, & b_2^\infty &= \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Die Dichten nach der Simulation sind in Abbildung 10 dargestellt. Abbildung 11 zeigt die Differenz der Dichten zum jeweils vorherigen Iterationsschritt mit $k > 200$. Die Differenzen fallen während den ersten 400 Iterationen stark ab und nähern sich der x-Achse an. Wir

erhalten also beinahe stationäre Lösungen gegen Ende der Simulation mit Ungenauigkeit 10^{-4} . Die Mittelwerte der Dichten lauten

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \sum_{i=0, \dots, n-1} r1(i) &= 0,2898 \\ \frac{1}{n} \sum_{i=0, \dots, n-1} r2(i) &= 0,0035, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=0, \dots, n-1} b1(i) &= 0,0075, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=0, \dots, n-1} b2(i) &= 0,3445.\end{aligned}$$

Dies bestätigt die erwarteten Dichten mit Ungenauigkeit der Ordnung 10^{-2} .

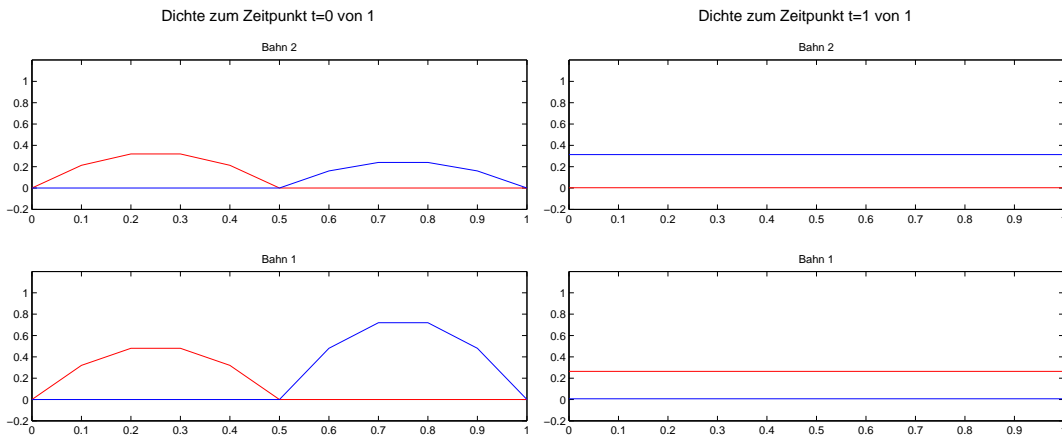


Abbildung 10: Dichten zum Zeitpunkt $t = 0$ und $t = 1$: einseitige Bahnenwechsel.

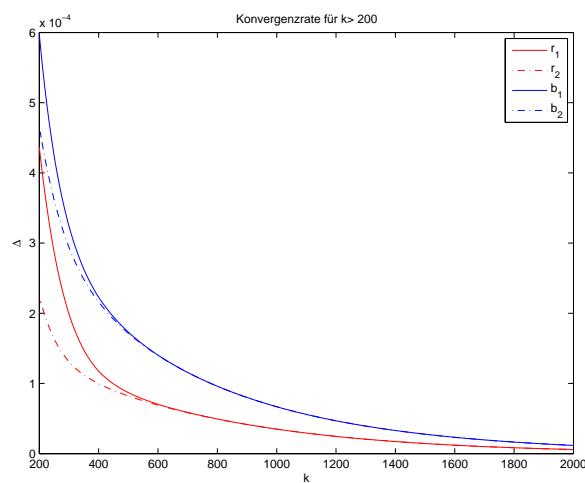


Abbildung 11: Konvergenzrate: einseitige Bahnenwechsel, $k > 200$.

Asymmetrische Wechselraten mit niedrigen Dichten

In diesem Abschnitt betrachten wir identische niedrige Dichten und asymmetrische Wechselraten. Im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt werden die Teilchen mit einer Tendenz nach rechts auszuweichen versehen. Sprünge nach links sind mit niedriger Wahrscheinlichkeit auch möglich.

Parameter	Wert
Π_r^\uparrow	$\frac{1}{10}$
Π_r^\downarrow	$\frac{3}{10}$
Π_b^\uparrow	$\frac{3}{10}$
Π_b^\downarrow	$\frac{1}{10}$
$r_1^{AW}(x)$	$1 - (4x - 1)^2$
$r_2^{AW}(x)$	$1 - (4x - 1)^2$
$b_1^{AW}(x)$	$1 - (4x - 3)^2$
$b_2^{AW}(x)$	$1 - (4x - 3)^2$

Tabelle 6: Wahl der Modellparameter: asymmetrische Wechselraten mit niedrigen Dichten.

Die Massen der roten und blauen Teilchen lauten

$$M_r = \int_0^1 r_1^{AW} + r_2^{AW} = \frac{2}{3},$$

$$M_b = \int_0^1 b_1^{AW} + b_2^{AW} = \frac{2}{3}.$$

und wir erwarten konstante stationäre Lösungen

$$r_1^\infty = \frac{1}{2}, \quad r_2^\infty = \frac{1}{6},$$

$$b_1^\infty = \frac{1}{6}, \quad b_2^\infty = \frac{1}{2}.$$

Diese Vermutung kann anhand von Abbildung 12 und den Mittelwerten der simulierten Dichten mit Ungenauigkeit 10^{-2} bestätigt werden:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0, \dots, n-1} r1(i) = 0,5279$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0, \dots, n-1} r2(i) = 0,1761,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0, \dots, n-1} b1(i) = 0,1761,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0, \dots, n-1} b2(i) = 0,5279.$$

Die Konvergenzrate der Dichten fällt stark in den 600 Iterationsschritten. Die Dichten kon-

vergieren dann gegen die zugehörige stationäre Dichte mit einer Ungenauigkeit der Ordnung 10^{-4} . Dies ist in Abbildung 13 zu erkennen.

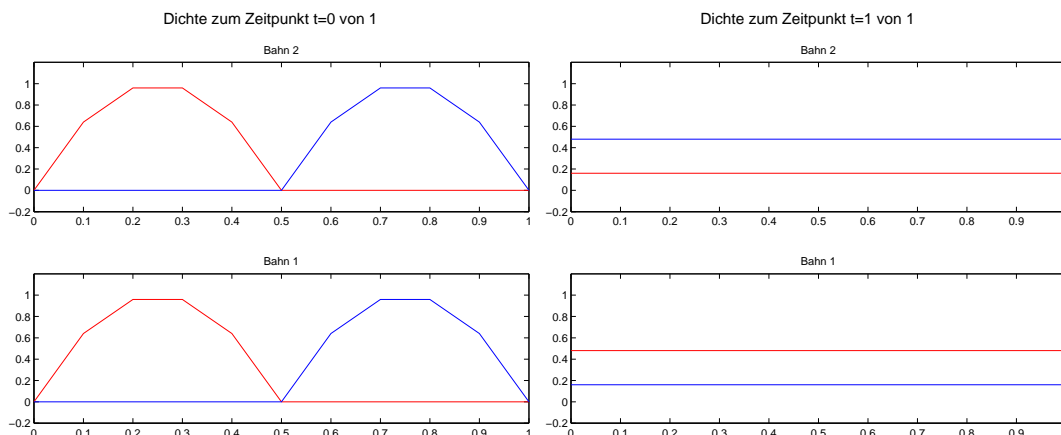


Abbildung 12: Dichten zum Zeitpunkt $t = 0$ und $t = 1$: asymmetrische Wechselraten mit niedrigen Dichten.

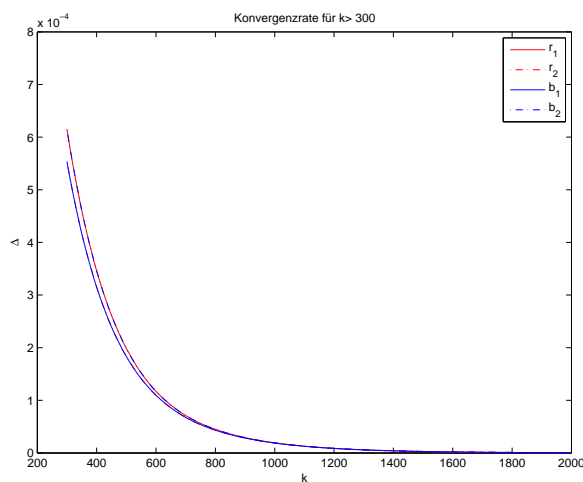


Abbildung 13: Konvergenzrate: einseitige Bahnenwechsel, $k > 200$.

Asymmetrische Wechselraten mit hohen Dichten

Zum Abschluss betrachten wir hohe Dichten mit asymmetrischen Wechselraten. Die Dichten werden so gewählt, dass auf Bahn 1 und Bahn 2 jeweils eine Gesamtdichte $M_{r+b} \approx 0.86$ herrscht. Die Wechselraten stellen die Teilchen wieder mit einer Tendenz nach rechts auszuweichen aus.

Parameter	Wert
Π_r^\uparrow	$\frac{1}{10}$
Π_r^\downarrow	$\frac{3}{10}$
Π_b^\uparrow	$\frac{3}{10}$
Π_b^\downarrow	$\frac{1}{10}$
$r_1^{AW}(x)$	$1 - (2x - 1)^2$
$r_2^{AW}(x)$	$1 - (2x - 1)^2$
$b_1^{AW}(x)$	$(2x - 3)^2 - \frac{1}{5}$
$b_2^{AW}(x)$	$(2x - 3)^2 - \frac{1}{5}$

Tabelle 7: Wahl der Modellparameter: asymmetrische Wechselraten mit niedrigen Dichten.

Die Massen lauten

$$M_{r_1} = \int_0^1 r_1^{AW} = \frac{2}{3}, \quad M_{r_2} = \int_0^1 r_2^{AW} = \frac{2}{3},$$

$$M_{b_1} = \int_0^1 b_1^{AW} \approx 0.2, \quad M_{b_2} = \int_0^1 b_2^{AW} \approx 0.2.$$

Nach der Simulation stellen sich konstante Langzeitlösungen ein (s. Abbildung 14). Das Konvergenzverhalten wird in Abbildung 15 dargestellt. Hier sieht man, dass sich nach Ende der Simulationszeit noch keine stationäre Lösung eingestellt hat, da die Differenz der Dichten nicht gegen null konvergiert ist. Nach entsprechend längerer Simulationszeit stellen sich aber Langzeitlösungen mit Ungenauigkeiten der Größenordnung 10^{-5} ein. Wir erwarten Langzeitlösungen nach Bemerkung 4.2

$$r_1^\infty = 1, \quad r_2^\infty = \frac{1}{3},$$

$$b_1^\infty \approx \frac{1}{10}, \quad b_2^\infty \approx 0.3.$$

Die Mittelwerte der Einträge von r_1 , r_2 , b_1 , b_2 lauten

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0, \dots, n-1} r_1(i) = 0,9174$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0, \dots, n-1} r_2(i) = 0,5346,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0, \dots, n-1} b_1(i) = 0,0705,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0, \dots, n-1} b_2(i) = 0,3695.$$

Diese Ergebnisse weichen von den erwarteten Lösungen deutlich ab. Die Abweichung liegt vermutlich an der hohen Gesamtdichte der Teilchen auf den Bahnen.

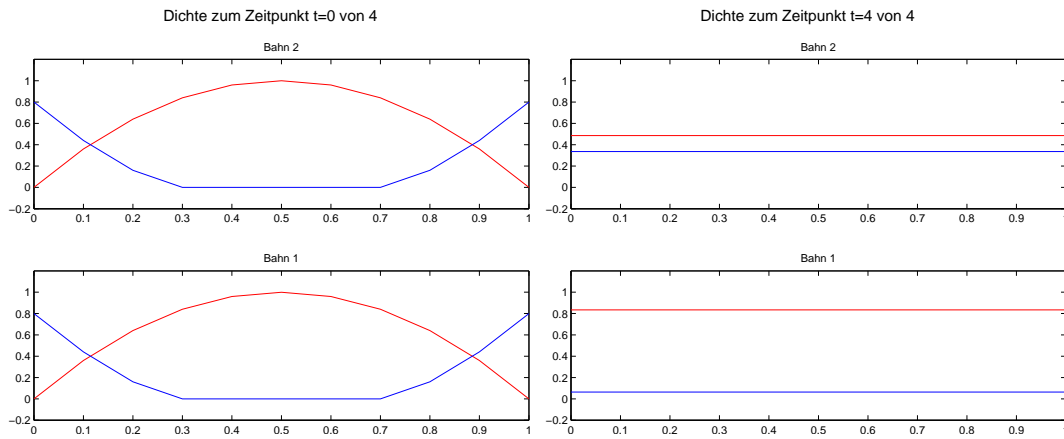


Abbildung 14: Dichten zum Zeitpunkt $t = 0$ und $t = 1$: asymmetrische Wechselraten mit hohen Dichten.

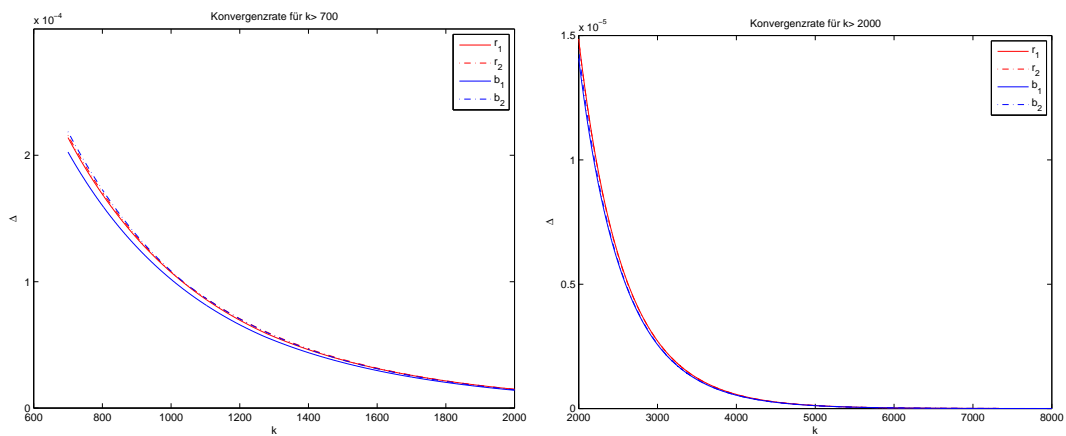


Abbildung 15: Konvergenzrate: asymmetrische Wechselraten mit hohen Dichten, $T = 1$, $k > 700$ (links) und $T = 4$, $k > 2000$ (rechts).

7 Zusammenfassung und Ausblick

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, mithilfe von Methoden der mathematischen Modellierung ein Modell für die Bewegung von Fußgängern herzuleiten und mit numerischen Verfahren auf Gleichgewichtszustände zu untersuchen. Es sollten zwei Gruppen von Fußgängern modelliert werden, die sich auf verschiedenen Bahnen bewegen.

In Kapitel 2 wurde die grundlegende Idee sowie verschiedene Modellansätze der Modellierung von Menschenmengen vorgestellt. Desweiteren wurden grundlegende Begriffe der numerischen Modellierung eingeführt.

In Kapitel 3 wurde ein Modell für zwei Arten von Teilchen auf n Bahnen entwickelt. Als Grundlage wurde zunächst ein eindimensionaler diskreter Teilchenhüpfprozess betrachtet. Aus diesem Prozess wurde ein System von Differentialgleichungen durch den Übergang ins Kontinuierliche entwickelt. Als nächstes wurden Teilchen auf zwei Bahnen modelliert, indem die Differentialgleichungen durch diskrete Wechselraten gekoppelt wurden. Dieses Modell wurde dann für endlich viele Bahnen erweitert.

Nachdem ein Modell für zwei Teilchenarten hergeleitet wurde, wurde dieses in Kapitel 4 zur Modellierung von entgegenkommender Fußgänger auf zwei Kreisbahnen verwendet. Das Modell wurde hinsichtlich möglicher Gleichgewichtszustände untersucht. Es zeigte sich, dass sich konstante stationäre Lösungen einstellen, die von der Anzahl der Fußgänger abhängen. Desweiteren beeinflussen die Ausweichwahrscheinlichkeiten sowie die bevorzugte Ausweichrichtung die Verteilung der Fußgänger auf den Bahnen.

Im Anschluss an die analytische Betrachtung wurde das Modell in Kapitel 5 numerisch auf stationäre Lösungen untersucht. Dazu wurden die Differentialgleichungen mit vorgegeben Anfangswerten und periodischen Randbedingungen diskretisiert und mit der Software `Mathwork Matlab (R2012a)` implementiert.

Zum Abschluss wurden verschiedene Varianten des vorgestellten Modells simuliert. Es wurden Anfangsdichten und Wechselraten variiert. Die Langzeitlösungen wurden auf ihre Konvergenz untersucht und mit den analytisch berechneten stationären Lösungen aus Kapitel 4 verglichen. Es zeigte sich, dass die numerischen Lösungen die analytischen Lösungen approximieren. Desweiteren spiegelten sie das erwartete Verhalten von Fußgängern wieder. Für hohe Dichten stellten sich die stationären Lösungen erst nach längerer Simulationszeit ein. Wurden die Fußgänger mit einer bevorzugten Ausweichrichtung versehen, so organisierten sie sich in

Spuren.

Das Programm ließe sich zur Simulation von Fußgängern auf mehreren Bahnen mit den in Kapitel 3 hergeleiteten Gleichungen erweitern. Es ist zu erwarten, dass das Phänomen der Spurenbildung dabei deutlicher zu beobachten ist. Außerdem können Fußgänger in einem Korridor modelliert werden. Dazu müsste der Teilchenfluss am linken und rechten Rand des Ortsgebietes vorgegeben werden. Somit könnten weitere dichteabhängiger Effekte untersucht werden, wie z.B. die Bildung von Stauformationen.

Um exaktere Ergebnisse zu erhalten, sollte das Modell mit einer feineren Gitterweite und einer höheren Anzahl von Iterationsschritten implementiert werden. Um den Rechenaufwand dabei zu minimieren, könnte eine adaptive Schrittweitensteuerung verwendet werden.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Burger. Numerik partieller Differentialgleichungen, Wintersemester 2006/07. Skript.
- [2] M. Burger. Mathematische Modellierung, Wintersemester 2010/2011. Skript.
- [3] U. Chattaraj, A. Seyfried, and P. Chakroborty. Comparison of pedestrian fundamental diagram across cultures. *Advances in complex systems*, 12(03):393–405, 2009.
- [4] R.M. Colombo and M.D. Rosini. Pedestrian flows and non-classical shocks. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 28(13):1553–1567, 2005.
- [5] M. Dörr. Numerische Analyse von LRR-Modellen mit zwei Lucas-Bäumen und heterogenen Investoren. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2012.
- [6] M. Fukui and Y. Ishibashi. Self-organized phase transitions in cellular automaton models for pedestrians. *Journal of the physical society of Japan*, 68(8):2861–2863, 1999.
- [7] D. Helbing. Traffic and related self-driven many-particle systems. *Reviews of modern physics*, 73(4):1067, 2001.
- [8] D. Helbing and P. Molnár. Social force model for pedestrian dynamics. *Phys. Rev. E*, 51:4282–4286, May 1995.
- [9] R.L. Hughes. A continuum theory for the flow of pedestrians. *Transportation Research Part B: Methodological*, 36(6):507–535, 2002.
- [10] B. Maury, A. Roudneff-Chupin, and F. Santambrogio. A macroscopic crowd motion model of gradient flow type. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 20(10):1787–1821, 2010.
- [11] M. Muramatsu and T. Nagatani. Jamming transition in two-dimensional pedestrian traffic. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 275(1):281–291, 2000.
- [12] B. A. Schlake. *Mathematical Models for Particle Transport: Crowded Motion*. Dissertation, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2011.
- [13] A. Seyfried. online, 2009. Ausschnitt einer Videoaufnahme zugänglich auf <http://www.asim.uni-wuppertal.de/database/own-experiments/corridor/2d-bidirectional.html>.

-
- [14] J. Zhang, W. Klingsch, A. Schadschneider, and A. Seyfried. Transitions in pedestrian fundamental diagrams of straight corridors and t-junctions. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2011(06):P06004, 2011.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, *Andrea Riberi*, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Gedanklich, inhaltlich oder wörtlich Übernommenes habe ich durch Angabe von Herkunft und Text oder Anmerkung belegt bzw. kenntlich gemacht. Dies gilt in gleicher Weise für Bilder, Tabellen, Zeichnungen und Skizzen, die nicht von mir selbst erstellt wurden.

Alle auf der CD beigefügten Programme sind von mir selbst programmiert worden.

Münster, 18. Januar 2013

Vorname Nachname