



Meinungsdynamik mit heterogenen Agenten

Diplomarbeit

Institut für Numerische und Angewandte Mathematik

eingereicht von

Ina Josek

Betreuer

Prof. Dr. Martin Burger

Münster, 15. Dezember 2009

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich besonders bei meinem Betreuer Prof. Dr. Martin Burger bedanken, der mich bei der Erstellung meiner Diplomarbeit umfangreich unterstützt hat und sich immer die Zeit genommen hat, meine Fragen zu beantworten.

Vielen Dank auch an meine Eltern, die mich während meines Studiums nicht nur finanziell, sondern auch moralisch immer unterstützt haben. Ohne sie wäre dieses Studium so niemals möglich gewesen.

Und, nicht zuletzt, gilt mein ganz besonderer Dank Daniel, der immer für mich da war und sehr viel Geduld mit mir hatte.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Begriffserklärungen und mathematische Grundlagen	3
2.1	Der Zustandsraum	3
2.2	Die Dynamik	4
2.3	Vertrauensschranken	6
2.3.1	Diskrete Modelle mit Vertrauensschranke	6
2.3.2	Kontinuum-Modelle mit Vertrauensschranke	9
3	Das modifizierte Deffuant-Weisbuch-Modell	11
3.1	Das homogene Modell	11
3.1.1	Einführung des homogenen Modells	11
3.1.2	Das homogene Modell im Einzel-Agenten-Phasenraum	14
3.1.3	Der Zusammenhang der Wahrscheinlichkeitsmaße im Einzel-Agenten-Phasenraum und im N-Agenten-Phasenraum	19
3.2	Das heterogene Modell	25
3.2.1	Erweiterung des homogenen Modells auf den heterogenen Fall	25
3.2.2	Das heterogene Modell im Einzel-Agenten-Phasenraum	28
3.2.3	Der Zusammenhang der Wahrscheinlichkeitsmaße im Einzel-Agenten-Phasenraum und im N-Agenten-Phasenraum	32
3.2.4	Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen	38
4	Langzeitverhalten des heterogenen Modells	43
4.1	Voraussetzungen	43
4.2	Stationäre Zustände	45
5	Lineare Stabilitätsanalyse	57
5.1	Linearisierung	57
5.2	Prüfung auf Stabilität	58
6	Numerische Simulation	63
6.1	Simulationen für gleichmäßig verteilte Anfangswerte	63

INHALTSVERZEICHNIS

6.2	Simulation für separierte Anfangswerte	68
7	Zusammenfassung und Ausblick	71
Anhang		72
A	Schwach-*-Topologie	72
B	Mathematische Stabilitätsbegriffe	73
Literaturverzeichnis		74

Abbildungsverzeichnis

6.1	gleichmäßig verteilte Anfangswerte auf $[-2; 2]$, Gruppe b : blau, Gruppe a : rot	65
6.2	gleichmäßig verteilte Anfangswerte auf $[-2; 2]$ (Gruppe b (blau)) und $[-2, 0]$ (Gruppe a (rot))	66
6.3	gleichmäßig verteilte Anfangswerte auf $[-2; 2]$ (Gruppe b (blau)) und $[-2, 0]$ (Gruppe a (rot)), abstoßendes Verhalten zwischen den Gruppen	67
6.4	separierte Anfangswerte, Gruppe a (rot): $[-2; 0]$, Gruppe b (blau): $[0, 2]$	69
6.5	separierte Anfangswerte (mit sehr extremer Gruppe a), Gruppe a (rot): $[-2; 0]$, Gruppe b (blau): $[0, 2]$	70

Kapitel 1

Einleitung

Die vorliegende Diplomarbeit befasst sich mit der mathematischen Modellierung von Meinungsbildungsprozessen. Meinungsbildungsprozesse beschäftigen sich mit dem Informationsaustausch zwischen verschiedenen Individuen mit unterschiedlichen Meinungen. Dieser Informationsaustausch führt zu kollektiven Zuständen, in denen die Individuen entweder einen allgemeinen Konsens finden oder sich in verschiedenen Gruppen, innerhalb denen jeweils ein eigener Konsens gefunden wurde, zusammenschließen.

Betrachten wir einige Beispiele, wo diese Modelle in der Realität Anwendung finden:

Beispiel 1:

Ein Beispiel ist die Meinungsbildung unter den Wählern vor einer Wahl. Menschen mit verschiedenen Meinungen diskutieren diese miteinander und lassen sich in unterschiedlichem Ausmaß von der Meinung und den Argumenten des Gesprächspartners beeinflussen.

Beispiel 2:

Betrachten wir einen fliegenden Schwarm von Zugvögeln. Soll dieser Schwarm als Verbund erhalten bleiben, so müssen sich die Vögel auf eine gemeinsame Flugrichtung und eine gemeinsame Geschwindigkeit einigen.

Beispiel 3:

Ein weiteres Beispiel sind die Laufwege von Fußgängern. Diese ändern sich abhängig von den Menschen in der nächsten Umgebung, um Zusammenstöße zu vermeiden.

Beispiel 4:

Ein etwas anderes Beispiel liefert eine Versammlung von Experten, bei der in verschiedenen Diskussionsrunden bei allen Teilnehmern gleichzeitig ein Meinungsaustausch stattfindet.

Zum Beispiel wird von der UNO eine Expertenkommission einberufen, um die Weltbevölkerung in 30 Jahren zu schätzen. Jedes Mitglied der Kommission erarbeitet eine eigene Schätzung und stellt diese dann den anderen Mitgliedern auf einer Versammlung vor. Die verschiedenen

Schätzungen werden nun diskutiert, danach ziehen sich die Teilnehmer wieder zurück, um auf Grundlage der neuen Argumente eine neue Schätzung auszuarbeiten. Dies wird nun so lange wiederholt, bis entweder ein Konsens erzielt wurde, oder aber abzusehen ist, dass eine Einigung nicht möglich ist.

Wir werden uns mit Modellen beschäftigen, bei denen stetige Meinungen bei beschränktem Vertrauen betrachtet werden. Hierbei bezieht sich 'stetig' zunächst nicht auf die Zeit, sondern auf die Meinung der einzelnen Agenten, die durch eine reelle Zahl ausgedrückt wird. Beispiele hierfür sind Steuersätze, Preise und ähnliches.

Stellen wir uns nun N Personen vor, die jeweils eine Meinung x_i vertreten, diese Meinung x_i besteht aus einer reellen Zahl in einem Intervall $[-W, W]$ (für ein $W > 0$). Diese Personen diskutieren nun miteinander, tauschen ihre Meinungen aus und versuchen, zu einem Konsens zu gelangen oder zumindest einen Status zu erreichen, in dem mehrere verschiedene Meinungsparteien entstehen, in denen sich Personen mit gleicher Meinung wiederfinden. Dieser Austauschprozess soll folgendermaßen ablaufen: In jedem Zeitschritt treffen zwei Personen aufeinander, die miteinander diskutieren. Dann revidiert jede der beiden Personen seine Meinung abhängig von der Meinung des anderen. Dieser Vorgang wird nun iteriert und bildet so die Grundstruktur der hier von uns betrachteten Meinungsbildungsprozesse.

Wir werden uns im Folgenden insbesondere mit einer Erweiterung des Deffuant-Weisbuch-Modells ([Weisbuch, Deffuant et al.(2001)], [Lorenz (2007)]) befassen und betrachten hier sowohl ein homogenes als auch ein heterogenes Agentenmodell. Die Entwicklung der Meinungen im Zeitverlauf wird hier jeweils durch partielle Differentialgleichungen beschrieben.

Wir untersuchen Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen sowie das Auftreten stationärer Zustände. Außerdem präsentieren wir noch eine numerische Simulation für das Modell und betrachten hier besonders den Prozess der Meinungsbildung im Fall von heterogenen Agenten.

Kapitel 2

Begriffserklärungen und mathematische Grundlagen

Die Basis der hier betrachteten Modelle ist eine Menge von Agenten (diese stellen zum Beispiel die Wähler, Vögel, Fußgänger usw. aus den in der Einleitung erwähnten Beispielen dar). Es gibt zwei unterschiedliche Konzepte, die den Modellen zugrunde liegen, einmal die diskreten Modelle und auf der anderen Seite die Kontinuums-Modelle. Bei den diskreten Modellen wird eine endliche Anzahl $n \in \mathbb{N}$ von Agenten betrachtet, die jeweils eine eigene Meinung vertreten. Die Zustände und Dynamiken des Modells werden für jeden einzelnen Agenten abhängig von den anderen Agenten definiert. Das Konzept der Kontinuums-Modelle hingegen stützt sich auf eine Populationsverteilung im Meinungsraum.

Nun werden wir zunächst einige wichtige Begriffe einführen (angelehnt an [Lorenz (2007)]), die wir für die Charakterisierung der Modelle benötigen.

2.1 Der Zustandsraum

Der *Zustand* eines dynamischen Modells beinhaltet alle relevanten Informationen, um das Modell in einem Zeitschritt zu beschreiben. Der *Zustandsraum* enthält alle möglichen Zustände, die das Modell annehmen kann.

Der Zustandsraum in diskreten Modellen

In diesen Modellen wird die Anzahl n der Agenten die *Agentendimension* genannt. Die relevante Information für einen Agenten ist seine *Meinung*, wobei Mengen $S \subset \mathbb{R}^d$ den *Meinungsraum* bilden. Diese Mengen sind kompakt und in den meisten Fällen konvex. Im Folgenden werden wir von *geeigneten Meinungsräumen* sprechen, womit Räume bezeichnet werden, in denen die Dynamik wohldefiniert ist.

Die Dimension $d \in \mathbb{N}$ wird die *Meinungsdimension* genannt, die Menge $\{1, \dots, d\}$ ist die Men-

ge der *Meinungsaspekte*. Für einen bestimmten Zeitschritt $t \in \mathbb{R}$ nennen wir die Menge aller Meinungen aller Agenten $x(t) \in S^n \subset (\mathbb{R}^d)^n$ das *Meinungsprofil* zum Zeitpunkt t . Jeder Zustand eines diskreten Modells für eine stetige Meinungsdynamik ist ein Meinungsprofil. Für einen Agenten $i \in \underline{n}$ ($\underline{n} := \{1, \dots, n\}$) bezeichnen wir seinen Meinungsvektor mit $x_i \in S$ und für $j \in \underline{d}$ bezeichnen wir mit x_i^j die Meinung von Agent i zum Aspekt j .

Ein Meinungsprofil $x \in S^n$ heißt ein *Konsens*, wenn $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Der Zustandsraum in Kontinuums-Modellen

Sei ein Meinungsraum $S \in \mathbb{R}^d$ eines diskreten Modells gegeben. Dann ist der Zustandsraum des Kontinuum-Modells die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße $\{p : S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \int_S p = 1\}$ auf S .

Um die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion auf S später am Computer simulieren zu können, müssen wir S diskretisieren. Dies erreichen wir, indem wir den Meinungsraum in eine endliche Anzahl von gleichgroßen Segmenten unterteilen, den *Meinungsklassen*. In dem Fall $d = 1$ ist S ein Intervall, welches wir diskretisieren, indem wir es in equidistante Subintervalle unterteilen. Diese Menge von Subintervallen wird auf die Menge $\{1, \dots, d\}$ abgebildet, die Menge der Meinungsklassen. In einem Kontinuum-Modell setzt n somit nicht die Anzahl der Agenten fest, sondern die Anzahl der Meinungsklassen.

Ein Vektor $p \in \mathbb{R}^n$ ist eine *Meinungsverteilung*, wenn er stochastisch ist (d.h. die Spaltensumme des Vektors beträgt immer 1). Daraus folgt, dass der Zustandsraum der Einheitssimplex Δ^{n-1} ist. Der Eintrag p_i bezeichnet den Anteil der Agentenpopulation, der die Meinung $i \in \underline{n}$ vertritt. Für einen bestimmten Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$ beschreibt der Vektor $p(t)$ die Verteilung der (unendlichen) Agentenpopulation auf die Meinungsklassen $\{1, \dots, n\}$ zur Zeit t . Die Meinungsverteilung p ist ein Wahrscheinlichkeitsvektor, da p_i , bei Betrachtung eines Agenten, die Wahrscheinlichkeit dafür beschreibt, dass dieser Agent die Meinung i vertritt.

Aus praktischen Gründen definieren wir $p = 0$ für alle $i \notin \underline{n}$.

Der Parameter n kann als Maß dafür aufgefasst werden, wie genau eine stetige Meinung abgebildet werden kann, d.h. insbesondere, wie viele Meinungsklassen zwischen der maximalen und der minimalen Meinung liegen.

2.2 Die Dynamik

Ein diskretes, dynamisches System wird durch den Zustandsraum und einer Sequenz von Selbstabbildungen in diesem Zustandsraum, welche iterativ berechnet werden, beschrieben.

Das System heißt *dynamisch*, weil es eine zeitabhängige Entwicklung durchläuft. Durch die Betrachtung eines diskreten Zeitverlaufs erscheint die Veränderung der Meinung als ein diskretes Ereignis. So werden Probleme bei der Diskretisierung der Zeit vermieden, die sich bei der Nachbildung von Modellen mit stetiger Zeit ergeben würden.

Dynamik in diskreten Modellen

Für jeden Zeitschritt $t \in \mathbb{N}$ wird eine Selbstabbildung in den Zustandsraum

$$\begin{aligned} f_t : S^n &\rightarrow S^n \\ x &\mapsto f_t(x(t)) \end{aligned}$$

benötigt, um für ein Anfangsprofil $x(0)$ den diskreten Prozess als Sequenz $(x(t))_t \in \mathbb{N}$ rekursiv durch

$$x(t+1) = f_t(x(t))$$

zu definieren.

Das Paar $(S^n, (f_t)_{t \in \mathbb{N}})$ beschreibt ein nicht-autonomes diskretes dynamisches System. Die Komponentenfunktion $(f_i)_i : S^n \rightarrow S$ berechnet den neuen Zustand von Agent i aus den Zuständen aller Agenten.

Es ist zu beachten, dass die Existenz und die Eindeutigkeit einer Lösung noch gezeigt werden muss. Allerdings kann man leicht (induktiv) zeigen, dass diskrete dynamische Systeme eine eindeutige Lösung für jedes Anfangsprofil $x(0) \in S^n$ besitzt.

Das System heißt *zeitunabhängig*, wenn $f_t = f_0$ für alle Zeitschritte t gilt, ansonsten heißt es *zeitabhängig*.

Das System heißt *linear*, wenn es eine Funktion

$$\begin{aligned} A : \mathbb{N} \times S^n &\rightarrow \mathbb{R}^{(n \times n)} \\ (t, x) &\mapsto A(t, x) \end{aligned}$$

gibt, für die gilt

$$f_t(x(t)) = A(t, x(t))x(t)$$

Das System ist

- linear und zeitabhängig, wenn gilt $A(t, x) = A(t)$ für alle $x \in (\mathbb{R}^d)^n$
- linear, zeit- und zustandsunabhängig, wenn gilt $A(t, x) = A$
- linear, zustandsabhängig und zeitunabhängig, wenn gilt $A(t, x) = A(x)$.

Dynamik in Kontinuum-Modellen

Wir definieren eine Selbstabbildung in den Einheitssimplex Δ^{n-1} :

Sei $p \in \Delta^{n-1}$ eine Meinungsverteilung, $B(p) \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$ eine zustandsabhängige reihenstochastische Übergangsmatrix. Für eine Anfangsverteilung $p(0) \in \Delta^{n-1}$ ist der Kontinuum-Prozess

dann rekursiv definiert als die Sequenz $(p(t))_{t \in \mathbb{N}}$ mit

$$p(t+1) = p(t)B(p(t))$$

Dieser Prozess ist eine *interaktive Markovkette* in diskreter Zeit und mit einer endlichen Anzahl von diskreten Zuständen. Die Markovkette heißt *interaktiv*, da die Übergangsmatrix abhängig von dem aktuellen Zustand ist. Der Eintrag $B_{ij}(p(t))$ beschreibt die Gruppe der Agenten, die sich von Meinungsklasse i zu Meinungsklasse j bewegen.

(Für die explizite Definition der interaktiven Übergangsmatrix siehe Abschnitt "*Kontinuum-Modelle mit Vertrauensschränke*")

2.3 Vertrauensschränken

Vertrauensschränken in diskreten Zustandsräumen

Eine Voraussetzung an die hier betrachteten Modelle zur Meinungsdynamik ist, dass die Agenten Vertrauensschränken haben. Das heißt, ein Agent lässt sich nur von anderen Agenten beeinflussen, deren Meinung noch innerhalb seiner Vertrauensschränke liegt, also nicht in zu großem Maße von seiner eigenen Meinung abweicht.

Wir nennen $\epsilon_i \in \mathbb{R}$ eine *Vertrauensschränke* von Agent i , wenn $\epsilon_i > 0$ gilt. Wenn $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_n = \epsilon$ gilt, so heißt ϵ eine *homogene Vertrauensschränke*.

Des Weiteren benötigen wir eine Norm $\|\cdot\|$ auf dem Zustandsraum. Die Idee dahinter ist, dass der *Vertrauensbereich* eines Agenten i der Einheitsball unter der Norm $\|\cdot\|$ (skaliert durch ϵ_i) umgerechnet auf seine aktuelle Meinung ist.

Definition 2.3.1. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *reihenstochastisch*, wenn die Reihensumme jeweils 1 beträgt.

Definition 2.3.2. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *Vertrauensmatrix*, wenn sie reihenstochastisch ist.

2.3.1 Diskrete Modelle mit Vertrauensschränke

Definition 2.3.3. Eine Sequenz von Adjazenzmatrizen (Nachbarschaftsmatrizen) $(N(t))_{t \in \mathbb{N}}$ ($N \in \{0, 1\}$) nennen wir *Kommunikationsmodell*. Dieses beschränkt in jedem Zeitschritt die Kommunikation in einem bestehenden Netzwerk.

Definition 2.3.4. Sei $S \subset \mathbb{R}^d$ ein geeigneter Meinungsraum und $(N(t))_{t \in \mathbb{N}}$ ein Kommunikationsmodell. $x(0) \in S^n$ sei ein Anfangsprofil mit n Agenten mit d -dimensionalen, stetigen Meinungen und A sei eine Matrixfunktion

$$A : \mathbb{N} \times S^n \times \{0, 1\}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$(t, x, N) \mapsto A(t, x, N)$$

so, dass für alle (t, x, N) gilt:

$A(t, x, N)$ ist reihenstochastisch und $A(t, x, N) \leq N$.

Dann nennen wir die Sequenz $(x(t))_{t \in \mathbb{N}}$, rekursiv definiert durch

$$x(t+1) = A(t, x(t), N(t))x(t)$$

einen *Meinungsbildungsprozess*.

Definition 2.3.5. Sei $S \subset \mathbb{R}^d$ ein geeigneter Meinungsraum und $(N(t))_{t \in \mathbb{N}}$ ein Kommunikationsmodell, $nb(i, N) := \{j \in \underline{n} \mid n_{ij} = 1\}$. Es seien $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \geq 0$ Vertrauensschranken und $\|\cdot\|_p$ die p -Norm. Für ein Meinungsprofil $x \in S^n$ und einen Zeitschritt $t \in \mathbb{N}$ sei $A(t, x) := A(t, x, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n, N(t))$ die Vertrauensmatrix, d.h.

$$A_{ij}(t, x) := \begin{cases} \frac{1}{\#I(i, t, x)}, & \text{wenn } j \in I(i, t, x) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$I(i, t, x) := I_{\epsilon_i}(i, x) \cap nb(i, N(t)) = \{j \in \underline{n} \mid \|x_j - x_i\|_p \leq \epsilon_i \text{ und } N_{ij}(t) = 1\}$$

Für jedes Anfangsprofil $x(0) \in S^n$ definieren wir den *Prozess mit Vertrauensschranke* $(x(t))_{t \in \mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$x(t+1) = A(t, x(t))x(t)$$

In der obigen Definition sei $I_{\epsilon_i}(i, x) := \{j \in \underline{n} \mid \|x_j - x_i\|_p \leq \epsilon_i\}$ der Vertrauensbereich von Agent $i \in \underline{n}$ abhängig vom Meinungsprofil $x \in S^n$, dem Norm-Parameter p und der Vertrauensschranke $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $nb(i, N)$.

Wenn wir also die Agenten als Punkte mit Masse 1 ansehen, so bewegt sich jeder Agent in jedem Zeitschritt in Richtung des Massezentrums aller Agenten, die sich innerhalb seiner Vertrauensschranke befinden. Diese Bewegung der Agenten wird durch das zugrundeliegende Kommunikationsmodell bestimmt. Dieses Kommunikationsmodell ist eine externe Restriktion für die

Kommunikation der Agenten untereinander, wogegen sich das durch die Vertrauensbereiche festgelegte Netzwerk dynamisch mit dem Zustand des Systems verändert.

Ein bekanntes Modell mit Vertrauensgrenze ist das Deffuant-Weisbuch-Modell. In diesem Modell treffen in jedem Zeitschritt zwei zufällig ausgewählte Agenten aufeinander. Falls die Differenz ihrer Meinungen ihre Vertrauensschranke nicht überschreitet, passen die Agenten ihre Meinung dem Kommunikationsmodell entsprechend an. Liegen ihre Meinungen zu weit auseinander, findet keine Interaktion statt.

Definition 2.3.6 (Deffuant-Weisbuch-Modell). Sei $S \subset \mathbb{R}$ ein konvexer Meinungsraum und n die Anzahl der Agenten. Gegeben seien ein Anfangsprofil $x(0) \in S^n$, Vertrauensschranken $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n > 0$, ein Anpassungsparameter $0 < \mu \leq 0,5$ (dieser beschreibt die Bereitschaft, sich der Meinung eines anderen Agenten anzupassen (Beeinflussbarkeit)) und eine Norm $\|\cdot\|_p$.

Wir definieren den *Gossip-Prozess* als den randomisierten Prozess $(x(t))_{t \in \mathbb{N}}$, der in jedem Zeitschritt $t \in \mathbb{N}$ zwei beliebige Agenten i, j auswählt, welche die folgende Aktion ausführen

$$x_i(t+1) = \begin{cases} x_i(t) + \mu(x_j(t) - x_i(t)), & \text{wenn } \|x_i(t) - x_j(t)\| \leq \epsilon_i \\ x_i(t), & \text{sonst} \end{cases}$$

Analog folgt $x_j(t+1)$.

Gilt $\epsilon_1 = \dots = \epsilon_n$, so nennen wir das Modell *homogen*, ansonsten *heterogen*. Wird kein Anpassungsparameter vorgegeben, so wählt man $\mu = 0,5$.

Das Kommunikationsmodell des Deffuant-Weisbuch-Modells ist eine Sequenz $(N(t))_{t \in \mathbb{N}}$, wobei jedes Netzwerk eine Einheitsmatrix mit zwei zusätzlichen symmetrischen Einträgen mit Wert 1 ist. Die Position dieser beiden zusätzlichen Einträge wird für jedes t zufällig gewählt.

Der Anpassungsparameter μ bestimmt das Verhältnis, mit dem sich ein Agent auf seinen Kommunikationspartner zu bewegt, falls sie nah genug beieinander liegen, um miteinander zu interagieren. Hat μ zum Beispiel den Wert 0,5, so bewegt sich der Agent in das Massezentrum der beiden interagierenden Partner. Nimmt μ Werte $< 0,5$ an, so ist der Agent vorsichtiger und passt seine Meinung weniger stark an.

Für $\mu = 0,5$ passt das Deffuant-Weisbuch-Modell in das System des allgemeinen Verfahrens mit Vertrauensgrenzen, mit dem oben genannten Kommunikationsmodell. Für $\mu < 0,5$ hat die Vertrauensmatrix des Deffuant-Weisbuch-Modells die folgende Form:

$$(2\mu)A(x, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n, N(t)) + (1 - 2\mu)E$$

2.3.2 Kontinuum-Modelle mit Vertrauensschränke

Wir betrachten nun das Deffuant-Weisbuch-Modell auf einem eindimensionalen Meinungsraum als Kontinuum-Modell. Dazu gehen wir von n Agenten mit Meinungen in S über zu einer unendlichen Population, welche in n Meinungsklassen unterteilt ist.

Sei \underline{n} eine Menge von Meinungsklassen und $p(0) \in \Delta^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ eine Anfangs-Meinungsverteilung. Ein Kontinuum-Prozess ist eine interaktive Markovkette $p(t+1) = p(t)B(p(t))$ mit der expliziten Definition der Übergangsmatrix-Funktion $B(\cdot)$.

Definition 2.3.7. Die *Deffuant-Weisbuch-Übergangsmatrix* für eine Meinungsverteilung $p \in \Delta^{n-1}$, eine Vertrauensschränke $\epsilon \in \mathbb{N}$ und einen Anpassungsparameter $0 < \mu \leq 0,5$ ist folgendermaßen definiert:

$$B_{ij}^{DW}(p, \epsilon, \mu) := \begin{cases} \sum_{\{k \in \underline{n} \mid |i + \mu(k-i) - j| \leq \epsilon\}} (1 - |i + \mu(k-i) - j|) \pi_k^i, & \text{wenn } i \neq j \\ q_i, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$q_i = 1 - \sum_{j \neq i, j=1}^n B_{ij}^{DW}(p, \epsilon, \mu)_{ij}$$

und

$$\pi_m^i := \begin{cases} p_m, & \text{wenn } |i - m| \leq \epsilon \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung 2.3.8. $p_i = 0$ für alle $i \notin \underline{n}$

Für die geläufigste Form mit $\mu = 0,5$ vereinfacht sich die Übergangsmatrix zu

$$B_{ij}^{DW}(p, \epsilon) := \begin{cases} \frac{\pi_{2j-i-1}^i + \pi_{2j-i}^i + \frac{\pi_{2j-i+1}^i}{2}}, & \text{wenn } i \neq j \\ q_i, & \text{wenn } i = j \end{cases}$$

Definition 2.3.9. \underline{n} seien die Meinungsklassen. $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m \in \mathbb{N}$ seien die diskreten Vertrauensschränken und $p^1(0), \dots, p^m(0)$ positive Vektoren mit $p(t) := \sum_{j=1}^m p^j(t) \in \Delta^{n-1}$ (p_i^j bezeichnet die Gruppe der Agenten, die Meinung i und Vertrauensschränke ϵ_i haben.).

Die *interaktive DW-Markovkette mit heterogenen Vertrauensschränken* ist die Menge der Sequenzen $(p^1(t))_{t \in \mathbb{N}}, \dots, (p^m(t))_{t \in \mathbb{N}}$, welche rekursiv definiert sind durch

$$p^1(t+1) = p^1(t)B^{DW}(p(t), \epsilon_1, \mu)$$

⋮

$$p^m(t+1) = p^m(t)B^{DW}(p(t), \epsilon_m, \mu)$$

Im Spezialfall $m = 1$ erhält man die interaktive Markovkette für den Fall einer homogenen Vertrauensgrenze.

Kapitel 3

Das modifizierte Deffuant-Weisbuch-Modell

Wir werden im Folgenden ein modifiziertes Deffuant-Weisbuch-Modell betrachten. Im klassischen Modell lässt sich ein Agent i nur dann von einem anderen Agenten j beeinflussen, wenn sich dieser innerhalb seiner Vertrauensschranke befindet. Innerhalb dieses Vertrauensbereichs ist der Einfluss durch den anderen Agenten immer gleich groß, unabhängig davon, wie ähnlich sich die Meinungen von Agent i und Agent j sind, außerhalb dieser Schranke ist der Einfluss gleich 0. Wir werden diesen Übergang fließender gestalten um das Modell so realitätsnäher zu formulieren.

3.1 Das homogene Modell

3.1.1 Einführung des homogenen Modells

Wir betrachten zunächst das homogene Modell, in dem alle Agenten eine einheitliche Vertrauensschranke besitzen.

Unser Modell hat folgende Form:

$$x_i(t + dt) = x_i(t) + \lambda g(x_i(t) - x_j(t)) dt \quad (3.1)$$

mit

$g(s)$ ist stetig differenzierbar, $g(s) = 0$ für $|s| \geq d$, $g(0) = 0$ und $g(s) = -g(-s)$, bei Vertrauensschranke d .

Dieses Meinungsmodell ist also ebenso wie das klassische Deffuant-Weisbuch-Modell ein Modell mit beschränktem Vertrauen, eine Interaktion zwischen den Agenten findet nur innerhalb der Vertrauensschranke d statt. Anders als bei dem klassischen Modell wird hier die Interaktion innerhalb der Vertrauensgrenze aber von der stetig differenzierbaren Funktion g bestimmt.

Betrachten wir nun N Agenten, d.h. $i = 1, \dots, N$. $X_i(t)$ sei die Zufallsvariable, die die Meinung von Agent i zum Zeitpunkt t beschreibt. Sei $\rho(x_1, \dots, x_N, t)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte für $x_i(t) \in [x_i, x_i + dt]$, $\rho : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Zur besseren Lesbarkeit werden wir im Folgenden diese Schreibweise verwenden:

$$\begin{aligned} x_i &= \tilde{x}_i + \lambda g(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j) dt \\ x_j &= \tilde{x}_j + \lambda g(\tilde{x}_j - \tilde{x}_i) dt \end{aligned}$$

Nun ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\rho(x_1, \dots, x_N, t + dt) dx_1 \dots dx_N \\ &= \sum_{(i,j)} P(i, j \text{ treffen sich in } t, t + dt) \rho(\dots, \tilde{x}_i, \dots, \tilde{x}_j, \dots, t) dx_1 \dots d\tilde{x}_i \dots d\tilde{x}_j \dots dx_N \end{aligned} \quad (3.2)$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} &\rho(x_1, \dots, x_N, t + dt) dx_1 \dots dx_N \\ &= \sum_{(i,j)} \frac{1}{(N(N-1))} \rho(\dots, \tilde{x}_i, \dots, \tilde{x}_j, \dots, t) dx_1 \dots d\tilde{x}_i \dots d\tilde{x}_j \dots dx_N \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nun betrachten wir $dt \rightarrow 0$.

Mit der Taylorentwicklung von $\rho(x_1, \dots, \tilde{x}_i, \dots, \tilde{x}_j, \dots, t)$ um (x_1, \dots, x_N, t) erhalten wir

$$\begin{aligned} \rho(x_1, \dots, \tilde{x}_i, \dots, \tilde{x}_j, \dots, t) &= \rho(x_1, \dots, x_N, t) + \frac{\partial \rho(x_1, \dots, x_N, t)}{\partial x_i} (\tilde{x}_i - x_i) \\ &+ \frac{\partial \rho(x_1, \dots, x_N, t)}{\partial x_j} (\tilde{x}_j - x_j) + \mathcal{O}(dt^2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

und die Taylorentwicklung von $\rho(x_1, \dots, x_N, t + dt)$ um (x_1, \dots, x_N, t) liefert

$$\rho(x_1, \dots, x_N, t + dt) = \rho(x_1, \dots, x_N, t) + \frac{\partial \rho(x_1, \dots, x_N, t)}{\partial t} dt + \mathcal{O}(dt^2) \quad (3.5)$$

Es gilt

$$x_i = \tilde{x}_i + \lambda g(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j) dt$$

und durch Umformen erhalten wir

$$dx_i = d\tilde{x}_i + \lambda dg(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j) dt = d\tilde{x}_i + \lambda dt g'(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j) (d\tilde{x}_i - d\tilde{x}_j)$$

und

$$dx_j = d\tilde{x}_j + \lambda g'(\tilde{x}_j - \tilde{x}_i)(d\tilde{x}_j - d\tilde{x}_i)dt$$

Mit Taylorentwicklung von $g(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)$ um (x_i, x_j)

$$d\tilde{x}_i = dx_i + \lambda g'(x_i - x_j)(dx_i - dx_j)dt + \mathcal{O}(dt^2)$$

folgt

$$d\tilde{x}_i = dx_i - \lambda g'(x_i - x_j)(dx_i - dx_j)dt$$

und somit

$$\tilde{x}_i - x_i = -\lambda g(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)dt = -\lambda g(x_i - x_j)dt + \mathcal{O}(dt^2)$$

Wenn wir dies nun in unsere Ausgangsformel einsetzen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} & (\rho(x_1, \dots, x_N, t) + (\frac{\partial \rho}{\partial t} dt)) dx_1 \dots dx_N \\ &= \sum_{(i,j)} \frac{1}{N(N-1)} (\rho(x_1, \dots, x_N, t) - (\frac{\partial \rho}{\partial x_i} \lambda dt g(x_i - x_j) - \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \lambda dt g(x_j - x_i))) \\ & (dx_1 \dots (dx_i - \lambda dt g'(x_i - x_j)(dx_i - dx_j)) \dots (dx_j - \lambda dt g'(x_j - x_i)(dx_j - dx_i)) \dots dx_N) \quad (3.6) \end{aligned}$$

Dies führt zu

$$\begin{aligned} (\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt) dx_1 \dots dx_N &= \sum_{(i,j)} \frac{1}{N(N-1)} \rho dx_1 \dots dx_N \\ &+ dt \sum_{(i,j)} \frac{1}{N(N-1)} (-\frac{\partial \rho}{\partial x_i} \lambda g(x_i - x_j)) dx_1 \dots dx_N \\ &+ dt \sum_{(i,j)} \frac{1}{N(N-1)} \rho \lambda (g'(x_i - x_j) + g'(x_j - x_i)) dx_1 \dots dx_N \end{aligned}$$

Durch Umformung ergibt sich

$$\begin{aligned} & (\frac{\partial \rho}{\partial t} dt) dx_1 \dots dx_N \\ &= dt \sum_{(i,j)} \frac{1}{N(N-1)} \lambda (-\frac{\partial \rho}{\partial x_i} g(x_i - x_j) - \rho \frac{\partial g(x_i - x_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial \rho}{\partial x_j} g(x_j - x_i) - \rho \frac{\partial g(x_j - x_i)}{\partial x_j}) dx_1 \dots dx_N \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right) dx_1 \dots dx_N \\ &= -\lambda dt \sum_{(i,j)} \frac{1}{N(N-1)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_i} g(x_i - x_j) + \rho \frac{\partial g(x_i - x_j)}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial x_j} g(x_j - x_i) + \rho \frac{\partial g(x_j - x_i)}{\partial x_j} \right) dx_1 \dots dx_N \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right) dx_1 \dots dx_N \\ &= -\lambda dt \sum_{(i,j)} \frac{1}{N(N-1)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (g(x_i - x_j) \rho) + \frac{\partial}{\partial x_j} (g(x_j - x_i) \rho) \right) dx_1 \dots dx_N \end{aligned}$$

Umordnen der Summe führt zu

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right) dx_1 \dots dx_N \\ &= -\lambda dt \left(\sum_{(i,j)} \frac{1}{N(N-1)} \frac{\partial}{\partial x_i} (g(x_i - x_j) \rho) dx_1 \dots dx_N + \sum_{(i,j)} \frac{1}{N(N-1)} \frac{\partial}{\partial x_j} (g(x_j - x_i) \rho) dx_1 \dots dx_N \right) \end{aligned}$$

Dies ergibt nun

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx_1 \dots dx_N = -\lambda \frac{2}{N(N-1)} \left(\sum_{(i,j)} \frac{\partial}{\partial x_i} (g(x_i - x_j) \rho) dx_1 \dots dx_N \right) \quad (3.7)$$

Durch Umskalierung der Zeit zu $\tilde{t} = \frac{t}{N-1}$ erhalten wir die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tilde{t}} = -\frac{1}{N} \left(\sum_{(i,j)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda g(x_i - x_j) \rho) \right)$$

3.1.2 Das homogene Modell im Einzel-Agenten-Phasenraum

Betrachten wir nun die charakteristische Gleichung

$$\dot{x}_k = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq l \neq k \leq N} G'(x_l - x_k) \quad (3.8)$$

wobei $G' = \lambda g$, G stellt hier das Interaktionspotential zwischen den Agenten dar (siehe im Folgenden auch [Golse (2003)]).

Das im vorangegangenen Abschnitt berechnete ρ ist hier die gemeinsame Dichte der Agenten x_1, \dots, x_N .

Das Potential $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt

$$G \in C_b^2(\mathbb{R})$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ([Walter (2000)]) existiert also eine eindeutige Lösung $X_N(t) = (x_k(t))_{1 \leq k \leq N}$ des Systems (3.8) mit $X_N(0) = X_N^0$.

Auf Grund der besseren Lesbarkeit schreiben wir im Folgenden $X_N \equiv X_N(t, X_N^0)$.

Definition 3.1.1. Die empirische Verteilung des Systems mit N Agenten ist das Wahrscheinlichkeitsmaß $f_{N, X_N^0}(t, \cdot)$ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ mit

$$f_{N, X_N^0}(t, \cdot) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x_k(t, X_N^0)}$$

Dies ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Einzel-Agenten-Phasenraum und es ist äquivalent, f_{N, X_N^0} oder die Trajektorie jedes Agenten zu kennen. Dieses Wahrscheinlichkeitsmaß sollte nicht mit der Unbekannten in der Liouville-Gleichung verwechselt werden, welche ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem N -Agenten-Phasenraum ist.

Auf den Zusammenhang zwischen diesen beiden Wahrscheinlichkeitsmaßen werden wir später noch eingehen.

Nun betrachten wir das Zusammenspiel zwischen der empirischen Verteilung $f_{N, X_N^0}(t, \cdot)$ und der Lösung $f(t, \cdot)$ der Vlasov-Gleichung ([Golse (2003)]).

Theorem 3.1.2. Sei $G \in C_b^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ und $X_N^{0, N}$ sei eine Sequenz von Anfangskonfigurationen für N Agenten, so dass

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{(X_N^{0, N})_k} \rightarrow f^0 \text{ in } w\text{-*}-\mathcal{M}(\mathbb{R})$$

Dann gilt

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x_k(t, X_N^{0, N})} \rightarrow f(t, \cdot) \text{ in } w\text{-*}-\mathcal{M}(\mathbb{R})$$

gleichmäßig auf kompakten Untermengen von \mathbb{R}_+ , wobei f die Lösung der Vlasov-Gleichung

$$\partial_t f + \operatorname{div}_x((G' \star_x f)f) = 0, \quad f|_{t=0} = f^0 \quad (3.9)$$

mit Anfangswert f^0 ist.

Um das obige Theorem zu beweisen, benötigen wir erst noch diese Definition und den darauffolgenden Satz:

Definition 3.1.3. Es seien μ und ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathbb{R} . Dann ist die Wasserstein-Distanz ([Golse (2003)]) zwischen μ und ν definiert als

$$W_p(\mu, \nu) = \inf \{E |X - Y|^p \mid X \text{ (bzw. } Y) \text{ hat Verteilung } \mu \text{ (bzw. } \nu)\}$$

$1 \leq p \leq \infty$.

Anders ausgedrückt bedeutet dies Folgendes: Sei $E(\mu, \nu)$ ein Set von Wahrscheinlichkeitsmaßen P auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, so dass μ bzw. ν das Bild von P unter der Projektion auf den ersten (bzw. auf den zweiten) Faktor ist. Dann gilt:

$$W_p(\mu, \nu) = \inf_{P \in E(\mu, \nu)} \int \int |x - y|^p P(dx dy)$$

Seien nun $\mu \equiv \mu(t, dx)$ und $\nu \equiv \nu(t, dx)$ zwei Lösungen der PDE (3.9) in $C(\mathbb{R}_+, w^* - \mathcal{M}^1(\mathbb{R}))$ ($\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ bezeichnet hier die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathbb{R}). Dann gilt:

Satz 3.1.4 (Dobrushin's Ungleichung). *Seien $\mu, \nu \in C(\mathbb{R}_+, w^* - \mathcal{M}^1(\mathbb{R}))$ zwei Lösungen von (3.9). Dann gilt*

$$W_p(\mu(t), \nu(t)) \leq W_p(\mu^0, \nu^0) e^{2t \|G'\|_L}, \quad t \geq 0$$

L bezeichnet die Lipschitzkonstante bzgl. G' .

(siehe [Dobrushin (1972)])

Beweis. (für $p = 1$, $1 \leq p < \infty$ analog, $p = \infty$ erhält man durch Betrachtung des Grenzwertes) Sei $P^0 \in E(\mu^0, \nu^0)$. Wir definieren $P(t)$ als das Bild von P^0 unter der Abbildung $(a, b) \mapsto (x(t, a, \mu^0), x(t, b, \nu^0))$. Dann ist $P(t) \in E(\mu(t), \nu(t))$.

Wir definieren

$$\Phi(t) := \int \int |a - b| P(t, da db) = \int \int |x(t, a, \mu^0) - x(t, b, \nu^0)| P^0(da db)$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} x(t, a, \mu^0) &= a + \int_0^t \int G'(x(s, a, \mu^0) - x(s, \hat{a}, \mu^0)) \mu^0(d\hat{a}) ds \\ &= a + \int_0^t \int \int G'(x(s, a, \mu^0) - x(s, \hat{a}, \mu^0)) P^0(d\hat{a} d\hat{b}) ds \end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned} x(t, b, \nu^0) &= b + \int_0^t \int G'(x(s, b, \nu^0) - x(s, \hat{b}, \nu^0)) \nu^0(d\hat{b}) ds \\ &= b + \int_0^t \int \int G'(x(s, b, \nu^0) - x(s, \hat{b}, \nu^0)) P^0(d\hat{a} d\hat{b}) ds \end{aligned}$$

Somit gilt dann

$$\begin{aligned} &|x(t, a, \mu^0) - x(t, b, \nu^0)| \\ &\leq |a - b| + \int_0^t \int \int \|G'\|_L (|x(s, a, \mu^0) - x(s, \hat{a}, \mu^0)| + |x(s, b, \nu^0) - x(s, \hat{b}, \nu^0)|) P^0(d\hat{a} d\hat{b}) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq |a - b| + \|G'\|_L \int_0^t |x(ts, a, \mu^0) - x(s, b, \nu^0)| ds \\ &+ \|G'\|_L \int_0^t \int \int |x(s, \hat{a}, \mu^0) - x(s, \hat{b}, \nu^0)| P^0(d\hat{a}d\hat{b}) ds \end{aligned}$$

Nun integrieren wir beide Seiten über $P^0(dadb)$ und erhalten

$$\begin{aligned} &\int \int |x(t, a, \mu^0) - x(t, b, \nu^0)| P^0(dadb) \\ &\leq \int \int |a - b| P^0(dadb) + \|G'\|_L \int_0^t \int \int |x(s, a, \mu^0) - x(s, b, \nu^0)| P^0(dadb) ds \\ &+ \|G'\|_L \int_0^t \int \int \int |x(s, \hat{a}, \mu^0) - x(s, \hat{b}, \nu^0)| P^0(d\hat{a}d\hat{b}) P^0(dadb) ds \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} &\int \int |x(t, a, \mu^0) - x(t, b, \nu^0)| P^0(dadb) \\ &\leq \int \int |a - b| P^0(dadb) \\ &\quad + 2\|G'\|_L \int_0^t \int \int |x(s, a, \mu^0) - x(s, b, \nu^0)| P^0(dadb) ds \end{aligned}$$

Anders ausgedrückt bedeutet dies

$$\Phi(t) \leq \phi(0) + 2\|G'\|_L \int_0^t \Phi(s) ds$$

Nun folgt mit der Gronwall-Ungleichung

$$\Phi(t) \leq \Phi(0) e^{2t\|G'\|_L}$$

Betrachtet man nun auf beiden Seiten der Ungleichung das Infimum über $E(\mu^0, \nu^0)$, so erhält man die Dobrushin-Ungleichung.

□

In dem Beweis des obigen Satzes haben wir die folgende Ungleichung verwendet:

Gronwall-Ungleichung (siehe [Aulbach (2004)]):

Es sei $\mathcal{I} := [a, b]$ ein Intervall, $u, \alpha : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\beta : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty)$ stetige Funktionen. Weiter gelte die Integralungleichung

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s) ds \quad \text{für alle } t \in \mathcal{I}$$

Dann gilt die Gronwall-Ungleichung

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^t \beta(y)dy} ds \quad \text{für alle } t \in \mathcal{I}$$

Wir benötigen hier den Spezialfall mit konstanten Funktionen $\alpha = A$ und $\beta = B$.

In diesem Fall lautet die Ungleichung

$$u(t) \leq A + \int_a^t AB e^{B(t-s)} ds = A e^{B(t-a)}$$

Kommen wir nun zu dem Beweis von Theorem (3.1.2).

Beweis. (von Theorem (3.1.2))

Betrachtet man die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\partial_t f + \operatorname{div}_x((G' \star_x f)f) = 0, \quad f|_{t=0} = f^0 \quad (3.10)$$

mit der Unbekannten $f \equiv f(t, x)$. \star_x bezeichne die Faltung in x . Mit der Methode der Charakteristiken erhält man das folgende System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, a, f^0) &= (G' \star_x f(t))(x(t, a, f^0)) & (3.11) \\ x(0, a, f^0) &= a, & f(t) = x(t, \cdot, f^0) \diamond f^0 \end{aligned}$$

mit dieser Schreibweise:

Seien (X, \mathcal{M}) und (Y, \mathcal{N}) zwei Maßräume, $f : X \rightarrow Y$ eine messbare Abbildung und μ ein Maß auf (X, \mathcal{M}) . Dann bezeichnet man das durch $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$, $B \in \mathcal{N}$ definierte Maß ν auf (Y, \mathcal{N}) als das von f induzierte Maß auf (Y, \mathcal{N}) und schreibt $\nu = f \diamond \mu$.

Somit gilt

$$\dot{x}(t, a, f^0) = \int G'(x(t, a, f^0) - x(t, \hat{a}, f^0)) f^0(d\hat{a}) \quad (3.12)$$

$\mu \equiv \mu(t, dx)$ und $\nu \equiv \nu(t, dx)$ seien zwei Lösungen der PDE (3.9) in $C(\mathbb{R}_+, w^* - \mathcal{M}^1(\mathbb{R}))$.

Sei $\nu^{0,N}$ der Form

$$\nu^{0,N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x_k^{0,N}}$$

dann ist $x_k^N(t, x_k^{0,N}, \nu^{0,N})$ für alle $k \leq 1$ die Lösung des ODE-Systems

$$\dot{x}_k^N(t, x_k^{0,N}, \nu^{0,N}) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N G'(x_k^N(t, x_k^{0,N}, \nu^{0,N}) - x_l^N(t, x_l^{0,N}, \nu^{0,N}))$$

$$x_k^N(o, x_k^{0,N}, \nu^{0,N}) = x_k^{0,N}$$

und sei

$$\nu^N(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x_k^N(t, x_k^{0,N}, \nu^{0,N})}$$

Dann folgt aus der Dobrushin-Ungleichung

$$W(\mu(t), \nu^N(t)) \rightarrow 0 \text{ für alle } t \geq 0, \text{ wenn } N \rightarrow +\infty$$

wenn $W(\mu^0, \nu^{0,N}) \rightarrow 0$.

Da die Wasserstein-Distanz die schwach-*-Topologie auf $\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ metrisiert, ist somit das Theorem bewiesen. □

3.1.3 Der Zusammenhang der Wahrscheinlichkeitsmaße im Einzel-Agenten-Phasenraum und im N-Agenten-Phasenraum

Nun stellt sich die Frage, wie das Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem 1-Agent-Phasenraum und das Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem N-Agenten-Phasenraum zueinander in Beziehung stehen. Eine erste Einsicht in diese Zusammenhänge erlaubt uns das folgende Lemma ([Golse (2003)]):

Lemma 3.1.5. *Sei $f \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ und sei, für alle $N \geq 1$, $F_N \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^N)$ symmetrisch in allen Variablen, d.h. F_N ist invariant unter der Transformation*

$$(x_1, \dots, x_N) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)})$$

für alle $\sigma \in S$.

Dann sind die zwei folgenden Aussagen äquivalent:

(1) für alle $\epsilon \geq 0$ und jedes $\phi \in C_c(\mathbb{R})$ gilt

$$F_N(\{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid |\langle \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x_k} - f, \phi \rangle| \geq \epsilon\}) \rightarrow 0$$

wenn $N \rightarrow +\infty$

(2) die Sequenz $F_{N:j}$ von Randverteilungen von F_N (d.h. $F_{N:j}$ ist das Bild von F_N unter der Projektion $(x_1, \dots, x_N) \mapsto (x_1, \dots, x_j)$) erfüllt

$$F_{N:j} \rightarrow f^{\otimes j} \text{ schwach-*, wenn } N \rightarrow +\infty$$

Beweis. Wir folgern zuerst (2) aus (1):

Aus (1) folgt

$$E^{F_N} |\langle \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x_k} - f, \phi \rangle|^j \rightarrow 0 \text{ für alle } j \geq 1$$

wenn $N \rightarrow +\infty$.

E^{F_N} bezeichnet hier den Erwartungswert bzgl. der Verteilung F_N .

Für $j = 1$ gilt somit (durch die Symmetrie von F_N)

$$\begin{aligned} E^{F_N} \langle \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x_k} - f, \phi \rangle &= E^{F_N} \langle \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x_k}, \phi \rangle - \langle f, \phi \rangle \\ &= E^{F_N} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x_k}(\phi) \right) - \langle f, \phi \rangle \\ &= E^{F_N} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi(x_k) \right) - \langle f, \phi \rangle \\ &= E^{F_{N:1}} \phi - \langle f, \phi \rangle \\ &= E^{F_{N:1}} \phi - E^f \phi \end{aligned}$$

Somit gilt nach der Voraussetzung

$$E^{F_{N:1}} \phi - E^f \phi \rightarrow 0$$

wenn $N \rightarrow +\infty$, und daher

$$F_{N:1} \rightarrow f \text{ schwach-* wenn } N \rightarrow +\infty$$

Für $j = 2$ gilt

$$E^{F_N} \left(\langle \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x_k} - f, \phi \rangle \right)^2 = E^{F_N} \left(\langle \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi(x_k) \rangle^2 - 2 \langle f, \phi \rangle E^{F_N} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi(x_k) \right) + \langle f, \phi \rangle^2 \right)$$

Ebenfalls gilt (mit der Symmetrie von F_N)

$$\begin{aligned} E^{F_N} \left(\langle \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi(x_k) \rangle^2 \right) &= \frac{1}{N^2} E^{F_N} \sum_{k=1}^N \phi(x_k)^2 + \frac{1}{N^2} E^{F_N} \sum_{1 \leq k \neq l \leq N} \phi(x_k) \phi(x_l) \\ &= \frac{1}{N} E^{F_{N:1}} \phi^2 + \frac{N(N-1)}{N^2} E^{F_{N:2}} \phi^{\otimes 2} \end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned}
E^{F_N} \left(\left\langle \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x_k} - f, \phi \right\rangle \right)^2 &= \frac{N(N-1)}{N^2} E^{F_{N:2}} \phi^{\otimes 2} - 2 \langle f, \phi \rangle E^{F_{N:1}} \phi \\
&+ \langle f, \phi \rangle^2 + \frac{1}{N} E^{F_{N:1}} \phi^2 \tag{3.13} \\
&\rightarrow 0 \text{ wenn } N \rightarrow +\infty, \text{ nach Voraussetzung}
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$E^{F_{N:1}} \phi \rightarrow \langle f, \phi \rangle, \text{ wenn } N \rightarrow +\infty$$

und

$$E^{F_{N:2}} \phi^{\otimes 2} \rightarrow \langle f, \phi \rangle^2, \text{ wenn } N \rightarrow +\infty$$

und somit

$$F_{N:2} \rightarrow f^{\otimes 2} \text{ schwach-*, wenn } N \rightarrow +\infty$$

Ebenso verfährt man für j mit $j \geq 3$.

Nun nehmen wir an, (2) gilt für $j = 1, 2$. Dann folgt mit der Tschebyscheff-Ungleichung ([Bauer (2001)])

$$\begin{aligned}
F_N(\{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid \left| \left\langle \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x_k} - f, \phi \right\rangle \right| \geq \epsilon\}) \\
\leq \frac{1}{\epsilon^2} E^{F_N} \left\langle \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x_k} - f, \phi \right\rangle^2
\end{aligned}$$

Es folgt mit (3.13)

$$\begin{aligned}
&F_N(\{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid \left| \left\langle \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x_k} - f, \phi \right\rangle \right| \geq \epsilon\}) \\
&\leq \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{N(N-1)}{N^2} E^{F_{N:2}} \phi^{\otimes 2} - 2 \langle f, \phi \rangle E^{F_{N:1}} \phi + \langle f, \phi \rangle^2 + \frac{1}{N} E^{F_{N:1}} \phi^2 \right)
\end{aligned}$$

Sei nun $\epsilon \gg 0$ fest, dann erhalten wir (1) mit $N \rightarrow +\infty$, da

$$E^{F_{N:1}} \phi \rightarrow \langle f, \phi \rangle, \quad E^{F_{N:2}} \phi^{\otimes 2} \rightarrow \langle f, \phi \rangle^2$$

wenn $N \rightarrow +\infty$.

□

Definition 3.1.6. Eine Folge $F_N \in \mathcal{M}^1(X^N)$, die die äquivalenten Aussagen in Lemma 3.1.5 erfüllt, heißt *chaotisch*.

Ein einfaches Beispiel für eine chaotische Folge ist $F_N = f^{\otimes N}$. Ist nun $X = \mathbb{R}$, so kann man Lemma 3.1.5 folgendermaßen verfeinern:

$\Omega := \mathbb{R}^{N^*}$ sei der Raum der Folgen $(a_n)_{n \geq 1}$, wobei a_n Werte in \mathbb{R} annimmt, versehen mit der σ -Algebra, die durch Zylinder-Mengen erzeugt wird (d.h. Mengen der Form $\prod_{n \geq 1} B_n$, mit B_n Borelmenge in \mathbb{R} für alle $n \geq 1$ und $B_n = \mathbb{R}$ für fast alle (bis auf endlich viele) n). Das unendliche Tensorprodukt $F_\infty = f^{\otimes N^*}$ definiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω mit dieser σ -Algebra.

Lemma 3.1.7. Für F_∞ -fast-alle $a = (a_1, a_2, \dots) \in \Omega$ konvergiert die empirische Verteilung

$$f_{N,a} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{a_k} \rightarrow f \text{ schwach-* auf } \mathbb{R}$$

In dem speziellen Fall $F_\infty = f^{\otimes N^*}$, den wir hier betrachten, kann man Aussage (1) in Lemma 3.1.5 umformen zu

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} F_\infty(\{a \in \Omega \mid |\langle f_{N,a} - f, \phi \rangle| \gg \epsilon\}) = 0$$

für alle $\epsilon \gg 0$.

Das heißt für alle $\phi \in C_c(\mathbb{R})$

$$\langle f_{N,a}, \phi \rangle \rightarrow \langle f, \phi \rangle \text{ in } (F_\infty\text{-})\text{Verteilung, wenn } N \rightarrow +\infty$$

und Lemma 3.1.7 verstärkt diese Aussage zu

$$\langle f_{N,a}, \phi \rangle \rightarrow \langle f, \phi \rangle \text{ } F_\infty\text{-fast-sicher, wenn } N \rightarrow +\infty$$

Beweis. (von Lemma 3.1.7)

Sei $\phi \in C_c(\mathbb{R})$, $Y_n(a) = \phi(a_n)$.

$(Y_n)_{n \geq 1}$ sind somit unabhängig und identisch verteilt (unter f).

Dann folgt mit dem starken Gesetz der großen Zahlen

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n(a) \rightarrow E^{F_\infty}(Y_n) = \langle f, \phi \rangle \text{ } F_\infty\text{-fast-sicher auf } \Omega, \text{ wenn } N \rightarrow +\infty$$

Es folgt das Lemma mit $\phi(a_n) := \delta_{a_n}$.

□

Betrachten wir nun erneut das System

$$\dot{x}_k(t, X_N^0) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N G'(x_k(t, X_N^0) - x_l(t, X_N^0))$$

$$x_k(0, X_N^0) = x_k^0, \quad k = 1, \dots, N$$

mit $X_N^0 = (x_1^0, \dots, x_N^0)$ und Lösung $X_N(t, X_N^0) = (x_1(t, X_N^0), \dots, x_N(t, X_N^0))$

Es sei

$$f_{N, X_N^0}(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x_k(t, X_N^0)}$$

Bei gegebenem $f^0 \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ bezeichnen wir mit F_N das Bild von $(f^0)^{\otimes N}$ unter der Abbildung $X_N^0 \mapsto X_N(t, X_N^0)$, d.h.

$$F_N(t) = X_N(t, \cdot) \diamond (f^0)^{\otimes N}$$

Theorem 3.1.8. G' sei Lipschitz-stetig auf \mathbb{R} , $f^0 \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$. Dann gilt für jedes $n \geq 1$ und jedes $t \gg 0$

$$F_{N:n}(t) \rightarrow f(t)^{\otimes n} \text{ schwach-*, wenn } N \rightarrow +\infty$$

wobei $f(t)$ die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\partial_t f + \operatorname{div}_x((G' \star_x f)f) = 0, \quad f|_{t=0} = f^0 \quad (3.14)$$

ist.

Beweis. Sei $\phi \in C_c(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} E^{F_N(t)} \langle f_{N, X_N^0}, \phi \rangle &= E^{F_N(0)} \langle f_{N, X_N^0}(t), \phi \rangle \\ &= E^{F_\infty} \langle f_{N, \cdot}(t), \phi \rangle \end{aligned}$$

(unter Verwendung der Notationen aus Lemma 3.1.7). Mit Lemma 3.1.7 folgt nun für F_∞ -fast-alle $a \in \Omega$

$$f_{N,a}(0) \rightarrow f^0 \text{ schwach-*, wenn } N \rightarrow +\infty$$

Nun sagt Theorem 3.1.2 aus, dass ebenfalls

$$f_{N,a}(t) \rightarrow f(t) \text{ schwach-*, wenn } N \rightarrow +\infty$$

für F_∞ -fast-alle $a \in \Omega$ und alle $t \gg 0$ gilt.

Also

$$\langle f_{N,a}(t), \phi \rangle \rightarrow \langle f(t), \phi \rangle \text{ schwach-*, wenn } N \rightarrow +\infty$$

für F_∞ -fast-alle $a \in \Omega$ und alle $t \gg 0$.

Andererseits gilt

$$|\langle f_{N,a}(t), \phi \rangle| \leq \|\phi\|_{L^\infty}$$

so, dass man mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz ([Elstrodt (2005)])

$$E^{F_N(t)} \langle f_{N, X_N^0}, \phi \rangle = E^{F^\infty} \langle f_{N, \cdot}, \phi \rangle \rightarrow \langle f(t), \phi \rangle$$

wenn $N \rightarrow +\infty$ für alle $t \gg 0$ erhält. Nun gilt (mit der Tschebyscheff-Ungleichung)

$$\begin{aligned} F_N(t) (\{ (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid | \langle f_{N, X_N^0} - f(t), \phi \rangle | \geq \epsilon \}) \\ \leq \frac{1}{\epsilon^2} E^{F_N(t)} \langle f_{N, X_N^0} - f(t), \phi \rangle^2 \\ = \frac{1}{\epsilon^2} E^{F_N(t)} \langle f_{N, X_N^0}, \phi \rangle^2 - 2 \langle f(t), \phi \rangle E^{F_N(t)} \langle f_{N, X_N^0}, \phi \rangle + \langle f(t), \phi \rangle^2 \\ \rightarrow 0 \end{aligned}$$

wenn $N \rightarrow +\infty$, für alle $t \gg 0$. Somit ist Aussage (1) in Lemma (1.5) erfüllt und es muss auch die äquivalente zweite Aussage des Lemmas gelten. □

Dies bedeutet für unser Modell:

Wenn ρ_N die Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_N = -\frac{1}{N} \sum_{(i,j)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda g(x_j - x_i) \rho_N) \\ \rho_N(0) = (f^0)^{\otimes N} \end{aligned}$$

ist, mit $f^0 \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$, dann ist $\rho_N(t)$ für jedes $t \gg 0$ eine chaotische Folge und die Randverteilungen von $\rho_N(t)$ erfüllen

$$\rho_{N:n}(t) \rightarrow f(t)^{\otimes n} \text{ schwach-*, wenn } N \rightarrow +\infty$$

für jedes $t \gg 0$, wobei f die Lösung von

$$\partial_t f + \operatorname{div}_x ((\lambda g \star_x f) f) = 0$$

ist.

3.2 Das heterogene Modell

3.2.1 Erweiterung des homogenen Modells auf den heterogenen Fall

Im Folgenden betrachten wir eine Erweiterung des vorangegangenen homogenen Modells. Die Agenten verhalten sich nun nicht mehr einheitlich, sondern richten ihre Akzeptanz für die Meinung eines anderen Agenten sowohl nach der eigenen Zugehörigkeit zu einer bestimmten Gruppe, als auch nach der Gruppe, der der andere Agent angehört. Die Agenten innerhalb einer Gruppe verhalten sich homogen.

Es gibt nun zwei verschiedene Gruppen von Agenten, Gruppe a und Gruppe b, deren Verhalten sich nach den folgenden Regeln richtet:

$$x_i = \tilde{x}_i + \lambda_a g_a(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j) dt, \text{ wenn } i \text{ und } j \text{ in } a$$

$$x_i = \tilde{x}_i + \lambda_b g_b(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j) dt, \text{ wenn } i \text{ und } j \text{ in } b$$

$$x_i = \tilde{x}_i + \lambda_{ab} g_{ab}(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j) dt, \text{ wenn } i \text{ und } j \text{ in verschiedenen Gruppen}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} & \rho(x_1, \dots, x_N, t + dt) dx_1 \dots dx_N \\ &= \sum_{i,j=1}^{N_a} P(i \text{ trifft } j) \rho(x_1, \dots, x_i - \lambda_a dt g_a(x_i - x_j), \dots, x_j - \lambda_a dt g_a(x_j - x_i), \dots, x_N, t) \\ & \quad dx_1 \dots (dx_i - \lambda_a dt g'_a(x_i - x_j)(dx_i - dx_j)) \dots (dx_j - \lambda_a dt g'_a(x_j - x_i)(dx_j - dx_i)) \dots dx_N \\ &+ \sum_{i,j=N_a+1}^N P(i \text{ trifft } j) \rho(x_1, \dots, x_i - \lambda_b dt g_b(x_i - x_j), \dots, x_j - \lambda_b dt g_b(x_j - x_i), \dots, x_N, t) \\ & \quad dx_1 \dots (dx_i - \lambda_b dt g'_b(x_i - x_j)(dx_i - dx_j)) \dots (dx_j - \lambda_b dt g'_b(x_j - x_i)(dx_j - dx_i)) \dots dx_N \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{N_a} \sum_{j=N_a+1}^N P(i \text{ trifft } j) \rho(x_1, \dots, x_i - \lambda_{ab} dt g_{ab}(x_i - x_j), \dots, x_j - \lambda_{ab} dt g_{ab}(x_j - x_i), \dots, x_N, t) \\ & \quad dx_1 \dots (dx_i - \lambda_{ab} dt g'_{ab}(x_i - x_j)(dx_i - dx_j)) \dots (dx_j - \lambda_{ab} dt g'_{ab}(x_j - x_i)(dx_j - dx_i)) \dots dx_N \end{aligned}$$

Nach einigen Taylorentwicklungen (wie beim homogenen Modell) erhält man so

$$\begin{aligned} & (\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt) dx_1 \dots dx_N \\ &= \frac{1}{N(N-1)} \left(\sum_{i,j=1}^{N_a} \left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \lambda_a dt g_a(x_i - x_j) - \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \lambda_a dt g_a(x_j - x_i) \right) \right. \\ & \quad \left. (dx_1 \dots (dx_i - \lambda_a dt g'_a(x_i - x_j)(dx_i - dx_j)) \dots (dx_j - \lambda_a dt g'_a(x_j - x_i)(dx_j - dx_i)) \dots dx_N) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i,j=N_a+1}^N \left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \lambda_b dt g_b(x_i - x_j) - \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \lambda_b dt g_b(x_j - x_i) \right) \\
& (dx_1 \dots (dx_i - \lambda_b dt g'_b(x_i - x_j)(dx_i - dx_j)) \dots (dx_j - \lambda_b dt g'_b(x_j - x_i)(dx_j - dx_i)) \dots dx_N) \\
& + 2 \sum_{i=1}^{N_a} \sum_{j=N_a+1}^N \left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \lambda_{ab} dt g_{ab}(x_i - x_j) - \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \lambda_{ab} dt g_{ab}(x_j - x_i) \right) \\
& (dx_1 \dots (dx_i - \lambda_{ab} dt g'_{ab}(x_i - x_j)(dx_i - dx_j)) \dots (dx_j - \lambda_{ab} dt g'_{ab}(x_j - x_i)(dx_j - dx_i)) \dots dx_N)
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} dx_1 \dots dx_N & = -\lambda_a \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i,j=1}^{N_a} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (g_a(x_i - x_j) \rho) \right) dx_1 \dots dx_N \\
& - \lambda_b \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i,j=N_a+1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (g_b(x_i - x_j) \rho) \right) dx_1 \dots dx_N \\
& - \lambda_{ab} \frac{4}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N_a} \sum_{j=N_a+1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (g_{ab}(x_i - x_j) \rho) \right) dx_1 \dots dx_N \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Sei nun

$$f_{aN}(x, t) = \int \dots \int \rho(x, x_2, \dots, x_N, t) dx_2 \dots dx_N$$

$$f_{bN}(x, t) = \int \dots \int \rho(x_1, \dots, x_{N_a}, x, x_{N_a+2}, \dots, x_N, t) dx_1 \dots dx_{N_a} dx_{N_a+2} \dots dx_N$$

und somit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{aN}}{\partial t} & = \int \dots \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dx_2 \dots dx_N \\
\frac{\partial f_{bN}}{\partial t} & = \int \dots \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dx_1 \dots dx_{N_a} dx_{N_a+2} \dots dx_N
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{aN}}{\partial t} & = \int \dots \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dx_2 \dots dx_N \\
& = -\lambda_a \frac{2}{N(N-1)} \int \dots \int \sum_{i,j=1}^{N_a} \frac{\partial}{\partial x_i} (g_a(x_i - x_j) \rho) dx_2 \dots dx_N \\
& - \lambda_{ab} \frac{4}{N(N-1)} \int \dots \int \sum_{i=1}^{N_a} \sum_{j=N_a+1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (g_{ab}(x_i - x_j) \rho) dx_2 \dots dx_N \\
& = -\lambda_a \frac{2}{N(N-1)} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sum_{j=1}^{N_a} \left(\int g_a(x_1 - x_j) \left(\int \dots \int \rho dx_2 \dots dx_N \right) dx_j \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\lambda_{ab} \frac{4}{N(N-1)} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sum_{j=N_a+1}^N \left(\int g_{ab}(x_1 - x_j) \left(\int \dots \int \rho dx_2 \dots dx_N \right) dx_j \right) \right) \\
& = -\lambda_a \frac{2}{N(N-1)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{j=1}^{N_a} \left(\int g_a(x - x_j) f_{aN}(x_j, t) dx_j f_{aN}(x, t) \right) \right) \\
& - \lambda_{ab} \frac{4}{N(N-1)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{j=N_a+1}^N \left(\int g_{ab}(x - x_j) f_{bN}(x_j, t) dx_j f_{aN}(x, t) \right) \right) \\
& = -\lambda_a \frac{2N_a}{N(N-1)} \frac{\partial}{\partial x} \left((g_a \star f_{aN}) f_{aN} \right) - \lambda_{ab} \frac{4(N-N_a)}{N(N-1)} \frac{\partial}{\partial x} \left((g_{ab} \star f_{bN}) f_{aN} \right)
\end{aligned}$$

Es folgt ebenso für f_{bN}

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{bN}}{\partial t} & = \int \dots \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dx_1 \dots dx_{N_a} dx_{N_a+2} \dots dx_N \\
& = -\lambda_b \frac{2}{N(N-1)} \int \dots \int \sum_{i,j=N_a+1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (g_b(x_i - x_j) \rho) dx_1 \dots dx_{N_a} dx_{N_a+2} \dots dx_N \\
& - \lambda_{ab} \frac{4}{N(N-1)} \int \dots \int \sum_{i=1}^{N_a} \sum_{j=N_a+1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (g_{ab}(x_i - x_j) \rho) dx_1 \dots dx_{N_a} dx_{N_a+2} \dots dx_N \\
& = -\lambda_b \frac{2}{N(N-1)} \frac{\partial}{\partial x_{N_a+1}} \left(\sum_{j=N_a+1}^N \left(\int g_b(x_{N_a+1} - x_j) \left(\int \dots \int \rho dx_1 \dots dx_{N_a} dx_{N_a+2} \dots dx_N \right) dx_j \right) \right) \\
& - \lambda_{ab} \frac{4}{N(N-1)} \frac{\partial}{\partial x_{N_a+1}} \left(\sum_{j=1}^{N_a} \left(\int g_{ab}(x_{N_a+1} - x_j) \left(\int \dots \int \rho dx_1 \dots dx_{N_a} dx_{N_a+2} \dots dx_N \right) dx_j \right) \right) \\
& = -\lambda_b \frac{2}{N(N-1)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{j=N_a+1}^N \left(\int g_b(x - x_j) f_{bN}(x_j, t) dx_j f_{bN}(x, t) \right) \right) \\
& - \lambda_{ab} \frac{4}{N(N-1)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{j=1}^{N_a} \left(\int g_{ab}(x - x_j) f_{aN}(x_j, t) dx_j f_{bN}(x, t) \right) \right) \\
& = -\lambda_b \frac{2(N-N_a)}{N(N-1)} \frac{\partial}{\partial x} \left((g_b \star f_{bN}) f_{bN} \right) - \lambda_{ab} \frac{4N_a}{N(N-1)} \frac{\partial}{\partial x} \left((g_{ab} \star f_{aN}) f_{bN} \right)
\end{aligned}$$

Für $N \rightarrow +\infty$, $N_a \rightarrow +\infty$ und $\frac{N_a}{N} \rightarrow \text{const}$ und $t_{neu} := t/N$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_a}{\partial t_{neu}} &= \left(-\lambda_a \frac{2N_a}{N(N-1)} \frac{\partial}{\partial x}((g_a \star f_a)f_a) - \lambda_{ab} \frac{4(N-N_a)}{N(N-1)} \frac{\partial}{\partial x}((g_{ab} \star f_b)f_a)\right) * N \\ &= -\lambda_a \frac{2N_a}{N-1} \frac{\partial}{\partial x}((g_a \star f_a)f_a) - \lambda_{ab} \frac{4(N-N_a)}{N-1} \frac{\partial}{\partial x}((g_{ab} \star f_b)f_a) \\ &= -\lambda_a c_1 \frac{\partial}{\partial x}((g_a \star f_a)f_a) - \lambda_{ab} c_2 \frac{\partial}{\partial x}((g_{ab} \star f_b)f_a) \end{aligned}$$

mit $c_1, c_2 = \text{const.}$

Ebenso:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_b}{\partial t_{neu}} &= -\lambda_b \frac{2(N-N_a)}{N-1} \frac{\partial}{\partial x}((g_b \star f_b)f_b) - \lambda_{ab} \frac{4N_a}{N-1} \frac{\partial}{\partial x}((g_{ab} \star f_a)f_b) \\ &= -\lambda_b c_3 \frac{\partial}{\partial x}((g_b \star f_b)f_b) - \lambda_{ab} c_4 \frac{\partial}{\partial x}((g_{ab} \star f_a)f_b) \end{aligned}$$

mit $c_3, c_4 = \text{const.}$

Nun soll Folgendes gezeigt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\lambda_a \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i,j=1}^{N_a} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(g_a(x_i - x_j)\rho)\right) \\ &\quad - \lambda_b \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i,j=N_a+1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(g_b(x_i - x_j)\rho)\right) \\ &\quad - \lambda_{ab} \frac{4}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N_a} \sum_{j=N_a+1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(g_{ab}(x_i - x_j)\rho)\right) \end{aligned}$$

konvergiert für $N \rightarrow \infty$ gegen

$$f_{aN}(x_1, t) \dots f_{aN}(x_{N_a}, t) f_{bN}(x_{N_a+1}, t) \dots f_{bN}(x_N, t)$$

3.2.2 Das heterogene Modell im Einzel-Agenten-Phasenraum

Nun betrachten wir unser Modell im Einzel-Agenten-Phasenraum. Hierfür berechnen wir aus den obigen Gleichungen mit Hilfe der Methode der Charakteristiken ([Eck, Garcke, Knabner (2008)]) die folgenden Differentialgleichungen:

für x in Gruppe a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t_{neu}}(t, d, f_a^0) &= \lambda_a c_1 \int g_a(x(t, d, f_a^0) - x(t, \hat{d}, f_a^0)) f_a^0(d\hat{d}) \\ &\quad + \lambda_{ab} c_2 \int g_{ab}(x(t, d, f_a^0) - y(t, \hat{d}, f_b^0)) f_b^0(d\hat{d}) \end{aligned}$$

$$x(0, d, f_a^0) = d$$

für y in Gruppe b :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t_{neu}}(t, e, f_b^0) &= \lambda_b c_3 \int g_b(y(t, e, f_b^0) - y(t, \hat{e}, f_b^0)) f_b^0(d\hat{e}) \\ &\quad + \lambda_{ab} c_4 \int g_{ab}(y(t, e, f_b^0) - x(t, \hat{e}, f_a^0)) f_a^0(d\hat{e}) \end{aligned}$$

$$y(0, e, f_b^0) = e$$

Es folgt

$$\begin{aligned} x(t, d, f_a^0) &= d + \lambda_a c_1 \int_0^{t_{neu}} \int g_a(x(s, d, f_a^0) - x(s, \hat{d}, f_a^0)) f_a^0(d\hat{d}) ds_{neu} \\ &\quad + \lambda_{ab} c_2 \int_0^{t_{neu}} \int g_{ab}(x(s, d, f_a^0) - y(s, \hat{d}, f_b^0)) f_b^0(d\hat{d}) ds_{neu} \\ &= d + \lambda_a c_1 \int_0^{t_{neu}} \int \int g_a(x(s, d, f_a^0) - x(s, \hat{d}, f_a^0)) P_a^0(d\hat{d}\hat{d}\hat{f}) ds_{neu} \\ &\quad + \lambda_{ab} c_2 \int_0^{t_{neu}} \int \int g_{ab}(x(s, d, f_a^0) - y(s, \hat{d}, f_b^0)) P_b^0(d\hat{d}\hat{d}\hat{f}) ds_{neu} \end{aligned}$$

mit $P_a(t) \in E(f_a(t), \mu_a(t))$, $P_b(t) \in E(f_b(t), \mu_b(t))$.

und

$$\begin{aligned} x(t, f, \mu_a^0) &= f + \lambda_a c_1 \int_0^{t_{neu}} \int \int g_a(x(s, f, \mu_a^0) - x(s, \hat{f}, \mu_a^0)) P_a^0(d\hat{d}\hat{d}\hat{f}) ds_{neu} \\ &\quad + \lambda_{ab} c_2 \int_0^{t_{neu}} \int \int g_{ab}(x(s, f, \mu_a^0) - y(s, \hat{f}, \mu_b^0)) P_b^0(d\hat{d}\hat{d}\hat{f}) ds_{neu} \end{aligned}$$

mit $x(0, f, \mu_a^0) = f$

Ebenso:

$$\begin{aligned} y(t, e, f_b^0) &= e + \lambda_b c_3 \int_0^{t_{neu}} \int \int g_b(y(s, e, f_b^0) - y(s, \hat{e}, f_b^0)) P_b^0(d\hat{e}\hat{d}\hat{g}) ds_{neu} \\ &\quad + \lambda_{ab} c_4 \int_0^{t_{neu}} \int \int g_{ab}(y(s, e, f_b^0) - x(s, \hat{e}, f_a^0)) P_a^0(d\hat{e}\hat{d}\hat{g}) ds_{neu} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} y(t, g, \mu_b^0) &= g + \lambda_b c_3 \int_0^{t_{neu}} \int \int g_b(y(s, g, \mu_b^0) - y(s, \hat{g}, \mu_b^0)) P_b^0(d\hat{e}\hat{d}\hat{g}) ds_{neu} \\ &\quad + \lambda_{ab} c_4 \int_0^{t_{neu}} \int \int g_{ab}(y(s, g, \mu_b^0) - x(s, \hat{g}, \mu_a^0)) P_a^0(d\hat{e}\hat{d}\hat{g}) ds_{neu} \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
|x(t, d, f_a^0) - x(t, f, \mu_a^0)| &\leq |d - f| + \lambda_a c_1 \|g_a\|_L \int_0^{t_{neu}} |x(s, d, f_a^0) - x(s, f, \mu_a^0)| ds_{neu} \\
&+ \lambda_a c_1 \|g_a\|_L \int_0^{t_{neu}} \int \int |x(s, \hat{d}, f_a^0) - x(s, \hat{f}, \mu_a^0)| P_a^0(d\hat{d}d\hat{f}) ds_{neu} \\
&+ \lambda_{ab} c_2 \|g_{ab}\|_L \int_0^{t_{neu}} |x(s, d, f_a^0) - x(s, f, \mu_a^0)| ds_{neu} \\
&+ \lambda_{ab} c_2 \|g_{ab}\|_L \int_0^{t_{neu}} \int \int |y(s, \hat{d}, f_b^0) - y(s, \hat{f}, \mu_b^0)| P_b^0(d\hat{d}d\hat{f}) ds_{neu}
\end{aligned}$$

Wir integrieren über $P_a^0(d\hat{d}d\hat{f})$:

$$\begin{aligned}
\int \int |x(t, d, f_a^0) - x(t, f, \mu_a^0)| P_a^0(d\hat{d}d\hat{f}) &\leq \phi_a(0) + 2(\lambda_a c_1 \|g_a\|_L) \int_0^{t_{neu}} \phi_a(s) ds_{neu} \\
+ \lambda_{ab} c_2 \|g_{ab}\|_L \left(\int_0^{t_{neu}} \phi_a(s) ds_{neu} + \int_0^{t_{neu}} \int \int |y(s, \hat{d}, f_b^0) - y(s, \hat{f}, \mu_b^0)| P_b^0(d\hat{d}d\hat{f}) ds_{neu} \right)
\end{aligned}$$

mit

$$\phi_a(t) := \int \int |x(t, d, f_a^0) - x(t, f, \mu_a^0)| P_a^0(d\hat{d}d\hat{f})$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned}
\phi_a(t) &\leq \phi_a(0) + (2(\lambda_a c_1 \|g_a\|_L) + (\lambda_{ab} c_2 \|g_{ab}\|_L)) \int_0^{t_{neu}} \phi_a(s) ds_{neu} \\
&+ \lambda_{ab} c_2 \|g_{ab}\|_L \int_0^{t_{neu}} \phi_b(s) ds_{neu}
\end{aligned}$$

Ebenso

$$\begin{aligned}
\phi_b(t) &\leq \phi_b(0) + (2(\lambda_b c_3 \|g_b\|_L) + (\lambda_{ab} c_4 \|g_{ab}\|_L)) \int_0^{t_{neu}} \phi_b(s) ds_{neu} \\
&+ \lambda_{ab} c_4 \|g_{ab}\|_L \int_0^{t_{neu}} \phi_a(s) ds_{neu}
\end{aligned}$$

Es ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
\phi_a(t) + \phi_b(t) &\leq \phi_a(0) + (2(\lambda_a c_1 \|g_a\|_L) + (\lambda_{ab} c_2 \|g_{ab}\|_L) + (\lambda_{ab} c_4 \|g_{ab}\|_L)) \int_0^{t_{neu}} \phi_a(s) ds_{neu} \\
&+ \phi_b(0) + (2(\lambda_b c_3 \|g_b\|_L) + (\lambda_{ab} c_4 \|g_{ab}\|_L) + (\lambda_{ab} c_2 \|g_{ab}\|_L)) \int_0^{t_{neu}} \phi_b(s) ds_{neu}
\end{aligned}$$

Also folgt mit der Gronwall-Ungleichung

$$\begin{aligned} \phi_a(t) + \phi_b(t) &\leq \phi_a(0)e^{(2(\lambda_a c_1 \|g_a\|_L) + (\lambda_{ab} c_2 \|g_{ab}\|_L) + (\lambda_{ab} c_4 \|g_{ab}\|_L))t} \\ &\quad + \phi_b(0)e^{(2(\lambda_b c_3 \|g_b\|_L) + (\lambda_{ab} c_4 \|g_{ab}\|_L) + (\lambda_{ab} c_2 \|g_{ab}\|_L))t} \end{aligned}$$

Limesbildung ergibt

$$\begin{aligned} W(f_a(t), \mu_a(t)) + W(f_b(t), \mu_b(t)) &\leq W(f_a^0, \mu_a^0)e^{(2(\lambda_a c_1 \|g_a\|_L) + (\lambda_{ab} c_2 \|g_{ab}\|_L) + (\lambda_{ab} c_4 \|g_{ab}\|_L))t} \\ &\quad + W(f_b^0, \mu_b^0)e^{(2(\lambda_b c_3 \|g_b\|_L) + (\lambda_{ab} c_4 \|g_{ab}\|_L) + (\lambda_{ab} c_2 \|g_{ab}\|_L))t} \end{aligned}$$

Theorem 3.2.1. $X_N^{0,N}$ sei eine Sequenz von Anfangskonfigurationen für N Agenten, so dass

$$\frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} \delta_{(X_N^{0,N})_k} \rightarrow f_a^0 \text{ in } w\text{-*}\text{-}\mathcal{M}(\mathbb{R})$$

und

$$\frac{1}{N - N_a} \sum_{k=N_a+1}^N \delta_{(X_N^{0,N})_k} \rightarrow f_b^0 \text{ in } w\text{-*}\text{-}\mathcal{M}(\mathbb{R})$$

Dann gilt

$$\frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} \delta_{x_k(t, X_N^{0,N})} \rightarrow f_a(t, \cdot) \text{ in } w\text{-*}\text{-}\mathcal{M}(\mathbb{R})$$

und

$$\frac{1}{N - N_a} \sum_{k=N_a+1}^N \delta_{x_k(t, X_N^{0,N})} \rightarrow f_b(t, \cdot) \text{ in } w\text{-*}\text{-}\mathcal{M}(\mathbb{R})$$

gleichmäßig auf kompakten Untermengen von \mathbb{R}_+ .

Beweis. Sei $\nu_a^{0,N}$ der Form

$$\nu_a^{0,N} = \frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} \delta_{x_k^{0,N}}$$

und

$$\nu_b^{0,N} = \frac{1}{N - N_a} \sum_{k=N_a+1}^N \delta_{x_k^{0,N}}$$

dann ist $x_k^N(t, x_k^{0,N}, \nu_a^{0,N})$ für alle $k = 1, \dots, N_a$ die Lösung des ODE-Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}_k^N(t, x_k^{0,N}, \nu_a^{0,N}) &= \lambda_a \frac{2N_a}{N(N-1)} \frac{1}{N_a} \sum_{l=1}^{N_a} g_a(x_k^N(t, x_k^{0,N}, \nu_a^{0,N}) - x_l^N(t, x_l^{0,N}, \nu_a^{0,N})) \\ &\quad + \lambda_{ab} \frac{4(N - N_a)}{N(N-1)} \frac{1}{N - N_a} \sum_{l=N_a+1}^N g_{ab}(x_k^N(t, x_k^{0,N}, \nu_a^{0,N}) - x_l^N(t, x_l^{0,N}, \nu_b^{0,N})) \end{aligned}$$

$$x_k^N(0, x_k^{0,N}, \nu_a^{0,N}) = x_k^{0,N}$$

und $x_k^N(t, x_k^{0,N}, \nu_b^{0,N})$ für alle $k = N_a + 1, \dots, N$ die Lösung des ODE-Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}_k^N(t, x_k^{0,N}, \nu_b^{0,N}) &= \lambda_b \frac{2(N - N_a)}{N(N - 1)} \frac{1}{N - N_a} \sum_{l=N_a+1}^N g_b(x_k^N(t, x_k^{0,N}, \nu_b^{0,N}) - x_l^N(t, x_l^{0,N}, \nu_b^{0,N})) \\ &\quad + \lambda_{ab} \frac{4N_a}{N(N - 1)} \frac{1}{N_a} \sum_{l=1}^{N_a} g_{ab}(x_k^N(t, x_k^{0,N}, \nu_b^{0,N}) - x_l^N(t, x_l^{0,N}, \nu_a^{0,N})) \\ x_k^N(0, x_k^{0,N}, \nu_b^{0,N}) &= x_k^{0,N} \end{aligned}$$

Es sei

$$\nu_a^N(t) = \frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} \delta_{x_k^N(t, x_k^{0,N}, \nu_a^{0,N})}$$

und

$$\nu_b^N(t) = \frac{1}{N - N_a} \sum_{k=N_a+1}^N \delta_{x_k^N(t, x_k^{0,N}, \nu_b^{0,N})}$$

Dann folgt

$$W(f_a(t), \nu_a^N(t)) + W(f_b(t), \nu_b^N(t)) \rightarrow 0 \text{ für alle } t \geq 0, \text{ wenn } N \rightarrow +\infty$$

wenn $W(f_a^0, \nu_a^{0,N}) + W(f_b^0, \nu_b^{0,N}) \rightarrow 0$.

Da die Wasserstein-Distanz die schwach-*-Topologie auf $\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ metrisiert, ist somit das Theorem bewiesen. □

3.2.3 Der Zusammenhang der Wahrscheinlichkeitsmaße im Einzel-Agenten-Phasenraum und im N-Agenten-Phasenraum

Nun möchten wir auch hier das Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem 1-Agent-Phasenraum mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem N-Agenten-Phasenraum miteinander in Verbindung bringen ([Golse (2003)]).

Lemma 3.2.2. *Seien $f_a, f_b \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ und sei F_{N_a} für alle $N_a \geq 1$, $F_{N_a} \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^{N_a})$ (bzw. $F_{(N-N_a)}$ für alle $(N - N_a) \geq 1$, $F_{(N-N_a)} \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^{N-N_a})$) symmetrisch in allen Variablen, d.h. F_{N_a} (bzw. $F_{(N-N_a)}$) ist invariant unter der Transformation*

$$(x_1, \dots, x_{N_a}) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N_a)})$$

bzw.

$$(x_{N_a+1}, \dots, x_N) \mapsto (x_{\sigma(N_a+1)}, \dots, x_{\sigma(N)})$$

für alle $\sigma \in S$.

Dann sind die zwei folgenden Aussagen äquivalent:

(1) für alle $\epsilon \geq 0$ und jedes $\phi \in C_c(\mathbb{R})$ gilt

$$F_{N_a}(\{(x_1, \dots, x_{N_a}) \in \mathbb{R}^{N_a} \mid |\langle \frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} \delta_{x_k} - f_a, \phi \rangle| \geq \epsilon\}) \rightarrow 0$$

wenn $N \rightarrow +\infty, N_a \rightarrow +\infty, N_a/N \rightarrow \text{const}$

bzw.

$$F_{(N-N_a)}(\{(x_{N_a+1}, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{(N-N_a)} \mid |\langle \frac{1}{N-N_a} \sum_{k=N_a+1}^N \delta_{x_k} - f_b, \phi \rangle| \geq \epsilon\}) \rightarrow 0$$

wenn $(N \rightarrow +\infty, N_a \rightarrow +\infty, N_a/N \rightarrow \text{const})$

(2) die Sequenz $F_{N_a:j}$ von Randverteilungen von F_{N_a} (dh $F_{N_a:j}$ ist das Bild von F_{N_a} unter der Projektion $(x_1, \dots, x_{N_a}) \mapsto (x_1, \dots, x_j)$) erfüllt

$$F_{N_a:j} \rightarrow f_a^{\otimes j} \text{ schwach-*, wenn } N \rightarrow +\infty, N_a \rightarrow +\infty, N_a/N \rightarrow \text{const}$$

bzw. die Sequenz $F_{(N-N_a):j}$ von Randverteilungen von $F_{(N-N_a)}$ erfüllt

$$F_{(N-N_a):j} \rightarrow f_b^{\otimes j} \text{ schwach-*, wenn } N \rightarrow +\infty, N_a \rightarrow +\infty, N_a/N \rightarrow \text{const}$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass aus (1) die Aussage (2) folgt.

Aus (1) folgt

$$E^{F_{N_a}} |\langle \frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} \delta_{x_k} - f_a, \phi \rangle|^j \rightarrow 0 \text{ für alle } j \geq 1$$

wenn $N \rightarrow +\infty, N_a \rightarrow +\infty, N_a/N \rightarrow \text{const}$. Für $j = 1$ gilt (durch die Symmetrie von F_{N_a})

$$\begin{aligned} E^{F_{N_a}} \langle \frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} \delta_{x_k} - f_a, \phi \rangle &= E^{F_{N_a}} \langle \frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} \delta_{x_k}, \phi \rangle - \langle f_a, \phi \rangle \\ &= E^{F_{N_a}} \left(\frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} \delta_{x_k}(\phi) \right) - \langle f_a, \phi \rangle \\ &= E^{F_{N_a}} \left(\frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} \phi(x_k) \right) - \langle f_a, \phi \rangle \\ &= E^{F_{N_a:1}} \phi - \langle f_a, \phi \rangle \\ &= E^{F_{N_a:1}} \phi - E^{f_a} \phi \end{aligned}$$

Somit gilt nach (1)

$$E^{F_{N_a:1}} \phi - E^{f_a} \phi \rightarrow 0$$

wenn $N \rightarrow +\infty$, $N_a \rightarrow +\infty$, $N_a/N \rightarrow const$, und daher

$$F_{N_a:1} \rightarrow f_a \text{ schwach-* wenn } N \rightarrow +\infty, N_a \rightarrow +\infty, N_a/N \rightarrow const$$

($F_{(N-N_a):1}$ folgt analog)

Für $j = 2$ gilt

$$E^{F_{N_a}} \left(\left\langle \frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} \delta_{x_k} - f_a, \phi \right\rangle \right)^2 = E^{F_{N_a}} \left(\left\langle \frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} \phi(x_k) \right\rangle \right)^2 - 2 \langle f_a, \phi \rangle E^{F_{N_a}} \left(\frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} \phi(x_k) \right) + \langle f_a, \phi \rangle^2$$

Aus der Symmetrie von F_N folgt ebenfalls

$$\begin{aligned} E^{F_{N_a}} \left(\left\langle \frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} \phi(x_k) \right\rangle \right)^2 &= \frac{1}{(N_a)^2} E^{F_{N_a}} \sum_{k=1}^{N_a} \phi(x_k)^2 + \frac{1}{(N_a)^2} E^{F_{N_a}} \sum_{1 \leq k \neq l \leq N_a} \phi(x_k) \phi(x_l) \\ &= \frac{1}{N_a} E^{F_{N_a:1}} \phi^2 + \frac{N_a(N_a-1)}{(N_a)^2} E^{F_{N_a:2}} \phi^{\otimes 2} \end{aligned}$$

Somit gilt nach der Voraussetzung

$$\begin{aligned} E^{F_{N_a}} \left(\left\langle \frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} \delta_{x_k} - f_a, \phi \right\rangle \right)^2 &= \frac{N_a(N_a-1)}{(N_a)^2} E^{F_{N_a:2}} \phi^{\otimes 2} - 2 \langle f_a, \phi \rangle E^{F_{N_a:1}} \phi \\ &\quad + \langle f_a, \phi \rangle^2 + \frac{1}{N_a} E^{F_{N_a:1}} \phi^2 \tag{3.16} \\ &\rightarrow 0 \text{ wenn } N \rightarrow +\infty, N_a \rightarrow +\infty, N_a/N \rightarrow const \end{aligned}$$

Damit folgt

$$E^{F_{N_a:1}} \phi \rightarrow \langle f_a, \phi \rangle, \text{ wenn } N \rightarrow +\infty, N_a \rightarrow +\infty, N_a/N \rightarrow const$$

und

$$E^{F_{N_a:2}} \phi^{\otimes 2} \rightarrow \langle f_a, \phi \rangle^2, \text{ wenn } N \rightarrow +\infty, N_a \rightarrow +\infty, N_a/N \rightarrow const$$

und somit

$$F_{N_a:2} \rightarrow f_a^{\otimes 2} \text{ schwach-*}, \text{ wenn } N \rightarrow +\infty, N_a \rightarrow +\infty, N_a/N \rightarrow const$$

($F_{N-N_a} : 2$ folgt analog) Ebenso verfährt man für j mit $j \geq 3$.

Nun folgern wir (1) aus (2).

Nun sei angenommen, (2) gilt für $j = 1, 2$. Dann folgt mit der Tschebyscheff-Ungleichung

([Bauer (2001)])

$$\begin{aligned} F_{N_a}(\{(x_1, \dots, x_{N_a}) \in \mathbb{R}^{N_a} \mid \langle \frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} \delta_{x_k} - f_a, \phi \rangle \mid \geq \epsilon\}) \\ \leq \frac{1}{\epsilon^2} E^{F_{N_a}} \langle \frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} \delta_{x_k} - f_a, \phi \rangle^2 \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} F_{N_a}(\{(x_1, \dots, x_{N_a}) \in \mathbb{R}^{N_a} \mid \langle \frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} \delta_{x_k} - f_a, \phi \rangle \mid \geq \epsilon\}) \\ \leq \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{N_a(N_a - 1)}{(N_a)^2} E^{F_{N_a:2}} \phi^{\otimes 2} - 2 \langle f_a, \phi \rangle E^{F_{N_a:1}} \phi + \langle f_a, \phi \rangle^2 + \frac{1}{N_a} E^{F_{N_a:1}} \phi^2 \right) \end{aligned}$$

Sei nun $\epsilon \gg 0$ fest, dann erhalten wir Aussage (1) mit $N \rightarrow +\infty$, $N_a \rightarrow +\infty$, $N_a/N \rightarrow const$, da

$$E^{F_{N_a:1}} \phi \rightarrow \langle f_a, \phi \rangle, \quad E^{F_{N_a:2}} \phi^{\otimes 2} \rightarrow \langle f_a, \phi \rangle^2$$

wenn $N \rightarrow +\infty$, $N_a \rightarrow +\infty$, $N_a/N \rightarrow const$.

(Für $F_{(N-N_a)}$ folgt dies analog)

□

Betrachten wir nun das Konvergenzverhalten der empirischen Verteilung.

Lemma 3.2.3. Für F_a^∞ -fast-alle (bzw. F_b^∞ -fast-alle) $\alpha = (\alpha_1, \dots) \in \Omega$ konvergiert die empirische Verteilung

$$\frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} \delta_{\alpha_k} \rightarrow f_a \text{ schwach-* auf } \mathbb{R}$$

bzw.

$$\frac{1}{N - N_a} \sum_{k=N_a+1}^N \delta_{\alpha_k} \rightarrow f_b \text{ schwach-* auf } \mathbb{R}$$

(F_a^∞ bezeichnet das unendliche Tensorprodukt $F_a^\infty = f_a^{\otimes N^*}$, F_b^∞ analog).

Beweis. Sei $\phi \in C_c(\mathbb{R})$, $Y_n(\alpha) = \phi(\alpha_n)$.

$(Y_n)_{n=1, \dots, N_a}$ sind somit unabhängig und identisch verteilt (unter f_a).

Dann folgt mit dem starken Gesetz der großen Zahlen

$$\frac{1}{N_a} \sum_{n=1}^{N_a} Y_n(\alpha) \rightarrow E^{F_a^\infty}(Y_n) = \langle f_a, \phi \rangle \text{ } F_a^\infty\text{-fast-sicher auf } \Omega, \text{ wenn } N \rightarrow +\infty, N_a \rightarrow +\infty, N_a/N \rightarrow const$$

Es folgt das Lemma mit $\phi(\alpha_n) := \delta_{\alpha_n}$.

□

Betrachten wir nun erneut das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_k(t, X_N^0) &= \lambda_a \frac{2N_a}{N(N-1)} \frac{1}{N_a} \sum_{l=1}^{N_a} g_a(x_k(t, X_N^0) - x_l(t, X_N^0)) \\ &+ \lambda_{ab} \frac{2(N-N_a)}{N(N-1)} \frac{1}{N-N_a} \sum_{l=N_a+1}^N g_{ab}(x_k(t, X_N^0) - x_l(t, X_N^0)) \\ &x_k(0, X_N^0) = x_k^0, \quad k = 1, \dots, N_a \\ \dot{x}_k(t, X_N^0) &= \lambda_b \frac{2(N-N_a)}{N(N-1)} \frac{1}{N-N_a} \sum_{l=N_a+1}^N g_b(x_k(t, X_N^0) - x_l(t, X_N^0)) \\ &+ \lambda_{ab} \frac{2N_a}{N(N-1)} \frac{1}{N_a} \sum_{l=1}^{N_a} g_{ab}(x_k(t, X_N^0) - x_l(t, X_N^0)) \\ &x_k(0, X_N^0) = x_k^0, \quad k = N_a + 1, \dots, N\end{aligned}$$

mit $X_N^0 = (x_1^0, \dots, x_N^0)$ und Lösung $X_N(t, X_N^0) = (x_1(t, X_N^0), \dots, x_N(t, X_N^0))$

Es sei

$$\begin{aligned}f_{a, X_N^0}(t) &= \frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} \delta_{x_k(t, X_N^0)} \\ f_{b, X_N^0}(t) &= \frac{1}{N-N_a} \sum_{k=N_a+1}^N \delta_{x_k(t, X_N^0)}\end{aligned}$$

Bei gegebenem $f_a^0 \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ (bzw. $f_b^0 \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$) bezeichnen wir mit F_{N_a} (bzw. $F_{(N-N_a)}$) das Bild von $(f_a^0)^{\otimes N_a}$ (bzw. $(f_b^0)^{\otimes (N-N_a)}$) unter der Abbildung $X_N^0 \mapsto X_N(t, X_N^0)$, d.h.

$$F_{N_a}(t) = X_N(t, \cdot) \diamond (f_a^0)^{\otimes N_a}$$

bzw.

$$F_{(N-N_a)}(t) = X_N(t, \cdot) \diamond (f_b^0)^{\otimes (N-N_a)}$$

Theorem 3.2.4. *Es seien g_a, g_b, g_{ab} Lipschitz-stetig auf \mathbb{R} , $f_a^0, f_b^0 \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$.*

Dann gilt für jedes $n \geq 1$ und jedes $t \gg 0$

$$F_{N_a:n}(t) \rightarrow f_a(t)^{\otimes n} \text{ schwach-*, wenn } N \rightarrow +\infty, N_a \rightarrow +\infty, N_a/N \rightarrow \text{const}$$

$$F_{(N-N_a):n}(t) \rightarrow f_b(t)^{\otimes n} \text{ schwach-*, wenn } N \rightarrow +\infty, N_a \rightarrow +\infty, N_a/N \rightarrow \text{const}$$

wobei $f_a(t)$ bzw. $f_b(t)$ die Lösung der PDE

$$\frac{\partial}{\partial t_{\text{neu}}} f_a + \lambda_a c_1 \frac{\partial}{\partial x} ((g_a \star f_a) f_a) + \lambda_{ab} c_2 \frac{\partial}{\partial x} ((g_{ab} \star f_b) f_a) = 0, \quad f|_0 = f^0 \quad (3.17)$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial t_{\text{neu}}} f_b + \lambda_b c_3 \frac{\partial}{\partial x} ((g_b \star f_b) f_b) + \lambda_{ab} c_4 \frac{\partial}{\partial x} ((g_{ab} \star f_a) f_b) = 0, \quad f|_0 = f^0 \quad (3.18)$$

ist (siehe [Golse (2003)]).

Beweis. Sei $\phi \in C_c(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} E^{F_{N_a}(t)} \langle f_{a, X_N^0}, \phi \rangle &= E^{F_{N_a}(0)} \langle f_{a, X_N^0}(t), \phi \rangle \\ &= E^{F_a^\infty} \langle f_{a, \cdot}(t), \phi \rangle \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} E^{F_{(N-N_a)}(t)} \langle f_{b, X_N^0}, \phi \rangle &= E^{F_{(N-N_a)}(0)} \langle f_{b, X_N^0}(t), \phi \rangle \\ &= E^{F_b^\infty} \langle f_{b, \cdot}(t), \phi \rangle \end{aligned}$$

Mit Lemma 3.2.3 folgt nun für F_a^∞ -fast-alle $\alpha \in \Omega$

$$\frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} \delta_{\alpha_k^0} \rightarrow f_a^0 \text{ schwach-*, wenn } N \rightarrow +\infty, N_a \rightarrow +\infty, N_a/N \rightarrow \text{const}$$

und für F_b^∞ -fast-alle $\alpha \in \Omega$

$$\frac{1}{N - N_a} \sum_{k=N_a+1}^N \delta_{\alpha_k^0} \rightarrow f_b^0 \text{ schwach-*, wenn } N \rightarrow +\infty, N_a \rightarrow +\infty, N_a/N \rightarrow \text{const}$$

Es folgt aus Theorem 3.2.1

$$\frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} \delta_{\alpha_k(t)} \rightarrow f_a(t) \text{ schwach-*, wenn } N \rightarrow +\infty, N_a \rightarrow +\infty, N_a/N \rightarrow \text{const}$$

für F_a^∞ -fast-alle $\alpha \in \Omega$ und alle $t \gg 0$

und

$$\frac{1}{N - N_a} \sum_{k=N_a+1}^N \delta_{\alpha_k(t)} \rightarrow f_b(t) \text{ schwach-*, wenn } N \rightarrow +\infty, N_a \rightarrow +\infty, N_a/N \rightarrow \text{const}$$

für F_b^∞ -fast-alle $\alpha \in \Omega$ und alle $t \gg 0$

Also

$$\left\langle \frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} \delta_{\alpha_k(t)}, \phi \right\rangle \rightarrow \langle f_a(t), \phi \rangle \text{ schwach-*, wenn } N \rightarrow +\infty, N_a \rightarrow +\infty, N_a/N \rightarrow \text{const}$$

für F_a^∞ -fast-alle $\alpha \in \Omega$ und alle $t \gg 0$.

Es gilt aber ebenfalls

$$\left| \left\langle \frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} \delta_{\alpha_k(t)}, \phi \right\rangle \right| \leq \|\phi\|_{L^\infty}$$

so, dass mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz ([Elstrodt (2005)]) gilt

$$E^{F_{N_a}(t)} \langle f_{a, X_N^0}, \phi \rangle = E^{F_a^\infty} \langle f_{a, \cdot}(t), \phi \rangle \rightarrow \langle f_a(t), \phi \rangle$$

wenn $N \rightarrow +\infty$, $N_a \rightarrow +\infty$, $N_a/N \rightarrow \text{const}$, für alle $t \gg 0$. Nun gilt (mit der Tschebyscheff-Ungleichung)

$$\begin{aligned} F_{N_a}(t) (\{x_1, \dots, x_{N_a}\} \in \mathbb{R}^{N_a} \mid |\langle f_{a, X_N^0}^0 - f_a(t), \phi \rangle| \geq \epsilon\}) &\leq \frac{1}{\epsilon^2} E^{F_{N_a}(t)} \langle f_{a, X_N^0}^0 - f_a(t), \phi \rangle^2 \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} E^{F_{N_a}(t)} \langle f_{a, X_N^0}^0, \phi \rangle^2 - 2 \langle f_a(t), \phi \rangle E^{F_{N_a}(t)} \langle f_{a, X_N^0}^0, \phi \rangle + \langle f_a(t), \phi \rangle^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

wenn $N \rightarrow +\infty$, $N_a \rightarrow +\infty$, $N_a/N \rightarrow \text{const}$, für alle $t \gg 0$. Somit ist Aussage (1) in Lemma 3.2.2 erfüllt und es muss auch die äquivalente zweite Aussage des Lemmas gelten.

(Analog für f_b)

□

Die Aussage von Theorem (3.2.4) bedeutet für unser Modell:

Wenn ρ die Lösung der Gleichung (3.15) mit $\rho(0) = ((f_a^0)^{\otimes N_a}, (f_b^0)^{\otimes (N-N_a)})$ ist, $f_a^0, f_b^0 \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$, dann gilt für die Randverteilungen $\rho(t)_{N:n}$ mit $t > 0$ und $n > N_a$

$$\rho(t)_{N:n} \rightarrow f_a(x_1, t) \dots f_a(x_{N_a}, t) f_b(x_{N_a+1}, t) \dots f_b(x_n, t)$$

schwach-*, wenn $N \rightarrow +\infty$, $N_a \rightarrow +\infty$, $N_a/N \rightarrow \text{const}$, wobei f_a und f_b die Lösung von (3.17) bzw. (3.18) ist.

3.2.4 Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen

Es sei:

$$\begin{aligned} R_a(x) &:= f_a((-\infty, x]) \\ u_a(z) &:= R_a^{-1}(z) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid R_a(x) > z\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \hat{R}_a(x) &:= \mu_a((-\infty, x]) \\ \hat{u}_a(z) &:= \hat{R}_a^{-1}(z) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \hat{R}_a(x) > z\} \end{aligned}$$

$(u_b(z))$ analog)

Für die Meinung eines Agenten in Gruppe a bedeutet dies

$$\frac{\partial}{\partial t_{neu}} u_a(z, t) = \lambda_a c_1 \int g_a(u_a(z, t) - u_a(\zeta, t)) d\zeta + \lambda_{ab} c_2 \int g_{ab}(u_a(z, t) - u_b(\zeta, t)) d\zeta \quad (3.19)$$

und für Gruppe b gilt analog

$$\frac{\partial}{\partial t_{neu}} u_b(z, t) = \lambda_b c_3 \int g_b(u_b(z, t) - u_b(\zeta, t)) d\zeta + \lambda_{ab} c_4 \int g_{ab}(u_b(z, t) - u_a(\zeta, t)) d\zeta \quad (3.20)$$

Wir betrachten nun $u(z, t) := (u_a(z, t), u_b(z, t))$, $u(z, t) \in Lip_{loc}([0, +\infty), [0, 1])^2$.

Theorem 3.2.5. *Es gelte $g_a(s) = -g_a(-s)$ (analog für g_b, g_{ab}), $u^0 := u(0) \in L^p([0, 1])^2$.*

Dann existieren eindeutige Lösungen

$$u(t) \in L^p([0, 1])^2$$

der obigen Gleichungen (3.19) und (3.20).

Beweis. (unter Benutzung des Fixpunktsatzes von Banach ([Walter (2000)]) und der Gronwall-Ungleichung ([Aulbach (2004)]))

1. Zuerst zeigen wir die Existenz einer Lösung unter Verwendung des Fixpunktsatzes von Banach.

Es gilt

$$\begin{aligned} u(z, t) &= (u_a(z, t), u_b(z, t)) \\ &= (u_a^0 + \lambda_a c_1 \int_0^{t_{neu}} \int g_a(u_a(z, s) - u_a(\zeta, s)) d\zeta ds_{neu} \\ &\quad + \lambda_{ab} c_2 \int_0^{t_{neu}} \int g_{ab}(u_a(z, s) - u_b(\zeta, s)) d\zeta ds_{neu}, \\ &\quad u_b^0 + \lambda_b c_3 \int_0^{t_{neu}} \int g_b(u_b(z, s) - u_b(\zeta, s)) d\zeta ds_{neu} \\ &\quad + \lambda_{ab} c_4 \int_0^{t_{neu}} \int g_{ab}(u_b(z, s) - u_a(\zeta, s)) d\zeta ds_{neu}) \end{aligned}$$

(analog: $\hat{u}(z, t)$)

$$\begin{aligned}
\|u(z, t) - \hat{u}(z, t)\|_1 &\leq \|u_a^0 - \hat{u}_a^0\|_1 + \lambda_a c_1 \|g_a\|_L \int_0^{t_{neu}} \|u_a(z, s) - \hat{u}_a(z, s)\|_1 ds_{neu} \\
&\quad + \lambda_a c_1 \|g_a\|_L \int_0^{t_{neu}} \int \|u_a(\zeta, s) - \hat{u}_a(\zeta, s)\|_1 d\zeta ds_{neu} \\
&\quad + \lambda_{ab} c_2 \|g_{ab}\|_L \int_0^{t_{neu}} \|u_a(z, s) - \hat{u}_a(z, s)\|_1 ds_{neu} \\
&\quad + \lambda_{ab} c_2 \|g_{ab}\|_L \int_0^{t_{neu}} \int \|u_b(\zeta, s) - \hat{u}_b(\zeta, s)\|_1 d\zeta ds_{neu} \\
&\quad + \|u_b^0 - \hat{u}_b^0\|_1 + \lambda_b c_3 \|g_b\|_L \int_0^{t_{neu}} \|u_b(z, s) - \hat{u}_b(z, s)\|_1 ds_{neu} \\
&\quad + \lambda_b c_3 \|g_b\|_L \int_0^{t_{neu}} \int \|u_b(\zeta, s) - \hat{u}_b(\zeta, s)\|_1 d\zeta ds_{neu} \\
&\quad + \lambda_{ab} c_4 \|g_{ab}\|_L \int_0^{t_{neu}} \|u_b(z, s) - \hat{u}_b(z, s)\|_1 ds_{neu} \\
&\quad + \lambda_{ab} c_4 \|g_{ab}\|_L \int_0^{t_{neu}} \int \|u_a(\zeta, s) - \hat{u}_a(\zeta, s)\|_1 d\zeta ds_{neu}
\end{aligned}$$

Nun wird über z integriert:

$$\begin{aligned}
\int \|u(z, t) - \hat{u}(z, t)\|_1 dz &\leq \phi_a(0) + 2(\lambda_a c_1 \|g_a\|_L \int_0^{t_{neu}} \phi_a(s) ds_{neu}) \\
&\quad + \lambda_{ab} c_2 \|g_{ab}\|_L (\int_0^{t_{neu}} \phi_a(s) ds_{neu} + \int_0^{t_{neu}} \phi_b(s) ds_{neu}) \\
&\quad + \phi_b(0) + 2(\lambda_b c_3 \|g_b\|_L \int_0^{t_{neu}} \phi_b(s) ds_{neu}) \\
&\quad + \lambda_{ab} c_4 \|g_{ab}\|_L (\int_0^{t_{neu}} \phi_b(s) ds_{neu} + \int_0^{t_{neu}} \phi_a(s) ds_{neu})
\end{aligned}$$

mit

$$\phi_a(t) := \int \|u_a(z, t) - \hat{u}_a(z, t)\|_1 dz$$

($\phi_b(t)$ analog)

Es folgt

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \phi_a(t) + \phi_b(t) \\
&\leq \phi_a(0) + (2(\lambda_a c_1 \|g_a\|_L) + (\lambda_{ab} c_2 \|g_{ab}\|_L) + (\lambda_{ab} c_4 \|g_{ab}\|_L)) \int_0^{t_{neu}} \phi_a(s) ds_{neu}
\end{aligned}$$

$$+ \phi_b(0) + (2(\lambda_b c_3 \|g_b\|_L) + (\lambda_{ab} c_2 \|g_{ab}\|_L) + (\lambda_{ab} c_4 \|g_{ab}\|_L)) \int_0^{t_{neu}} \phi_b(s) ds_{neu}$$

Für ein festes $T > 0$ sei B_T nun der Banach-Raum $B_T := L^1([0, 1] \times [0, T])^2$. Es sei der Operator V definiert durch

$$\begin{aligned} (Vu)(z, t) &= (u_a^0 + \lambda_a c_1 \int_0^{t_{neu}} \int g_a(u_a(z, s) - u_a(\zeta, s)) d\zeta ds_{neu} \\ &\quad + \lambda_{ab} c_2 \int_0^{t_{neu}} \int g_{ab}(u_a(z, s) - u_b(\zeta, s)) d\zeta ds_{neu}, \\ u_b^0 + \lambda_b c_3 \int_0^{t_{neu}} \int g_b(u_b(z, s) - u_b(\zeta, s)) d\zeta ds_{neu} \\ &\quad + \lambda_{ab} c_4 \int_0^{t_{neu}} \int g_{ab}(u_b(z, s) - u_a(\zeta, s)) d\zeta ds_{neu}) \end{aligned}$$

Dann gilt für gegebenes $u, \hat{u} \in B_T$

$$\begin{aligned} |(Vu)(z, t) - (V\hat{u})(z, t)| &\leq T(2(\lambda_a c_1 \|g_a\|_L) + (\lambda_{ab} c_2 \|g_{ab}\|_L) + (\lambda_{ab} c_4 \|g_{ab}\|_L)) \|u_a - \hat{u}_a\|_1 \\ &\quad + T(2(\lambda_b c_3 \|g_b\|_L) + (\lambda_{ab} c_2 \|g_{ab}\|_L) + (\lambda_{ab} c_4 \|g_{ab}\|_L)) \|u_b - \hat{u}_b\|_1 \end{aligned}$$

Somit ist gezeigt, dass V Lipschitz-stetig auf B_T ist und mit dem Fixpunktsatz von Banach folgt, dass ein $u \in B_T$ existiert mit $(Tu)(z, t) = u(z, t)$ für $(z, t) \in [0, 1] \times [0, T]$.

2. Nun bleibt noch die Eindeutigkeit der Lösung zu zeigen.

Mit der Gronwall-Ungleichung ([Aulbach (2004)]) ergibt sich

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi_a(t) + \phi_b(t) \\ &\leq \phi_a(0) e^{(2(\lambda_a c_1 \|g_a\|_L) + (\lambda_{ab} c_2 \|g_{ab}\|_L) + (\lambda_{ab} c_4 \|g_{ab}\|_L)) * t} \\ &\quad + \phi_b(0) e^{(2(\lambda_b c_3 \|g_b\|_L) + (\lambda_{ab} c_2 \|g_{ab}\|_L) + (\lambda_{ab} c_4 \|g_{ab}\|_L)) * t} \end{aligned}$$

Durch Limesbildung erhält man (mit der Wasserstein-Metrik W und $f(t) := (f_a(t), f_b(t))$)

$$\begin{aligned} W(f(t), \mu(t)) &= W(f_a(t), \mu_a(t)) + W(f_b(t), \mu_b(t)) \\ &\leq W(f_a^0, \mu_a^0) e^{(2(\lambda_a c_1 \|g_a\|_L) + (\lambda_{ab} c_2 \|g_{ab}\|_L) + (\lambda_{ab} c_4 \|g_{ab}\|_L)) * t} \end{aligned}$$

$$+ W(f_b^0, \mu_b^0) e^{(2(\lambda_b c_3 \|g_b\|_L) + (\lambda_{ab} c_2 \|g_{ab}\|_L) + (\lambda_{ab} c_4 \|g_{ab}\|_L)) * t}$$

Somit gilt für $u, \mu \in L^1([0, T], [0, 1])^2$ für alle $T > 0$

$$\begin{aligned} W_1(f(t), \mu(t)) &= W_1(f_a(t), \mu_a(t)) + W_1(f_b(t), \mu_b(t)) \\ &\leq W_1(f_a^0, \mu_a^0) e^{(2(\lambda_a c_1 \|g_a\|_L) + (\lambda_{ab} c_2 \|g_{ab}\|_L) + (\lambda_{ab} c_4 \|g_{ab}\|_L)) * T} \\ &\quad + W_1(f_b^0, \mu_b^0) e^{(2(\lambda_b c_3 \|g_b\|_L) + (\lambda_{ab} c_4 \|g_{ab}\|_L) + (\lambda_{ab} c_2 \|g_{ab}\|_L)) * T} \end{aligned}$$

womit die Eindeutigkeit gezeigt ist.

□

Bemerkung 3.2.6. *Der obige Beweis gilt völlig analog für W_p mit $1 \leq p < \infty$ und mit dem Grenzwert $p \rightarrow \infty$ ist er auch auf W_∞ erweiterbar.*

Kapitel 4

Langzeitverhalten des heterogenen Modells

4.1 Voraussetzungen

Wir betrachten nun, wie sich das heterogene Modell über eine lange Zeitspanne hinweg verhält (siehe auch [Burger, di Francesco]). Dazu rufen wir uns zuerst noch einmal einige Formeln und Eigenschaften des Modells in Erinnerung.

Es sei G_a die Stammfunktion von $\lambda_a g_a$, analog definieren wir G_{ab}, G_{ba}, G_b als Stammfunktionen von g_{ab}, g_{ba} und g_b .

Es gilt:

1. $G_a \in W^{2,\infty}$, $G_a(-x) = G_a(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (da $\lambda_a g_a(x) = -\lambda_a g_a(-x)$ gilt), und somit gilt auch $\lambda_a g_a(0) = 0$.
2. $G'_a(x) = \lambda_a g_a(x) < 0$ für $x \in (\text{supp } G_a)^\circ \cap [0, +\infty)$
(A° bedeutet hier das Innere von A .)
3. G_a hat einziges Maximum $g_a^0 = G_a(0)$.

Selbiges gilt analog für G_b .

Für G_{ab} (bzw. G_{ba}) gibt es nun drei Fälle zu unterscheiden.

1. Für G_{ab} (bzw. G_{ba}) gelten ebenfalls die Eigenschaften 1-3 wie oben.
2. $G_{ab} \equiv 0$ (bzw. $G_{ba} \equiv 0$)
3. (a) $G_{ab} \in W^{2,\infty}$, $G_{ab}(-x) = G_{ab}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (da $\lambda_{ab} g_{ab}(x) = -\lambda_{ab} g_{ab}(-x)$ gilt), und somit gilt auch $\lambda_{ab} g_{ab}(0) = 0$.
(b) $G'_{ab}(x) = \lambda_{ab} g_{ab}(x) > 0$ für $x \in (\text{supp } G_{ab})^\circ \cap [0, +\infty)$
(A° bedeutet hier das Innere von A)

(c) G_{ab} hat einziges Minimum $g_{ab}^0 = G_{ab}(0)$.

(d)

$$\lambda_a c_1 \left| \int g_a(u_a(z) - u_a(\zeta)) d\zeta \right| > \lambda_{ab} c_2 \left| \int g_{ab}(u_a(z) - u_b(\zeta)) d\zeta \right|$$

d.h. die eigene Gruppe hat mehr Einfluss auf den einzelnen Agenten als die "gegnerische" Gruppe.

(Analog für G_{ba})

In den vorherigen Abschnitten haben wir Folgendes erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_a}{\partial t_{neu}} &= -\lambda_a c_1 \frac{\partial}{\partial x} ((g_a \star f_a) f_a) - \lambda_{ab} c_2 \frac{\partial}{\partial x} ((g_{ab} \star f_b) f_a) \\ \frac{\partial f_b}{\partial t_{neu}} &= -\lambda_b c_3 \frac{\partial}{\partial x} ((g_b \star f_b) f_b) - \lambda_{ba} c_4 \frac{\partial}{\partial x} ((g_{ba} \star f_a) f_b) \\ f &= (f_a, f_b) \end{aligned} \quad (4.1)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_{neu}} u_a(z, t) &= \lambda_a c_1 \int g_a(u_a(z, t) - u_a(\zeta, t)) d\zeta + \lambda_{ab} c_2 \int g_{ab}(u_a(z, t) - u_b(\zeta, t)) d\zeta \\ \frac{\partial}{\partial t_{neu}} u_b(z, t) &= \lambda_b c_3 \int g_b(u_b(z, t) - u_b(\zeta, t)) d\zeta + \lambda_{ba} c_4 \int g_{ba}(u_b(z, t) - u_a(\zeta, t)) d\zeta \\ u(z, t) &= (u_a(z, t), u_b(z, t)) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Man erwartet nun, dass sich bei der Betrachtung des Langzeitverhaltens die Lösungen f von (4.1) auf Dirac- δ -Verteilungen konzentrieren.

Wir werden im Folgenden zeigen, dass dies unter bestimmten Bedingungen auch eintritt.

Definition 4.1.1 (Radon-Maß). Das Radon-Maß δ_γ ist definiert durch

$$\langle \delta_\gamma, \varphi \rangle := \varphi(\gamma)$$

für alle $\phi \in C_b^0(\mathbb{R})$. ($C_b^0(\mathbb{R})$ bezeichnet den Raum der stetigen beschränkten Funktionen auf \mathbb{R} .)

Die zu δ_γ korrespondierende Verteilungsfunktion ist gegeben durch

$$R_\gamma = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \leq \gamma \\ 1, & \text{wenn } x > \gamma \end{cases}$$

Die zugehörige pseudo-inverse Funktion ist dann die konstante Funktion $v \equiv \gamma$.

Somit ist die asymptotische Konzentration der Dichte f auf eine Dirac- δ -Funktion äquivalent mit der Konvergenz des Pseudo-Inversen auf einen stationären Zustand.

4.2 Stationäre Zustände

In diesem Abschnitt betrachten wir die stationären Zustände des Modells. Zuerst beweisen wir die Existenz dieser stationären Lösungen, bevor wir diese dann näher charakterisieren.

Satz 4.2.1 (Existenz von stationären Zuständen). *Es sei $\gamma = (\gamma_a, \gamma_b) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $\gamma_a \equiv \gamma_b$. Dann ist jede konstante Funktion $v = (v_a, v_b) \equiv \gamma$ (bzw. $f = \delta_\gamma$) eine stationäre Lösung von (4.2) (bzw. (4.1)).*

Beweis. Wenn wir $v \equiv \gamma$ in die rechte Seite von (4.2) (a) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_{neu}} u_a(z, t) &= \lambda_a c_1 \int g_a(v_a(z) - v_a(\zeta)) d\zeta + \lambda_{ab} c_2 \int g_{ab}(v_a(z) - v_b(\zeta)) d\zeta \\ &= \lambda_a c_1 \int g_a(\gamma_a - \gamma_a) d\zeta + \lambda_{ab} c_2 \int g_{ab}(\gamma_a - \gamma_b) d\zeta \\ &= \lambda_a c_1 g_a(0) + \lambda_{ab} c_2 g_{ab}(0) \end{aligned}$$

(Ebenso $\frac{\partial}{\partial t_{neu}} u_b(z, t)$)

Da $g_a(0) = g_{ab}(0) = g_b(0) = 0$ gilt, ist v eine stationäre Lösung. □

Somit ist jede konstante Funktion $v = (\gamma_a, \gamma_b)$ mit $\gamma_a \equiv \gamma_b$ (und somit jede Dirac- δ -Funktion) eine stationäre Lösung.

Andererseits wird der Masseschwerpunkt erhalten, womit die einzige sinnvolle stationäre Lösung die ist, welche den gleichen Masseschwerpunkt hat wie die Anfangswerte.

Satz 4.2.2. G_a, G_{ab}, G_{ba}, G_b haben jeweils kompakten Träger. Dann existieren unendlich viele stationäre Lösungen von (4.1) der Form $f_a = f^\infty, f_b = f^\infty$

$$f^\infty := \frac{1}{2} [\delta_{-x_0} + \delta_{x_0}]$$

mit

$$x_0 > \frac{d^*}{2}, \text{ wobei } d^* = \max \left\{ \sup_{x \in \text{supp}(G_a)} |x|, \sup_{x \in \text{supp}(G_{ab})} |x|, \sup_{x \in \text{supp}(G_{ba})} |x|, \sup_{x \in \text{supp}(G_b)} |x| \right\}$$

Beweis. ϕ sei eine beliebige Testfunktion.

Wir wollen zeigen:

$$0 = -\lambda_a c_1 \int \phi'(x)(g_a \star f^\infty(x))df^\infty(x) - \lambda_{ab} c_2 \int \phi'(x)(g_{ab} \star f^\infty(x))df^\infty(x)$$

und

$$0 = -\lambda_b c_3 \int \phi'(x)(g_b \star f^\infty(x))df^\infty(x) - \lambda_{ba} c_4 \int \phi'(x)(g_{ba} \star f^\infty(x))df^\infty(x)$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} & -\lambda_a c_1 \int \phi'(x)(g_a \star f^\infty(x))df^\infty(x) - \lambda_{ab} c_2 \int \phi'(x)(g_{ab} \star f^\infty(x))df^\infty(x) \\ &= -\lambda_a c_1 \frac{1}{2} \int \phi'(x)(g_a(x-x_0) + g_a(x+x_0))df^\infty(x) \\ & - \lambda_{ab} c_2 \frac{1}{2} \int \phi'(x)(g_{ab}(x-x_0) + g_{ab}(x+x_0))df^\infty(x) = 0 \end{aligned}$$

aufgrund der Symmetrie von g_a, g_{ab} .

Die andere Gleichung berechnet sich analog. □

Theorem 4.2.3. Sei $\text{supp } G_a = [-d_a, d_a]$, $\text{supp } G_{ab} = [-d_{ab}, d_{ab}]$, $\text{supp } G_{ba} = [-d_{ba}, d_{ba}]$, $\text{supp } G_b = [-d_b, d_b]$, $d^* := \max\{d_a, d_{ab}, d_{ba}, d_b\}$.

Dann ist für jedes $N \in \mathbb{N}$ und jedes $(\gamma)_{j=1, \dots, N} \in \mathbb{R}^N$, sodass $\gamma_j + d^* < \gamma_{j+1}$, die Funktion $(v_a^{N_a}, v_b^{N-N_a})$ mit

$$v_a^{N_a} := \begin{cases} \gamma_j, & \text{wenn } \frac{j-1}{N_a} \leq z < \frac{j}{N_a} \\ \gamma_{N_a}, & \text{wenn } z = 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

$(v_b^{N-N_a}$ analog)

eine stationäre Lösung von (4.2).

Beweis. Sei $\frac{k-1}{N_a} \leq z < \frac{k}{N_a}$. Dann gilt

$$\lambda_a c_1 \int g_a(v_a(z) - v_a(\zeta))d\zeta + \lambda_{ab} c_2 \int g_{ab}(v_a(z) - v_b(\zeta))$$

$$= \lambda_a c_1 \frac{1}{N_a} \sum_{j=1}^{N_a} g_a(\gamma_k - \gamma_j) + \lambda_{ab} c_2 \frac{1}{N - N_a} \sum_{N_a+1}^N g_{ab}(\gamma_k - \gamma_j)$$

und $g_a(\gamma_k - \gamma_j) = 0$, da $g_a(0) = 0$ oder $|\gamma_k - \gamma_j| > d^*$, $g_{ab}(\gamma_k - \gamma_j) = 0$, da $g_{ab}(0) = 0$ oder $|\gamma_k - \gamma_j| > d^*$.

Der Fall

$$\lambda_b c_3 \int g_b(v_b(z) - v_b(\zeta)) d\zeta + \lambda_{ba} c_4 \int g_{ba}(v_b(z) - v_a(\zeta))$$

verläuft analog. □

Theorem 4.2.4. G_a, G_{ab}, G_{ba}, G_b erfüllen die Eigenschaften aus dem Abschnitt (4.1) und $\text{supp } G_a = [-d_a, d_a]$, $\text{supp } G_{ab} = [-d_{ab}, d_{ab}]$, $\text{supp } G_{ba} = [-d_{ba}, d_{ba}]$, $\text{supp } G_b = [-d_b, d_b]$, $d^* := \max\{d_a, d_{ab}, d_{ba}, d_b\}$. Dann sind alle beschränkten stationären Lösungen $v = (v_a, v_b)$ mit $v_a(z) - v_b(z) = 0$ oder $|v_a(z) - v_b(z)| > d^*$ für alle z von (4.2) der Form (4.3) mit

$$|\gamma_i - \gamma_j| > d^*$$

für alle i, j .

Beweis. Sei $q_a = \sup_{z \in [0,1]} v_a(z)$ (analog: q_b).

Die Funktion v_a ist monoton nicht-fallend und daher können wir für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ finden, sodass gilt

$$v_a(z) > q_a - \epsilon, \text{ wenn } z > 1 - \delta$$

Es folgt, da v_a stationär ist und nach Voraussetzung $v_a(z) - v_b(z) = 0$ oder $|v_a(z) - v_b(z)| > d^*$ für alle z gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_a c_1 \int_0^1 g_a(v_a(z) - v_a(\zeta)) d\zeta + \lambda_{ab} c_2 \int_0^1 g_{ab}(v_a(z) - v_b(\zeta)) d\zeta \\ &= \lambda_a c_1 \left(\int_0^{1-\delta} g_a(v_a(z) - v_a(\zeta)) d\zeta + \int_{1-\delta}^1 g_a(v_a(z) - v_a(\zeta)) d\zeta \right) \\ &\quad + \lambda_{ab} c_2 \left(\int_0^{1-\delta} g_{ab}(v_a(z) - v_b(\zeta)) d\zeta + \int_{1-\delta}^1 g_{ab}(v_a(z) - v_b(\zeta)) d\zeta \right) \end{aligned}$$

Wenn nun $\epsilon \rightarrow 0$, so erhalten wir

$$0 \leq \int_0^1 g_a(q_a - v_a(\zeta))$$

Nun gilt $g_a(q_a - v_a(\zeta))d\zeta \geq 0$ entweder für $v_a(\zeta) \geq q_a$ oder für $v(\zeta) \leq q_a - d_a$.

Sei

$$\bar{\zeta} = \sup\{\zeta \in [0, 1] | v_a(\zeta) \leq q_a - d_a\}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{\zeta}}^1 g_a(q_a - v_a(\zeta)) \\ &= \int_0^1 g_a(q_a - v_a(\zeta))d\zeta - \int_0^{\bar{\zeta}} g_a(q_a - v_a(\zeta))d\zeta \geq 0 \end{aligned}$$

Da $g_a(q_a - v_a(\zeta)) \leq 0$ für $\zeta \in [\bar{\zeta}, 1]$, folgt $v_a(\zeta) \equiv q_a$ im Intervall $[\bar{\zeta}, 1]$.

Das gleiche Argument benutzen wir jetzt für das Intervall $[0, \bar{\zeta}]$ (mit $\tilde{q}_a = \sup_{z \in [0, \bar{\zeta}]} v_a(z)$) um zu zeigen, dass v_a auf einem Intervall $[\tilde{\zeta}, \bar{\zeta}]$ konstant ist.

Der restliche Beweis folgt durch Iteration, wobei die Endlichkeit der Iterationsschritte durch die Bedingung $q_a - v_a(\bar{\zeta}) \geq d_a$ und v_a beschränkt gegeben ist.

Analog für $v_b(z)$.

□

Wir haben nun gezeigt, dass der passende stationäre Zustand durch den Masseschwerpunkt determiniert wird, da dieser erhalten bleibt.

Es gelte nun $\text{supp } G_a := [-d_a, d_a]$, $\text{supp } G_{ab} := [-d_{ab}, d_{ab}]$, $\text{supp } G_{ba} := [-d_{ba}, d_{ba}]$, $\text{supp } G_b := [-d_b, d_b]$, $d^* := \max\{d_a, d_{ab}, d_{ba}, d_b\}$, mit $d_a, d_{ab}, d_{ba}, d_b > 0$.

Wie in Theorem (4.2.3) gezeigt, gibt es in diesem Fall unendlich viele stationäre Lösungen von Gleichung (4.1). Die Wahl der richtigen stationären Lösung als typischer asymptotischer Zustand hängt von dem Masseschwerpunkt der Anfangswerte ab.

Wir werden nun zeigen, dass, wenn die Anfangsdaten aus mehreren zusammenhängenden Komponenten bestehen, die jeweils weiter als der Aktionsradius (die Vertrauensschranke) voneinander entfernt liegen, sich jede zusammenhängende Komponente unabhängig von den anderen verhält ([Burger, di Francesco]).

Genauer: Jede zusammenhängende Komponente wird gegen ein Dirac- δ , zentriert an ihrem ersten Moment, konvergieren.

Theorem 4.2.5. *Es sei $f = (f_a, f_b)$ die Lösung von (4.2) und G_a, G_{ab}, G_{ba}, G_b erfüllen jeweils*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{G'(x)}{x} = l < 0$$

mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu_0 = (\mu_a^0, \mu_b^0)$ mit kompaktem Träger als Anfangswert.

Sei

$$\text{supp } \mu_a^0 = \bigcup_{j=1}^n [a_j, b_j] \text{ mit } a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n$$

sowie

$$\text{supp } \mu_b^0 = \bigcup_{j=1}^{\tilde{n}} [c_j, d_j] \text{ mit } c_1 < d_1 < c_2 < d_2 < \dots < c_{\tilde{n}} < d_{\tilde{n}}$$

für feste $n, \tilde{n} \in \mathbb{N}$.

Des Weiteren gelte

$$b_j - a_j < d_a \text{ für alle } j \in \{1, \dots, n\} \text{ (bzw. } d_j - c_j < d_b \text{ für alle } j \in \{1, \dots, \tilde{n}\})$$

und

$$a_{j+1} - b_j > d_a \text{ für alle } j \in \{1, \dots, n-1\} \text{ (bzw. } c_{j+1} - d_j > d_b \text{ für alle } j \in \{1, \dots, \tilde{n}-1\})$$

Ebenfalls gelte

$$|a_j - d_i| > d^* \wedge |b_j - c_i| \text{ oder } a_j - c_i = 0 \wedge b_j - d_i = 0, \text{ für alle } i, j$$

Sei weiter

$$m_j^a := \int_{a_j}^{b_j} d\mu_a^0(x), \quad \gamma_j^a := \int_{a_j}^{b_j} x d\mu_a^0(x), \quad j = 1, \dots, n$$

$$m_j^b := \int_{c_j}^{d_j} d\mu_b^0(x), \quad \gamma_j^b := \int_{c_j}^{d_j} x d\mu_b^0(x), \quad j = 1, \dots, \tilde{n}$$

Dann gilt

$$W_p(\mu_a(t), \sum_{j=1}^n m_j^a \delta_{\gamma_j^a}) \rightarrow 0$$

und

$$W_p(\mu_b(t), \sum_{j=1}^{\tilde{n}} m_j^b \delta_{\gamma_j^b}) \rightarrow 0$$

für alle $p \in [2, +\infty]$, wenn $t \rightarrow +\infty$.

Beweis. 1. Wir betrachten zuerst den Fall mit einer zusammenhängenden Komponente, $\text{supp } f_a^0 = [a, b]$ mit $b - a < d_a$. Zur Vereinfachung der Schreibweise sei der Masseschwerpunkt $\gamma = 0$ (andernfalls betrachte später $W_p(\mu(t), \delta_\gamma) = \|u(t) - \gamma\|_{L^p([0,1])}$ mit $\gamma \neq 0$). Dann kann (mit Pseudo-Inversem u_a) gezeigt werden, dass $u_a(0, t)$ bzw. $u_a(1, t)$ nicht-fallend bzw. nicht-steigend (bzgl. t) sind. Hierzu berechnen wir

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t_{\text{neu}}} u_a(1, t) \\ &= \lambda_a c_1 \int g_a(u_a(1) - u_a(\zeta)) d\zeta + \lambda_{ab} c_2 \int g_{ab}(u_a(1) - u_b(\zeta)) d\zeta \leq 0 \end{aligned}$$

da $g_a(u_a(1) - u_a(\zeta)) \leq 0$ und $g_{ab}(u_a(1) - u_b(\zeta)) \leq 0$ (denn es gilt $g_a(z) \leq 0$ für $z \geq 0$ und $g_{ab}(z) \leq 0$ für $z \geq 0$) oder

$$\lambda_a c_1 \left| \int g_a(u_a(1) - u_a(\zeta)) d\zeta \right| > \lambda_{ab} c_2 \left| \int g_{ab}(u_a(1) - u_b(\zeta)) d\zeta \right|$$

Ebenso

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t_{\text{neu}}} u_a(0, t) \\ &= \lambda_a c_1 \int g_a(u_a(0) - u_a(\zeta)) d\zeta + \lambda_{ab} c_2 \int g_{ab}(u_a(0) - u_b(\zeta)) d\zeta \geq 0 \end{aligned}$$

da $g_a(u_a(0) - u_a(\zeta)) \geq 0$ und $g_{ab}(u_a(0) - u_b(\zeta)) \geq 0$ (denn es gilt $g_a(z) \geq 0$ für $z \leq 0$ und $g_{ab}(z) \geq 0$ für $z \leq 0$) oder

$$\lambda_a c_1 \left| \int g_a(u_a(0) - u_a(\zeta)) d\zeta \right| > \lambda_{ab} c_2 \left| \int g_{ab}(u_a(0) - u_b(\zeta)) d\zeta \right|$$

Somit folgt

$$u_a(1, t) - u_a(0, t) < d_a$$

für alle $t \geq 0$.

Mit den Eigenschaften aus Abschnitt (4.1) erhalten wir so

$$\frac{g_a(u_a(z) - u_a(\zeta))}{(u_a(z) - u_a(\zeta))} \leq -L \quad (4.4)$$

mit einem $L > 0$, wenn $z \geq \zeta$.

Mit

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t_{\text{neu}}} u_b(0, t) \\ &= \lambda_b c_3 \int g_b(u_b(0) - u_b(\zeta)) d\zeta + \lambda_{ba} c_4 \int g_{ba}(u_b(0) - u_a(\zeta)) d\zeta \geq 0 \end{aligned}$$

(da $g_b(u_b(0) - u_b(\zeta)) \geq 0$ und $g_{ba}(u_b(0) - u_a(\zeta)) \geq 0$)

folgt

$$u_a(1) - u_b(0) < d^*$$

und somit ebenfalls mit den Eigenschaften aus Abschnitt (4.1)

$$\frac{g_{ab}(u_a(z) - u_b(\zeta))}{(u_a(z) - u_b(\zeta))} \leq -L \quad (4.5)$$

mit einem $L > 0$, wenn $z \geq \zeta$.

Es folgt mit (4.4) und (4.5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_{neu}} \int_0^1 u_a(z, t)^{2k} dz &= 2k \int_0^1 u_a(z)^{2k-1} u_{t_{neu}} dz \\ &= 2k \int_0^1 \int_0^1 u_a(z)^{2k-1} (\lambda_a c_1 g_a(u_a(z) - u_a(\zeta)) + \lambda_{ab} c_2 g_{ab}(u_a(z) - u_b(\zeta))) dz d\zeta \\ &= 2k \int \int_{z \leq \zeta} u_a(z)^{2k-1} (\lambda_a c_1 g_a(u_a(z) - u_a(\zeta)) + \lambda_{ab} c_2 g_{ab}(u_a(z) - u_b(\zeta))) dz d\zeta \\ &\quad + 2k \int \int_{z \geq \zeta} u_a(z)^{2k-1} (\lambda_a c_1 g_a(u_a(z) - u_a(\zeta)) + \lambda_{ab} c_2 g_{ab}(u_a(z) - u_b(\zeta))) dz d\zeta \\ &= 2k \int \int_{z \geq \zeta} (u_a(z)^{2k-1} - u_a(\zeta)) (\lambda_a c_1 g_a(u_a(z) - u_a(\zeta)) + \lambda_{ab} c_2 g_{ab}(u_a(z) - u_b(\zeta))) dz d\zeta \\ &\leq -2kL \int \int_{z \geq \zeta} (u_a(z)^{2k-1} - u_a(\zeta)) (\lambda_a c_1 (u_a(z) - u_a(\zeta)) + \lambda_{ab} c_2 (u_a(z) - u_b(\zeta))) dz d\zeta \end{aligned} \quad (4.6)$$

Es folgt, da das erste Moment erhalten bleibt

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_a(z)^{2k} dz &\leq \int_0^1 \int_0^1 (u_a(z) - u_a(\zeta))^2 u_a(z)^{2k-2} dz d\zeta \\ (\text{da } \int_0^1 \int_0^1 (u_a(z) - u_a(\zeta))^2 u_a(z)^{2k-2} dz d\zeta \\ &= \int_0^1 \int_0^1 u_a(z) - 2u_a(z)^{2k-1} u_a(\zeta) + u_a(z)^{2k-1} u_a(\zeta)^2 dz d\zeta \end{aligned}$$

Es folgt, da das erste Moment erhalten bleibt und hier gleich 0 ist

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 u_a(z)^{2k} dz + \int_0^1 u_a(z)^{2k-2} dz \int_0^1 u_a(\zeta)^2 d\zeta \\ \text{mit } \int_0^1 u_a(z)^{2k-2} dz &\geq 0 \text{ und } \int_0^1 u_a(\zeta)^2 d\zeta \geq 0) \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (u_a(z) - u_a(\zeta))^2 (u_a(z)^{2k-2} + u_a(\zeta)^{2k-2}) dz d\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (u_a(z)u_a(\zeta))(u_a(z)^{2k-1} - u_a(\zeta)^{2k-1})dzd\zeta \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (u_a(z) - u_a(\zeta))(u_a(z)u_a(\zeta)^{2k-2} - u_a(z)^{2k-2}u_a(\zeta))dzd\zeta \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (u_a(z) - u_a(\zeta))(u_a(z)^{2k-1} - u_a(\zeta)^{2k-1})dzd\zeta \\
&+ 2\|u_a(0)\|_{L^\infty} \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 u_a(z)u_a(\zeta)^{2k-2} - u_a(z)^{2k-2}u_a(\zeta)dzd\zeta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (u_a(z)u_a(\zeta))(u_a(z)^{2k-1} - u_a(\zeta)^{2k-1})dzd\zeta
\end{aligned} \tag{4.7}$$

da hier der Masseschwerpunkt gleich 0 ist.

Nun impliziert (4.6) mit $k = 1$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t_{neu}} \int_0^1 u_a(z, t)^2 dz \\
&\leq -2L \int \int_{z \geq \zeta} (u_a(z) - u_a(\zeta))(\lambda_a c_1 (u_a(z) - u_a(\zeta)) + \lambda_{ab} c_2 (u_a(z) - u_b(\zeta))) dz d\zeta \\
&= -L\lambda_a c_1 \int_0^1 \int_0^1 (u_a(z) - u_a(\zeta))^2 - L\lambda_{ab} c_2 \int_0^1 \int_0^1 (u_a(z) - u_a(\zeta))(u_a(z) - u_b(\zeta)) dz d\zeta
\end{aligned}$$

Nun erhalt man mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ([Forster (2004)]) und der Erhaltung des ersten Moments

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t_{neu}} \int u_a(z, t)^2 dz \\
&\leq -L\lambda_a c_1 \left(\int \int (u_a(z) - u_a(\zeta))^2 dz d\zeta \right) - L\lambda_{ab} c_2 \int \int (u_a(z) - u_a(\zeta))(u_a(z) - u_b(\zeta)) dz d\zeta \\
&= -L\lambda_a c_1 \int \int u_a(z)^2 - 2u_a(z)u_a(\zeta) + u_a(\zeta)^2 dz d\zeta \\
&\quad - L\lambda_{ab} c_2 \int \int (u_a(z) - u_a(\zeta))(u_a(z) - u_b(\zeta)) dz d\zeta \\
&= -L2\lambda_a c_1 \int u_a(z, t)^2 dz \\
&\quad - L\lambda_{ab} c_2 \int \int (u_a(z) - u_a(\zeta))(u_a(z) - u_b(\zeta)) dz d\zeta
\end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_{neu}} \int u_b(z, t)^2 dz &= -L2\lambda_b c_3 \int u_b(z, t)^2 dz \\ &- L\lambda_{ba} c_4 \int \int (u_b(z) - u_b(\zeta))(u_b(z) - u_a(\zeta)) dz d\zeta \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t_{neu}} \int u_a(z, t)^2 dz + \frac{\partial}{\partial t_{neu}} \int u_b(z, t)^2 dz \\ &\leq -L2\lambda_a c_1 \int u_a(z, t)^2 dz - L2\lambda_b c_3 \int u_b(z, t)^2 dz \\ &- L\lambda_{ab} c_2 \int \int (u_a(z) - u_a(\zeta))(u_a(z) - u_b(\zeta)) dz d\zeta \\ &- L\lambda_{ba} c_4 \int \int (u_b(z) - u_b(\zeta))(u_b(z) - u_a(\zeta)) dz d\zeta \\ &= -L2\lambda_a c_1 \int u_a(z, t)^2 dz - L2\lambda_b c_3 \int u_b(z, t)^2 dz \\ &- L\lambda_{ab} c_2 \int \int (u_a(z)^2 - u_a(z)u_b(\zeta) - u_a(z)u_a(\zeta) + u_a(\zeta)u_b(\zeta)) dz d\zeta \\ &- L\lambda_{ba} c_4 \int \int (u_b(z)^2 - u_a(\zeta)u_b(z) - u_b(z)u_b(\zeta) + u_a(\zeta)u_b(\zeta)) dz d\zeta \\ &= -L2\lambda_a c_1 \int u_a(z, t)^2 dz - L2\lambda_b c_3 \int u_b(z, t)^2 dz \\ &- L\lambda_{ab} c_2 \left(\int u_a(z)^2 dz + \int u_a(\zeta)u_b(\zeta) d\zeta - \int \int u_a(z)u_b(\zeta) + u_a(z)u_a(\zeta) dz d\zeta \right) \\ &- L\lambda_{ba} c_4 \left(\int u_b(z)^2 dz + \int u_a(\zeta)u_b(\zeta) d\zeta - \int \int u_a(\zeta)u_b(z) + u_b(z)u_b(\zeta) dz d\zeta \right) \\ &= -(L2\lambda_a c_1 + L\lambda_{ab} c_2) \int u_a(z, t)^2 dz - (L2\lambda_b c_3 + L\lambda_{ba} c_4) \int u_b(z, t)^2 dz \\ &- L\lambda_{ab} c_2 \int u_a(\zeta)u_b(\zeta) d\zeta - L\lambda_{ba} c_4 \int u_a(\zeta)u_b(\zeta) d\zeta \\ &= -(L2\lambda_a c_1 + L\lambda_{ab} c_2) \int u_a(z, t)^2 dz - (L2\lambda_b c_3 + L\lambda_{ba} c_4) \int u_b(z, t)^2 dz \\ &- L(\lambda_{ab} c_2 + \lambda_{ba} c_4) \int u_a(\zeta)u_b(\zeta) d\zeta \\ &\leq -(L2\lambda_a c_1 + L\lambda_{ab} c_2) \int u_a(z, t)^2 dz - (L2\lambda_b c_3 + L\lambda_{ba} c_4) \int u_b(z, t)^2 dz \\ &- L(\lambda_{ab} c_2 + \lambda_{ba} c_4) \int u_a(\zeta) d\zeta \int u_b(\zeta) d\zeta \\ &= -(L2\lambda_a c_1 + L\lambda_{ab} c_2) \int u_a(z, t)^2 dz - (L2\lambda_b c_3 + L\lambda_{ba} c_4) \int u_b(z, t)^2 dz \end{aligned}$$

Nun integrieren wir über t_{neu}

$$\begin{aligned}
& \int u_a(z, t)^2 dz + \int u_b(z, t)^2 dz \\
& \leq \int u_a^0{}^2 dz - L(2\lambda_a c_1 + \lambda_{ab} c_2) \int_0^{t_{neu}} \int u_a(z, t)^2 dz dt_{neu} \\
& + \int u_b^0{}^2 dz - L(2\lambda_b c_3 + \lambda_{ba} c_4) \int_0^{t_{neu}} \int u_b(z, t)^2 dz dt_{neu} \\
& = \|u_a^0\|_2^2 + \|u_b^0\|_2^2 - L(2\lambda_a c_1 + \lambda_{ab} c_2) \int_0^{t_{neu}} \int u_a(z, t)^2 dz dt_{neu} \\
& - L(2\lambda_b c_3 + \lambda_{ba} c_4) \int_0^{t_{neu}} \int u_b(z, t)^2 dz dt_{neu}
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
& \int u_a(z, t)^2 dz \\
& \leq \|u_a^0\|_2^2 + \|u_b^0\|_2^2 - L(2\lambda_a c_1 + \lambda_{ab} c_2) \int_0^{t_{neu}} \int u_a(z, t)^2 dz dt_{neu} \\
& - L(2\lambda_b c_3 + \lambda_{ba} c_4) \int_0^{t_{neu}} \int u_b(z, t)^2 dz dt_{neu} - \int u_b(z, t)^2 dz
\end{aligned}$$

Und mit $u_b(z, t)^2 \geq 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \int u_a(z, t)^2 dz \\
& \leq \|u_a^0\|_2^2 + \|u_b^0\|_2^2 - L(2\lambda_a c_1 + \lambda_{ab} c_2) \int_0^{t_{neu}} \int u_a(z, t)^2 dz dt_{neu}
\end{aligned}$$

Mit der Gronwall-Ungleichung folgt

$$\int u_a(z, t)^2 dz \leq (\|u_a^0\|_2^2 + \|u_b^0\|_2^2) e^{-L(2\lambda_a c_1 + \lambda_{ab} c_2)t_{neu}}$$

und somit

$$\|u_a(t)\|_2 = W_2(\mu_a(t), \delta_0) \leq (\|u_a^0\|_2 + \|u_b^0\|_2) e^{-L(2\lambda_a c_1 + \lambda_{ab} c_2)t_{neu}}$$

Der Beweis für $\|u_b(t)\|_2$ verläuft analog.

2. Um die Notation zu vereinfachen, betrachten wir hier nur den Fall $n = 2$ (bzw. $\tilde{n} = 2$). Der allgemeine Fall $n \geq 2$ (bzw. $\tilde{n} \geq 2$) verläuft aber analog.

Sei nun $\text{supp } f_a^0 = [a, b] \cup [c, d]$ mit $b - a < d_a$, $d - c < d_a$, $c - b > d_a$, $\text{supp } f_b^0$ sei entsprechend wie im Theorem gefordert.

Sei

$$m_1^a := \int_a^b d\mu_a^0(x), \quad m_2^a := \int_c^d d\mu_a^0(x) = 1 - m_1^a$$

$$\gamma_1^a := \int_a^b x d\mu_a^0(x), \quad \gamma_2^a := \int_c^d x d\mu_a^0(x)$$

Ausgedrückt mit dem Pseudo-Inversen $u = (u_a, u_b)$ bedeutet dies

$$\frac{\partial}{\partial t_{\text{neu}}} u_a(z, t) = \lambda_a c_1 \int_0^{m_1} g_a(u_a(z) - u_a(\zeta)) d\zeta + \lambda_{ab} c_2 \int_0^{m_1} g_{ab}(u_a(z) - u_b(\zeta)) d\zeta \quad (4.8)$$

wenn $0 \leq z < m_1$

und

$$\frac{\partial}{\partial t_{\text{neu}}} u_a(z, t) = \lambda_a c_1 \int_{m_1}^1 g_a(u_a(z) - u_a(\zeta)) d\zeta + \lambda_{ab} c_2 \int_{m_1}^1 g_{ab}(u_a(z) - u_b(\zeta)) d\zeta \quad (4.9)$$

wenn $m_1 \leq z \leq 1$.

Genauer:

Wenn u_a^0 das Pseudo-Inverse der Stammfunktion von μ_a^0 ist, so fordern wir, dass die Lösung u_a von (4.2) mit Anfangswert u_a^0 gegeben ist durch u_1^a für $z < m_1$ und durch u_2^a für $z \geq m_1$, wobei u_1^a bzw. u_2^a (4.8) bzw. (4.9) lösen, mit den Anfangswerten $u_1^a = u_a^0|_{[0, m_1]}$ bzw. $u_2^a = u_a^0|_{[m_1, 1]}$.

Um dies zu zeigen, beweisen wir, dass das oben genannte u_a die Gleichung (4.2) löst (mit Anfangswert (u_a^0, u_b^0)).

Es gilt

$$\lim_{z \searrow m_1} u_a(z, t) - \lim_{z \nearrow m_1} u_a(z, t) > c - b > d_a$$

für alle $t \geq 0$.

Somit folgt die Behauptung mit der Eindeutigkeit der Lösung.

Nun, da sich u_1^a und u_2^a wie zwei unabhängige Lösungen von (4.2) (mit Masse m_1 bzw. $1 - m_1$) verhalten, mit einem Anfangswert, der einen zusammenhängenden Träger hat, können wir Schritt 1) des Beweises anwenden.

$u_b(z, t)$ folgt analog.

Somit folgt das Theorem.

□

Kapitel 5

Lineare Stabilitätsanalyse

Nun führen wir eine lineare Stabilitätsanalyse unseres heterogenen Modells durch. Diese Analyse soll zeigen, was es für Auswirkungen hat, wenn in dem Modell eine kleine Störung auftritt. Wir möchten wissen, unter welchen Umständen die stationären Lösungen stabil oder instabil sind.

Wir betrachten nun den Fall $\lambda_{ab}g_{ab} = \lambda_{ba}g_{ba}$ und $u_S = (u_S^a, u_S^b)$ mit $u_S^a = u_S^b$.

5.1 Linearisierung

Gegeben sind die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t_{neu}}u_a(z, t) &= \lambda_a c_1 \int g_a(u_a(z, t) - u_a(\zeta, t))d\zeta + \lambda_{ab}c_2 \int g_{ab}(u_a(z, t) - u_b(\zeta, t))d\zeta \\ \frac{\partial}{\partial t_{neu}}u_b(z, t) &= \lambda_b c_3 \int g_b(u_b(z, t) - u_b(\zeta, t))d\zeta + \lambda_{ba}c_4 \int g_{ba}(u_b(z, t) - u_a(\zeta, t))d\zeta \\ u(z, t) &= (u_a(z, t), u_b(z, t))\end{aligned}\tag{5.1}$$

Sei $u_S = (u_S^a, u_S^b)$ eine stationäre Lösung von (5.1), also gilt $u(z, t) \equiv u_S$ wenn $u(z, 0) = u_S$.

Sei

$$u(t) = u_S + \xi(t)$$

wobei $\xi(t) = (\xi_a, \xi_b)$ eine kleine Störung ist: $|\xi(t)| \ll 1$.

Einsetzen in (5.1) und Taylor-Entwicklung der rechten Seite ergibt

$$\frac{\partial}{\partial t_{neu}}u_S + \frac{\partial}{\partial t_{neu}}\xi = F(u_S + \xi) = F(u_S) + DF(u_S)\xi + \mathcal{O}(|\xi|^2)$$

(Mit vereinfachter Schreibweise $F(u(z, t)) = (\frac{\partial}{\partial t_{neu}} u_a(z, t), \frac{\partial}{\partial t_{neu}} u_b(z, t))$)

Wir berechnen nun $DF(u_S)\xi$:

$$\begin{aligned} DF(u_S)\xi &= \left(\lambda_a c_1 \int g'_a(u_S^a(z) - u_S^a(\zeta))(\xi^a(z) - \xi^a(\zeta))d\zeta + \lambda_{ab} c_2 \int g'_{ab}(u_S^a(z) - u_S^b(\zeta))(\xi^a(z) - \xi^b(\zeta))d\zeta \right. \\ &= \left(\lambda_b c_3 \int g'_b(u_S^b(z) - u_S^b(\zeta))(\xi^b(z) - \xi^b(\zeta))d\zeta + \lambda_{ba} c_4 \int g'_{ba}(u_S^b(z) - u_S^a(\zeta))(\xi^b(z) - \xi^a(\zeta))d\zeta \right) \\ &= \left(\lambda_a c_1 g'_a(0)(\xi^a(z) - \int \xi^a(\zeta)d\zeta) + \lambda_{ab} c_2 g'_{ab}(0)(\xi^a(z) - \int \xi^b(\zeta)d\zeta) \right) \\ &= \left(\lambda_b c_3 g'_b(0)(\xi^b(z) - \int \xi^b(\zeta)d\zeta) + \lambda_{ba} c_4 g'_{ba}(0)(\xi^b(z) - \int \xi^a(\zeta)d\zeta) \right) \end{aligned}$$

Es gilt $\int u_a + \int u_b = const$, $\int \xi_a = -\int \xi_b$ und somit auch $\int \xi_a + \int \xi_b = 0$.

$\mathcal{O}(|\xi|^2)$ bezeichnet die Terme quadratischer und höherer Ordnung von ξ_a, ξ_b .

Wenn $g(\xi) = \mathcal{O}(|\xi|^p)$, dann gilt

$$\lim_{|\xi| \rightarrow 0} \frac{g(\xi)}{|\xi|^p} \leq k < \infty$$

Somit dominiert der Term erster Ordnung $DF(u_S)\xi$ für genügend kleine $|\xi|$. Da $F(u_s) = 0$ und $\mathcal{O}(|\xi|^2)$ klein, erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t_{neu}} \xi = DF(u_S)\xi \quad (5.2)$$

5.2 Prüfung auf Stabilität

Die allgemeine Lösung von Gleichung (5.2) wird durch die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $Df(u_S)\xi$ bestimmt, da wir uns hier mit qualitativen Eigenschaften und nicht mit kompletten Lösungen beschäftigen. Genauer: Bei der Betrachtung der Stabilität wollen wir wissen, ob die Größe der Lösungen steigt, konstant bleibt oder sinkt, wenn $t \rightarrow \infty$. Dies kann man durch Prüfung der Eigenwerte erkennen.

λ ist ein reeller Eigenwert mit Eigenvektor v , wenn es eine Lösung von (5.2) gibt mit der Form

$$\xi = cve^{\lambda t}$$

Nun gibt es drei Fälle zu unterscheiden (siehe [Hahn (1967)]):

- Wenn alle Eigenwerte von $Df(u_S)\xi$ echt negative Realteile haben, dann gilt $|\xi(t)| \rightarrow 0$ wenn $t \rightarrow \infty$ für alle Lösungen, d.h. die stationäre Lösung ist asymptotisch stabil.
- Wenn mindestens ein Eigenwert von $Df(u_S)\xi$ einen positiven Realteil hat, gibt es eine Lösung $\xi(t)$ mit $|\xi(t)| \rightarrow \infty$, wenn $t \rightarrow \infty$, d.h. die stationäre Lösung ist instabil.

- Wenn ein Realteil der Eigenwerte von $Df(u_S)\xi$ gleich Null ist, ist keine konkrete Aussage möglich.

Bestimmen wir also nun die Eigenwerte.

$$\lambda_a c_1 g'_a(0)(\xi^a(z) - \int \xi^a(\zeta) d\zeta) + \lambda_{ab} c_2 g'_{ab}(0)(\xi^a(z) - \int \xi^b(\zeta) d\zeta) = \lambda \xi^a(z)$$

Da $\int \xi^a = -\int \xi^b$ gilt, folgt

$$\lambda_a c_1 g'_a(0)(\xi^a(z) - \int \xi^a(\zeta) d\zeta) + \lambda_{ab} c_2 g'_{ab}(0)(\xi^a(z) + \int \xi^a(\zeta) d\zeta) = \lambda \xi^a(z)$$

und somit

$$\xi^a(z)(\lambda_a c_1 g'_a(0) + \lambda_{ab} c_2 g'_{ab}(0)) + \int \xi^a(\zeta) d\zeta (-\lambda_a c_1 g'_a(0) + \lambda_{ab} c_2 g'_{ab}(0)) = \lambda \xi^a(z)$$

Wir erhalten

$$(\lambda_a c_1 g'_a(0) + \lambda_{ab} c_2 g'_{ab}(0) - \lambda) \xi^a(z) + (-\lambda_a c_1 g'_a(0) + \lambda_{ab} c_2 g'_{ab}(0)) \int \xi^a(\zeta) d\zeta = 0 \quad (5.3)$$

Integration über z führt zu

$$(\lambda_a c_1 g'_a(0) + \lambda_{ab} c_2 g'_{ab}(0) - \lambda) \int \xi^a(z) dz + (-\lambda_a c_1 g'_a(0) + \lambda_{ab} c_2 g'_{ab}(0)) \int \int \xi^a(\zeta) d\zeta dz = 0$$

und somit zu

$$(2\lambda_{ab} c_2 g'_{ab}(0) - \lambda) \int \xi^a(z) dz = 0$$

Hieraus folgt

$$\int \xi^a(z) dz = 0 \text{ oder } \lambda = 2\lambda_{ab} c_2 g'_{ab}(0) \quad (5.4)$$

Für die andere Gleichung gilt analog

$$\lambda_b c_3 g'_b(0) (\xi^b(z) - \int \xi^b(\zeta) d\zeta) + \lambda_{ba} c_4 g'_{ba}(0) (\xi^b(z) - \int \xi^a(\zeta) d\zeta) = \lambda \xi^b(z)$$

Da $\int \xi^a = -\int \xi^b$ gilt, folgt

$$\lambda_b c_3 g'_b(0) (-\xi^a(z) + \int \xi^a(\zeta) d\zeta) + \lambda_{ba} c_4 g'_{ba}(0) (-\xi^a(z) - \int \xi^a(\zeta) d\zeta) = -\lambda \xi^a(z)$$

und somit

$$\xi^a(z) (-\lambda_b c_3 g'_b(0) - \lambda_{ba} c_4 g'_{ba}(0) + \lambda) + \int \xi^a(\zeta) d\zeta (\lambda_b c_3 g'_b(0) - \lambda_{ba} c_4 g'_{ba}(0)) = 0 \quad (5.5)$$

Nun integrieren wir auch hier über z :

$$(-\lambda_b c_3 g'_b(0) - \lambda_{ba} c_4 g'_{ba}(0) + \lambda) \int \xi^a(z) dz + (\lambda_b c_3 g'_b(0) - \lambda_{ba} c_4 g'_{ba}(0)) \int \int \xi^a(\zeta) d\zeta dz = 0$$

und wir erhalten

$$(-2\lambda_{ba} c_4 g'_{ba}(0) + \lambda) \int \xi^a(z) dz = 0$$

Es folgt

$$\int \xi^a(z) dz = 0 \text{ oder } \lambda = 2\lambda_{ba} c_4 g'_{ba}(0)$$

und da nach Voraussetzung $\lambda_{ab} g_{ab} = \lambda_{ba} g_{ba}$ gilt

$$\int \xi^a(z) dz = 0 \text{ oder } \lambda = 2\lambda_{ab} c_4 g'_{ab}(0) \quad (5.6)$$

Betrachten wir nun (5.4) und (5.6), so sehen wir, dass folgendes gelten muss:

$$\int \xi^a(z) dz = 0 \text{ oder } \lambda = 2\lambda_{ab} c_2 g'_{ab}(0) \text{ mit } c_2 = c_4$$

Da

$$c_2 = \frac{4(N - N_a)}{N - 1}$$

und

$$c_4 = \frac{4N_a}{N - 1}$$

gilt, gilt $c_2 = c_4$ nur, wenn $N = 2N_a$, also wenn die Gruppen a und b gleich groß sind. Da die Gruppen a und b aber in der Regel nicht gleich groß sind, wird fast immer $c_2 \neq c_4$ gelten.

Betrachten wir also den Fall $\int \xi^a(z) dz = 0$. Wenn wir dieses in die Formeln (5.3) und (5.5) einsetzen, so erhalten wir

$$(\lambda_a c_1 g'_a(0) + \lambda_{ab} c_2 g'_{ab}(0) - \lambda) \xi^a(z) = 0$$

und somit

$$\xi^a(z) = 0 \text{ oder } \lambda = \lambda_a c_1 g'_a(0) + \lambda_{ab} c_2 g'_{ab}(0)$$

und

$$(\lambda_b c_3 g'_b(0) + \lambda_{ba} c_4 g'_{ba}(0) - \lambda) \xi^b(z) = 0$$

$$\xi^b(z) = 0 \text{ oder } \lambda = \lambda_b c_3 g'_b(0) + \lambda_{ba} c_4 g'_{ba}(0)$$

Wir betrachten hier gerade den Fall, in dem eine Störung vorliegt, also $\xi \neq 0$. Nun gibt es bei der Betrachtung der Eigenwerte, für die nach der obigen Rechnung gilt $\lambda = \lambda_a c_1 g'_a(0) + \lambda_{ab} c_2 g'_{ab}(0)$ und $\lambda = \lambda_b c_3 g'_b(0) + \lambda_{ba} c_4 g'_{ba}(0)$, folgende Möglichkeiten:

- 1. Fall: $G_{ab} = G_{ba}$ sind nicht abstoßend, d.h. $G_{ab} = G_{ba}$ hat das einzige Maximum an der Stelle 0. In diesem Fall gilt $g'_{ab}(0) = g'_{ba}(0) < 0$, und somit (da $g'_a(0) < 0$ und $g'_b(0) < 0$) $\lambda < 0$, d.h. die stationäre Lösung ist asymptotisch stabil.
- 2. Fall: $G_{ab} = G_{ba}$ sind abstoßend, d.h. $G_{ab} = G_{ba}$ hat das einzige Minimum an der Stelle 0. In diesem Fall gilt $g'_{ab}(0) = g'_{ba}(0) > 0$. Somit hängt der Wert des Eigenwerts λ und

somit die Stabilität der stationären Lösung von der Größe von $g'_a(0) < 0$ und $g'_b(0) < 0$ ab.

- 3. Fall: $G_{ab} = G_{ba} \equiv 0$. Da $g'_a(0) < 0$ und $g'_b(0) < 0$ gilt, folgt $\lambda < 0$ und somit ist die stationäre Lösung asymptotisch stabil.

Der Fall, dass die beiden Gruppen a und b gleich groß sind, tritt eher selten auf. In diesem ungewöhnlichen Fall kann durch die Störung ξ der Masseschwerpunkt verschoben werden, es gilt für die Stabilität

- 1. Fall: $G_{ab} = G_{ba}$ sind nicht abstoßend, d.h. $G_{ab} = G_{ba}$ hat das einzige Maximum an der Stelle 0. In diesem Fall gilt $g'_{ab} = g'_{ba} < 0$ und somit $\lambda = 2\lambda_{ab}c_2g'_{ab}(0) < 0$, d.h. die stationäre Lösung ist asymptotisch stabil.
- 2. Fall: $G_{ab} = G_{ba}$ sind abstoßend, d.h. $G_{ab} = G_{ba}$ hat das einzige Minimum an der Stelle 0. In diesem Fall gilt $g'_{ab} = g'_{ba} > 0$ und somit $\lambda = 2\lambda_{ab}c_2g'_{ab}(0) > 0$, d.h. die stationäre Lösung ist instabil.
- 3. Fall: $G_{ab} = G_{ba} \equiv 0$. In diesem Fall ist keine Aussage über die Stabilität der stationären Lösung möglich.

Kapitel 6

Numerische Simulation

In diesem Kapitel werden wir einige numerische Simulationen für das heterogene Modell durchführen. Hierbei betrachten wir sowohl gleichmäßig verteilte Anfangswerte als auch den Fall von separierten Anfangswerten für die Gruppen a und b . Unser Modell besteht hier aus 100 Agenten.

6.1 Simulationen für gleichmäßig verteilte Anfangswerte

- Betrachten wir zuerst einmal die Situation, dass die Meinungen beider Gruppen gleichmäßig über das Intervall $[-2; 2]$ verteilt sind. Die Gruppen a und b sind mit den folgenden Eigenschaften ausgestattet:

Gruppe a ist sowohl im Kontakt untereinander als auch im Kontakt mit Gruppe b sturer als die Gruppe b , sie läßt sich weniger von den Meinungen anderer beeinflussen und hat auch eine niedrigere Vertrauensschranke. (Genauer: $\lambda_a = 0,3$, $d_a = 0,5$, $\lambda_{ab} = 0,1$, $d_{ab} = 0,3$, $\lambda_b = 0,6$, $d_b = 0,7$, $\lambda_{ba} = 0,4$, $d_{ba} = 0,5$, Gruppe a besteht aus 20 Agenten) Wir können in Abbildung 6.1 sehen, dass sich im Zeitverlauf sechs 'Parteien' entwickeln. Hierbei benötigen die Agenten der Gruppe a auf Grund ihrer engstirnigen Haltung länger, um sich zu Meinungsparteien zusammenzuschließen.

- Nun beschäftigen wir ebenfalls mit einer Simulation mit gleichmäßig verteilten Anfangswerten für beide Gruppen, allerdings nimmt die Gruppe a hier nur Meinungen in $[-2; 0]$ an. Die restlichen Parameter bleiben unverändert.

Hier (Abbildung 6.2) ist schön zu sehen, die letztendliche Gewichtung der Meinungen deutlich zu Gunsten der Gruppe a ausfällt, da sich diese sich kaum von der Gruppe b beeinflussen lässt und sich nicht in den ausschließlichen Anfangsmeinungsbereich der Gruppe b ziehen lässt. Allerdings gibt es auch eine 'Partei' in dem Bereich $(0, 2]$, in dem nur die Startwerte von Mitgliedern der Gruppe b lagen.

- Nun haben wir die gleiche Situation wie in der vorangegangenen Simulation, nur ist jetzt

das Verhalten zwischen den beiden verschiedenen Gruppen leicht abstoßend, d.h.: treffen zwei Mitglieder unterschiedlicher Gruppen aufeinander, so nähern sie sich nicht aneinander an, sondern verstärken im Gegenteil ihre Meinung noch (Abbildung 6.3). Wir behalten die Parameter der obigen Simulation bei und ändern nur $\lambda_{ab} = -0,1$, $\lambda_{ba} = -0,1$, $d_{ab} = 0,4$, $d_{ba} = 0,4$.

Man sieht, dass durch dieses abstoßende Verhalten der Gruppen untereinander besonders die Agenten der Gruppe a ihre Meinungen verhärten und die extreme Position bei -2 annehmen.

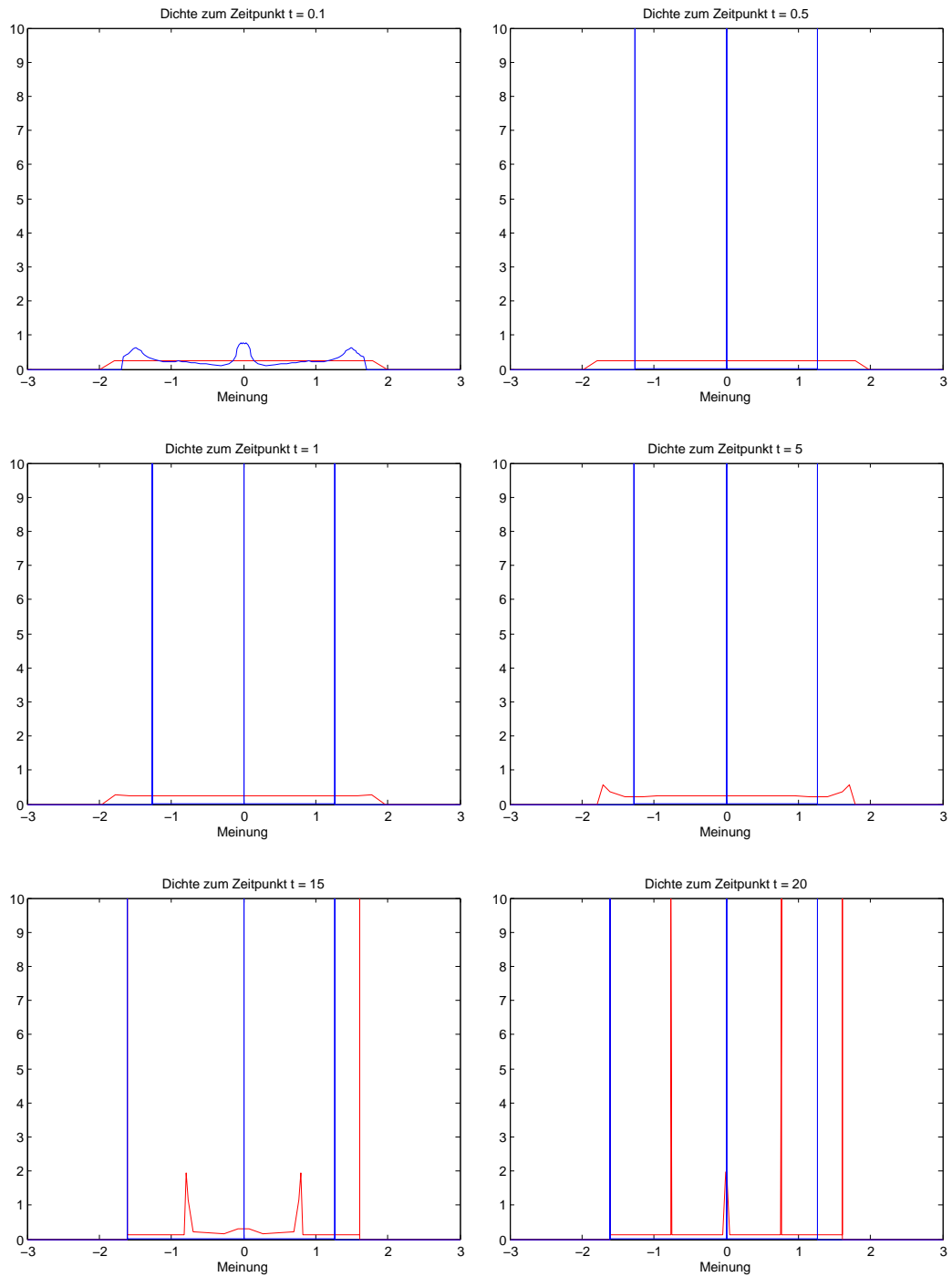


Abbildung 6.1: gleichmäßig verteilte Anfangswerte auf $[-2; 2]$, Gruppe b : blau, Gruppe a : rot

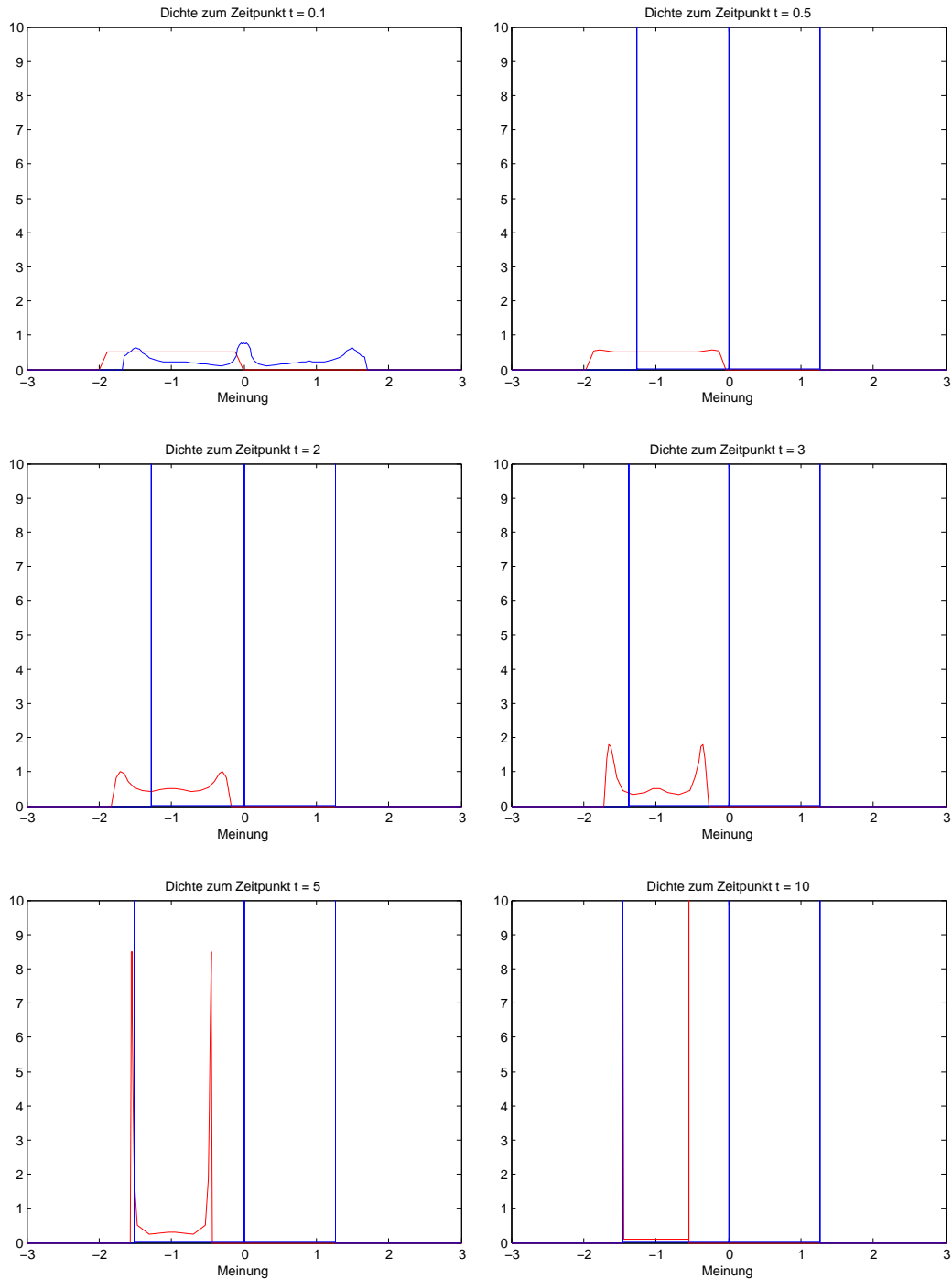


Abbildung 6.2: gleichmäßig verteilte Anfangswerte auf $[-2; 2]$ (Gruppe b(blau)) und $[-2, 0]$ (Gruppe a (rot))

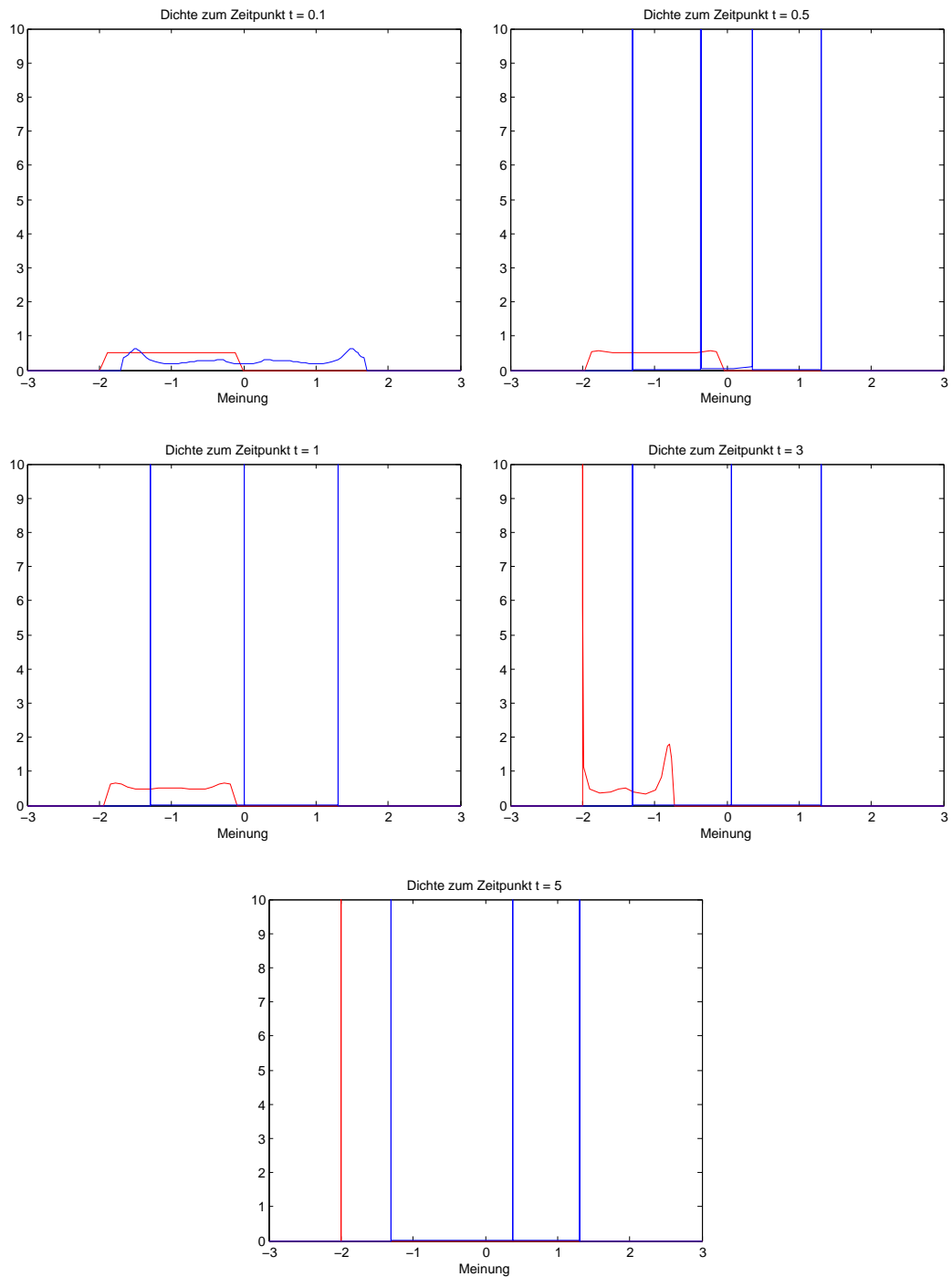


Abbildung 6.3: gleichmäßig verteilte Anfangswerte auf $[-2; 2]$ (Gruppe b (blau)) und $[-2, 0]$ (Gruppe a (rot)), abstoßendes Verhalten zwischen den Gruppen

6.2 Simulation für separierte Anfangswerte

Nun wenden wir uns Simulationen zu, bei denen die Anfangswerte nicht gleichmäßig verteilt sind. Wie auch schon im vorangegangenen Abschnitt stellt die Gruppe a wieder die Meinungsführer, sie lassen sich in ihrer Meinung von Mitgliedern der Gruppe b nicht beeinflussen, haben aber ihrerseits einen recht starken Einfluss auf die Meinung der Gruppe b .

- Die genauen Parameter der ersten Simulation sind: $\lambda_a = 0,4$, $d_a = 0,5$, $\lambda_{ab} = 0$, $\lambda_b = 0,1$, $d_b = 0,4$, $\lambda_{ba} = 0,6$, $d_{ba} = 1,5$, Gruppe a besteht aus 20 Agenten, die Anfangswerte der Gruppe a liegen in $[-2, 0]$ um den Punkt -1 , die Anfangswerte von Gruppe b in $[0, 2]$ um den Punkt 1)

Nun sieht man in Abbildung 6.4, dass sich drei 'Parteien' herausbilden, diese liegen ungefähr bei -1 ; $1,0$ und $1,7$. Die Gruppe a hat es nicht geschafft, das Meinungsbild komplett zu dominieren, die Gruppe bei $1,7$ liegt weit in dem Bereich der Anfangsmeinungen von Gruppe b .

- Nun verstärken wir die Macht der Gruppe a über die Meinungsentwicklung der Gruppe b noch ein wenig, reduzieren dafür aber die Mitglieder der Gruppe a auf 10 (Abbildung 6.5). Die genauen Parameter sind: $\lambda_a = 0,4$, $d_a = 0,3$, $\lambda_{ab} = 0$, $\lambda_b = 0,2$, $d_b = 0,2$, $\lambda_{ba} = 0,5$, $d_{ba} = 3$, Gruppe a besteht aus 10 Agenten)

Hier können wir sehr gut beobachten, wie die kleine Gruppe a von Meinungsführern die gesamte Meinungsdynamik dominiert und mit ihrem starken Einfluss die Gruppe b vollständig in 'ihren' Bereich der Anfangswerte ($[-2, 0]$) zieht. In dem Bereich $(0, 2]$, in dem anfangs alle Mitglieder der Gruppe b lagen, bildet sich keine 'Meinungspartei' aus.

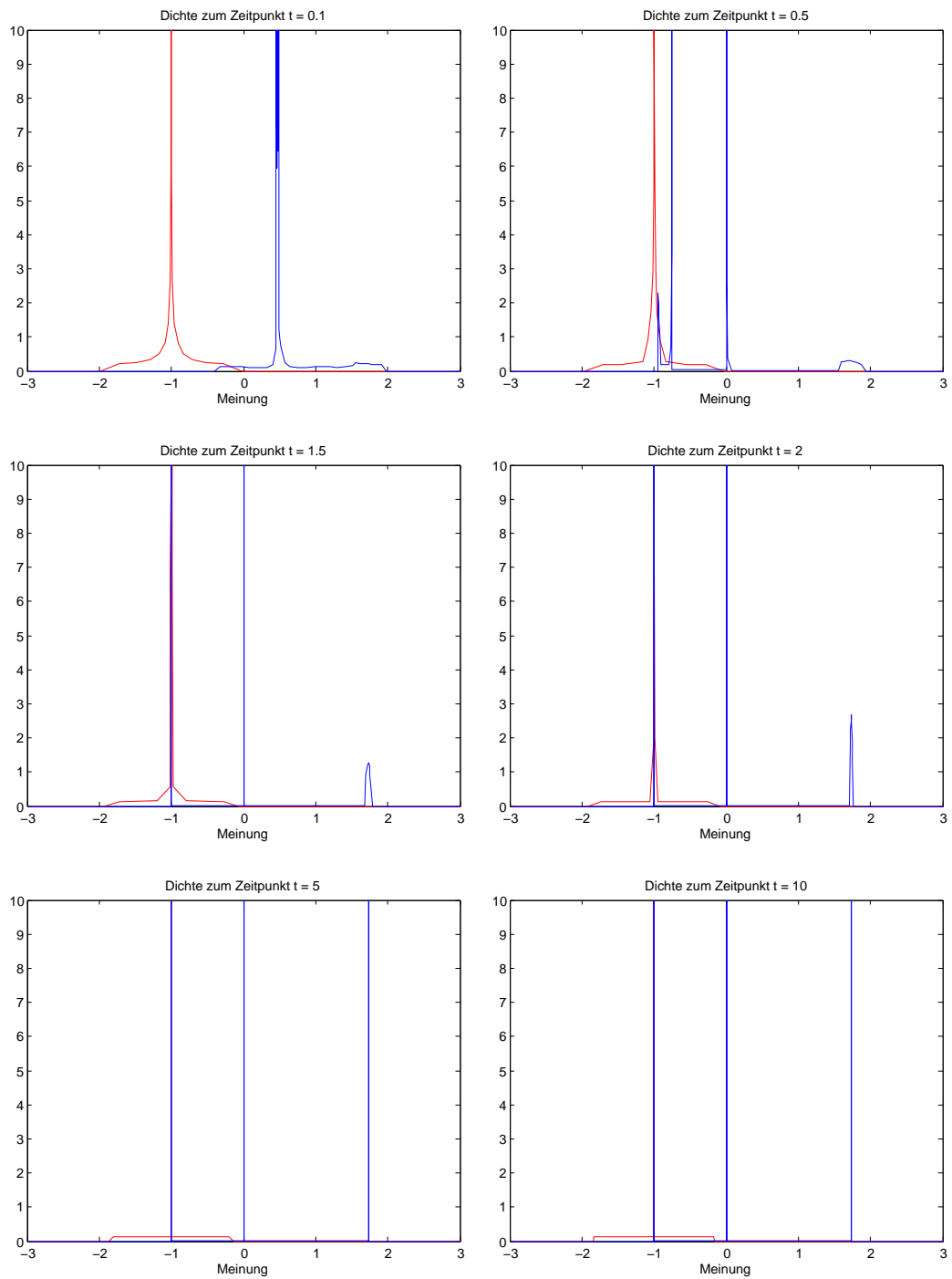


Abbildung 6.4: separierte Anfangswerte, Gruppe *a* (rot): $[-2; 0]$, Gruppe *b* (blau): $[0, 2]$

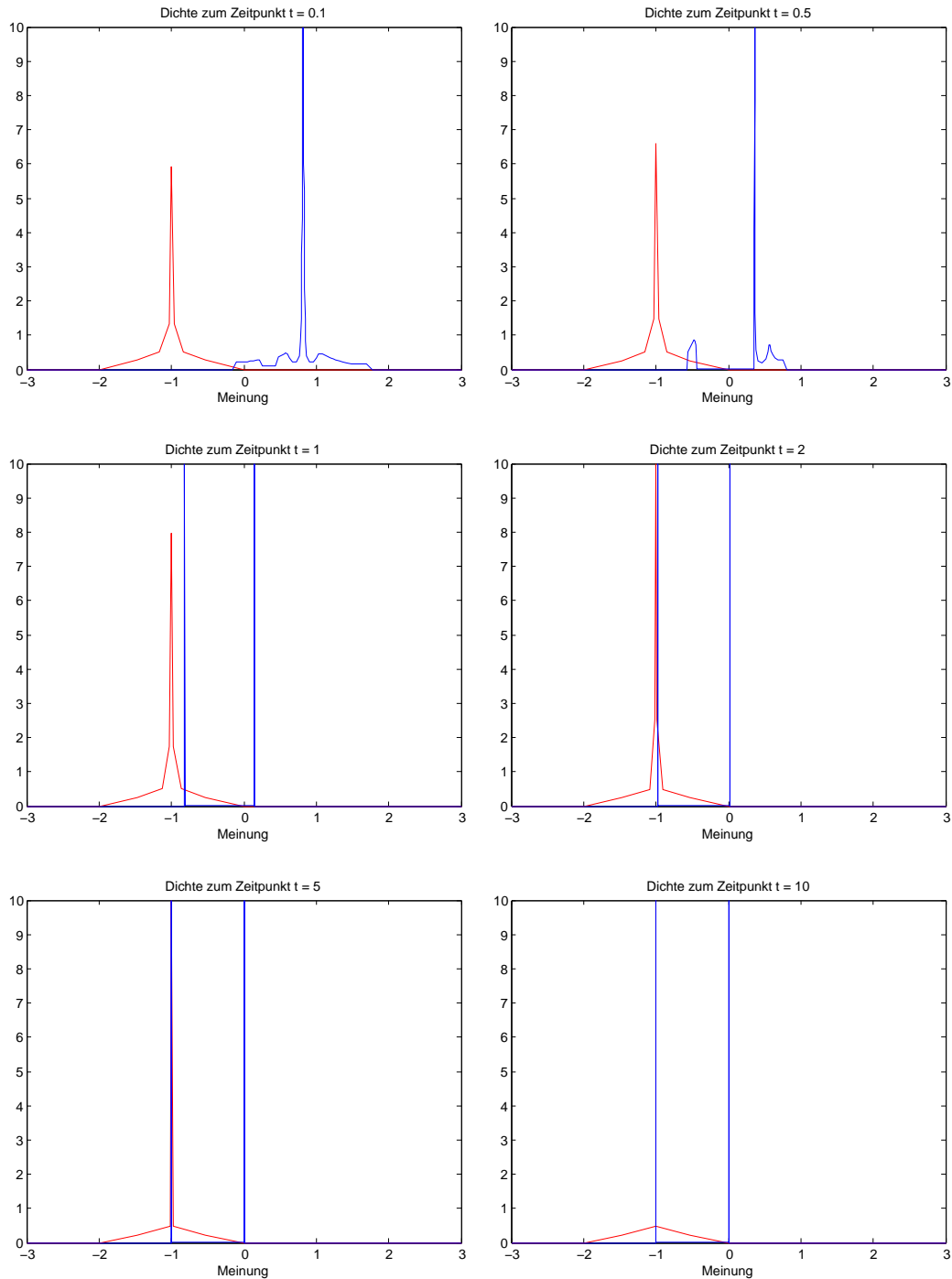


Abbildung 6.5: separierte Anfangswerte (mit sehr extremer Gruppe a), Gruppe a (rot): $[-2; 0]$, Gruppe b (blau): $[0, 2]$

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Nun folgt ein kleiner Überblick über die Ergebnisse dieser Diplomarbeit.

Nachdem wir einige mathematische Grundbegriffe eingeführt und das Deffuant-Weisbuch-Modell kennengelernt haben, haben wir dieses in Kapitel 3 modifiziert und auf den Fall mit zwei heterogenen Gruppen von Agenten erweitert. Der Zusammenhang zwischen dem Wahrscheinlichkeitsmaß im Einzel-Agenten-Phasenraum und dem Wahrscheinlichkeitsmaß im N-Agenten-Phasenraum wurde sowohl für das homogene als auch für das heterogene Modell beschrieben und in beiden Fällen wurde ein Beweis für die Konvergenz (für $N \rightarrow +\infty$) geliefert.

In Kapitel 4 haben wir dann das Langzeitverhalten des heterogenen Modells untersucht und die stationären Lösungen charakterisiert. Hierbei haben wir bewiesen, dass jede zusammenhängende Komponente der Anfangsdaten gegen eine Dirac- δ -Funktion konvergiert, wenn $t \rightarrow +\infty$.

Bei der linearen Stabilitätsanalyse in Kapitel 5 haben wir festgestellt, dass die Stabilität von der Form der Funktionen g_a, g_b, g_{ab}, g_{ba} abhängt und zwar, präziser gesagt, davon, ob diese Funktionen anziehend oder abstoßend sind.

Zum Abschluss haben wir in Kapitel 6 einige interessante Situationen durch numerische Simulation näher betrachtet und sind dabei speziell auf das heterogene Modell eingegangen.

Weitere interessante (noch offene) Probleme wären nun

- Wie würde sich das Modell bei mehr als zwei unterschiedlichen Gruppen von Agenten verhalten?
- Was für Auswirkungen hätte es, wenn sich die Agenten gleichzeitig über mehr als einen Meinungsaspekt austauschen würden? (siehe hierzu z.B. [Lorenz (2003)])
- Was würde geschehen, wenn die Agenten strategisch handeln würden, also versuchen würden, aktiv einen Konsens zu fördern oder zu verhindern, oder den Konsens aktiv in die von ihnen bevorzugte Richtung zu lenken versuchten?
(siehe hierzu z.B. [Düring, Markowich, Pietschmann, Wolfram (2009)])
- Welche Auswirkung hat Diffusion im Meinungsraum?

A Schwach-*-Topologie

Sei E ein normierter Vektorraum, E' der topologische Dualraum von E .

Die schwach-*-Topologie ([Floret, Wloka (1968)]) ist die Initialtopologie auf E' , welche von den Elementen von E erzeugt wird, wenn man sie mit Funktionalen auf E' identifiziert. Sie ist noch größer als die schwache Topologie auf E' .

Genauer:

Definition A.1 (Schwach-*-Topologie). Jedes Element x aus einem normierten \mathbb{K} -Vektorraum E (\mathbb{K} ist hier \mathbb{R} oder \mathbb{C}) definiert durch $\hat{x}(f) := f(x)$ ein lineares Funktional auf dem topologischen Dualraum E' . Die schwach-*-Topologie ist definiert als die schwächste Topologie auf E' , die all diese Abbildungen $\hat{x} : E' \rightarrow \mathbb{K}$ stetig macht.

Definition A.2 (Konvergenz in der schwach-*-Topologie). Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in der schwach-*-Topologie gegen f , wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. ("Topologie der punktweisen Konvergenz")

B Mathematische Stabilitätsbegriffe

Für die Charakterisierung der Stabilität eines Fixpunktes in einem dynamischen System $\dot{\vec{x}} = f(\vec{x})$ existieren mehrere unterschiedliche Stabilitätsbegriffe ([Hahn (1967)]):

- Ein Fixpunkt \vec{x}_F heißt *Liapunov-stabil*, wenn eine hinreichend kleine Störung auch stets klein bleibt. Genauer: Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, dass für alle Zeiten $t \geq 0$ und alle Trajektorien $\vec{x}(t)$ mit $\|\vec{x}(0) - \vec{x}_F\| < \delta$ gilt: $\|\vec{x}(t) - \vec{x}_F\| < \epsilon$.
- Ein Fixpunkt \vec{x}_F heißt *attraktiv*, wenn es ein $\delta > 0$ derart gibt, dass jede Trajektorie $\vec{x}(t)$ mit $\|\vec{x}(0) - \vec{x}_F\| < \delta$ für alle $t \geq 0$ existiert und die Grenzwertbedingung $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}_F$ erfüllt.
- Ein Fixpunkt \vec{x}_F heißt *asymptotisch stabil*, wenn er Liapunov-stabil und attraktiv ist.

Literaturverzeichnis

- [Aulbach (2004)] : B. Aulbach. Gewöhnliche Differentialgleichungen, 2. vollst. überarbeitete und erw. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, 2004
- [Bauer (2001)] : H. Bauer. Wahrscheinlichkeitstheorie, 5. Auflage, Gruyter-Verlag, 2001
- [Burger, di Francesco] : M. Burger, M. di Francesco. Large time behavior of nonlocal aggregation models with nonlinear diffusion, *Networks and Heterogeneous Media*, 3: 749-785, 2008
- [Dobrushin (1972)] : R. L. Dobrushin. Asymptotic behavior of Gibbsian distributions for lattice systems and its dependence on the form of the volume, *Theoretical and Mathematical Physics*, 1972, 12: 115-134
- [Düring, Markowich, Pietschmann, Wolfram (2009)] : B. Düring, P. Markowich, J.-F. Pietschmann, M.-T. Wolfram. Boltzmann and Fokker-Planck equations modelling opinion formation in the presence of strong leaders, *Proc R Soc A* 2009 465: 3687-3708
- [Eck, Garcke, Knabner (2008)] : C. Eck, H. Garcke, P. Knabner. *Mathematische Modellierung*, 1. Auflage, Springer-Verlag Berlin, 2008
- [Elstrodt (2005)] : J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*, 4. Auflage, Springer-Verlag, 2005
- [Floret, Wloka (1968)] : K. Floret, J. Wloka. *Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume*, *Lecture Notes in Mathematics* 56, 1968
- [Forster (2004)] : O. Forster. *Analysis I*, 7. Auflage, Vieweg Verlag, 2004
- [Golse (2003)] : F. Golse. The mean-field limit for the dynamics of large particle systems, *Journées équations aux dérivées partielles*, Forges-les-Eaux
- [Hahn (1967)] : W. Hahn. *Stability of Motion*, Reihe: Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 138, Springer-Verlag, 1967
- [Lorenz (2003)] : J. Lorenz. *Mehrdimensionale Meinungsdynamik bei wechselndem Vertrauen*, Diplomarbeit, Universität Bremen, 2003

- [Lorenz (2007)] : J. Lorenz. Repeated Averaging and Bounded Confidence. Modeling, Analysis and Simulation of Continuous Opinion Dynamics, Dissertation, Bremen, 2007
- [Walter (2000)] : W. Walter. Gewöhnliche Differentialgleichungen, 7. Auflage, Springer-Verlag
- [Weisbuch, Deffuant et al.(2001)] : G. Weisbuch, G. Deffuant, F. Amblard, J. P. Nadal. Interacting agents and continuous opinions dynamics, Working Paper, Santa Fe, 2001

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst habe und neben dem Programm MATLAB keine weiteren als die im Literaturverzeichnis angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Alle auf der CD beigefügten Programme sind von mir selbst erstellt worden.

Münster, 15.12.2009