



# Numerische Analyse von Long Run Risk Modellen mit zwei Bäumen und Sprungrisiko

Wissenschaftliche Arbeit  
zur Diplom-Hauptprüfung  
im Fach Mathematik

vorgelegt von  
**Johannes Härtel**

Thema gestellt von  
**Prof. Dr. Martin Burger und  
Prof. Dr. Nicole Branger**

Münster, Juni 2012



---

## Danksagung

Ich möchte mich bei all denjenigen bedanken, die es mir ermöglicht haben diese Arbeit zu erstellen. Mein besonderer Dank richtet sich an:

- Herrn Professor Dr. Martin Burger, für die sehr gute Betreuung meiner Arbeit und die vielen Antworten auf meine Fragen.
- Frau Professorin Dr. Nicole Branger, für die Auswahl des interessanten Themas und die umfangreiche Unterstützung bei dieser Arbeit.
- Daniel Tenbrinck, Thomas Kils und Michael Dörr für die hilfreichen und anregenden Diskussionen und das Korrekturlesen meiner Arbeit.
- Meiner Freundin Meike Krabbe für den bedingungslosen Rückhalt.
- Meinen Eltern Elke und Gerhard Härtel für die finanzielle Unterstützung, die mein Studium und somit auch diese Diplomarbeit ermöglicht hat.

---

## Abstract

Nowadays considerable attention is given to general equilibrium models of the pricing of capital assets. This thesis was concerned with a numerical analysis of a long-run risk model with rare events. The partial differential equation for the wealth-consumption ratio arises from a model with two stochastic consumption growth rates, a stochastic volatility and a stochastic jump intensity. In particular, the partial differential equation was analysed with respect to existence and uniqueness as well as to convergence of a numerical solution. In addition, the numerical approximation was implemented and tested in a realistic setup.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen der Optionspreisberechnung</b>	<b>3</b>
2.1	Betriebswirtschaftliche Grundbegriffe . . . . .	3
2.1.1	Asset Pricing . . . . .	3
2.1.2	Optionen . . . . .	3
2.1.3	Finanzwirtschaftliche Grundbegriffe . . . . .	6
2.2	Mathematische Grundbegriffe und Hilfsmittel . . . . .	6
2.2.1	Hilfsmittel der Wahrscheinlichkeitstheorie . . . . .	7
2.2.2	Monte-Carlo Simulation . . . . .	12
2.2.3	Hilfsmittel der Numerik . . . . .	14
2.2.4	Hilfsmittel der Analysis . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Das mathematische Modell</b>	<b>18</b>
3.1	Die Modelldynamik . . . . .	18
3.1.1	Die Dynamik des Konsumverlaufes . . . . .	18
3.1.2	Die Nutzenfunktion . . . . .	19
3.2	Wohlstands-Konsum-Quotient . . . . .	20
3.3	Risikofreie Zinsrate und der Marktpreis des Risikos . . . . .	24
3.4	Preis-Dividenden-Quotient . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Mathematische Analyse des Wohlstands-Konsum-Quotienten</b>	<b>28</b>
4.1	Allgemeine Strukturbetrachtung der PDGL . . . . .	28
4.2	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung für eine elliptische PDGL . . . . .	31
4.3	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung für den Wohlstands-Konsum-Index . . . . .	37
4.3.1	Existenz der Lösung für den Wohlstands-Konsum-Index	37
4.3.2	Eindeutigkeit der Lösung für den Wohlstands-Konsum-Quotient . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Numerische Approximation des Wohlstands-Konsum-Quotienten</b>	<b>43</b>
5.1	Diskretisierung . . . . .	43
5.1.1	Realistische Randbedingungen . . . . .	47
5.2	Numerische Analyse der Lösung . . . . .	52
5.2.1	Fehleranalyse . . . . .	57

<b>6 Numerische Approximation des Preis-Dividenden-Quotienten</b>	<b>60</b>
6.1 Diskretisierung . . . . .	61
6.1.1 Randbedingungen . . . . .	62
6.2 Numerische Analyse der Lösung . . . . .	68
<b>7 Programmierung des Modells</b>	<b>69</b>
7.1 Implementierung der Approximation des Wohlstands-Konsum-Quotienten . . . . .	69
7.2 Implementierung der Approximation des Preis-Dividenden-Quotienten . . . . .	74
7.3 Implementierung der Monte-Carlo Simulation . . . . .	76
7.4 Implementierung des Callpreises . . . . .	82
<b>8 Ergebnisse</b>	<b>84</b>
<b>9 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>87</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>89</b>

## Abbildungsverzeichnis

- 2.1.1 Auszahlungsfunktion für den Ausübungspreis  $K = 50$ . Quelle:  
eigene Darstellung, Daten entnommen aus [Wür07, Seite 4]. . . 5
- 2.2.1 Eine Realisierung des Wiener Prozesses im Verlauf der Zeit. . . 10

# 1 Einleitung

Die bahnbrechenden Arbeiten von Fischer Black, Myron Samuel Scholes und Robert Carhart Merton [BS11] im Jahre 1973 gelten als Meilenstein der Finanzwirtschaft. Sie entwickelten das sogenannte Black-Scholes-Modell, welches ein finanzmathematisches Modell zur Bewertung von Optionen ist. Scholes und Merton wurden 1997 für diese Arbeiten mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften geehrt („for a new method to determine the value of derivatives“ [BS11]), Black war bereits 1995 verstorben. Dieses Modell dient noch heute häufig als Grundlage für Weiterentwicklungen, jedoch bildet das Black-Scholes-Modell die Wirklichkeit noch nicht gut genug ab, weswegen immer wieder Modifizierungen vorgenommen werden. Unter anderem auch die Modellierung extremer Kurseinbrüche innerhalb eines kurzen Zeitraums. Der erste überlieferte Zusammenbruch einer Börse geschah am 7. Februar 1637. Der Börsencrash am 19. Oktober ging als „Black Monday“ in die Geschichte ein. Doch auch die jüngste Vergangenheit zeigt massive Wertpapierverluste in kürzester Zeit (Finanzkrise ab 2007). Auch andere Finanzmarktgrößen, wie zum Beispiel eine eigenständige Volatilität, werden vermehrt in Modellen berücksichtigt.

Zu Beginn der Arbeit werden wir in Kapitel 2 die Grundlagen der Optionspreiskalkulation erläutern. Hier definieren wir betriebs- und finanzwirtschaftliche Grundbegriffe. Des Weiteren werden erste mathematische Hilfsmittel eingeführt und ein Einblick in die Monte-Carlo Simulation gegeben. Anschließend motivieren wir im Kapitel 3 ein Modell, welches wir noch weiterentwickeln. Liegt ein geeignetes Modell vor, können wir mit der Berechnung des „fairen“ Preises einer Option beginnen. Unter der Berücksichtigung der Nutzenfunktion (Epstein-Zin Nutzenfunktion, [EZ89]) eines Investors leiten wir für unser Optionbewertungsmodell eine elliptische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung her, wobei wir durch das Lösen dieser Differentialgleichung, im Abschnitt 3.2, den Wohlstands-Konsum-Quotienten erhalten. Da das Lösen der Differentialgleichung nicht oder nur sehr schwer auf analytischem Weg möglich ist, werden wir die Lösung numerisch approximieren. Im vierten Kapitel beweisen wir zuerst die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung, um im darauf folgenden Kapitel 5 den Differentialoperator auf einem Gitter zu diskretisieren. Sind die Randbedingungen aufgestellt, folgt im Abschnitt 5.2 eine numerische Analyse der approximierten Lösung. Wir zeigen, dass unsere Diskretisierung mittels finiter Differenzen sowohl stabil als auch konsistent ist, was zur Folge hat, dass unsere Lösung gegen die kontinuierliche Lösung, in einem noch zu klärenden Sinn, konvergiert. Mittels des numerisch berechneten Wohlstands-Konsum-Quotienten können



wir den Pricing Kernel angeben, der den Wert einer Einheit im jeweiligen volkswirtschaftlichen Zustand wieder gibt. Der wiederum ermöglicht uns die Formulierung der risikofreien Zinsrate und des Marktpreises des Risikos. Um nun Optionen mit unterschiedlichen Dividendenströmen zu berechnen, leiten wir eine weitere partielle Differentialgleichung her. Das Lösen dieser partiellen Differentialgleichung gibt uns den Preis-Dividenden-Quotienten.

Weiter werden wir in Kapitel 7 die Implementierung der numerischen Approximation des Wohlstands-Konsum-Quotienten und des Preis-Dividenden-Quotienten erläutern und auf die Programmierung der Modelldynamiken eingehen, wobei die Modelldynamiken einen möglichen Verlauf des Finanzmarktes simulieren. Abschließend werden wir mit Hilfe der Monte-Carlo Simulation zeigen, wie man nun eine *Call-Option* bewertet.

## 2 Grundlagen der Optionspreisberechnung

Im ersten Kapitel wollen wir die wichtigsten betriebswirtschaftlichen und mathematischen Grundbegriffe klären, die für die Optionspreisberechnung erforderlich sind.

Der Aufbau ist angelehnt an die Diplomarbeiten [Heu10], [Wür07] und [Zoc10].

### 2.1 Betriebswirtschaftliche Grundbegriffe

#### 2.1.1 Asset Pricing

Die grundlegende Frage beim *Asset Pricing* ist: Wie bewertet man unsichere Zahlungsströme (Wertpapiere, Projekte, Firmen, etc.)?

Der Preis eines Assets wird durch Aufsummieren der diskontierten Payoffs berechnet. Die Kunst ist geeignet (stochastisch) zu diskontieren, also einen guten Diskontfaktor zu finden. Die Schwierigkeit besteht im Messen und Formalisieren von Risiko, denn im Ergebnis ist der Preis riskanter Assets geringer als der Preis weniger riskanter Assets. Bekannte Asset Pricing Modelle sind:

- Black-Scholes Modell (siehe [BS11]),
- CAPM (Capital Asset Pricing Modell, siehe [Sha64]),
- APT (Arbitrage Pricing Theory, (siehe [Ros76])).

#### 2.1.2 Optionen

Zunächst werden wir den betriebswirtschaftlichen Begriff *Option* näher erläutern und definieren, um mit ihm auch später mathematisch arbeiten zu können.

In der Wirtschaft bezeichnet eine Option das Recht, ein bestimmtes Finanzgut, zum Beispiel eine Aktie, zu einem vertraglich festgelegten Zeitpunkt, zu einem vorher fixierten Preis zu kaufen, beziehungsweise zu verkaufen. Dieses Recht kann der Besitzer der Option ausüben oder verfallen lassen (siehe auch [Gab11]).

Wir beschäftigen uns ausschließlich mit der *Europäischen Option*, diese ist aufgrund ihres festen Ausübungszeitpunktes mathematisch einfacher zu behandeln. Weitere bekannte Optionsarten sind zum Beispiel die *Amerikanische Option* oder die *Asiatische Option*. Der Käufer einer Amerikanischen Option hat das Recht, an einem beliebigen Zeitpunkt innerhalb eines festgelegten Zeitraums seine Option auszuüben. Das Auszahlungsprofil einer Asiatischen Option hängt hingegen von der Differenz zwischen dem Ausübungspreis

und einem Durchschnittswert vergangener Kurse des Basiswertes ab. Die Ausübungsart kann sowohl vom amerikanischen als auch vom europäischen Typ sein. Folglich würde sich durch die größeren Handlungsspielräume der „faire Preis“ einer Option ändern. Nun wollen wir eine Europäische Standard-Option genauer definieren.

**Definition 2.1.1** (Optionen, vgl. [Mar99] Definition 2.2.)

Optionen (*engl. options*) sind zins- und dividendenlose Wertpapiere, die dem Inhaber das Recht einräumen, zu einem bestimmten Zeitpunkt, dem Verfalls- oder Fälligkeitsdatum (*expiry date* oder *maturity*) einen bestimmten Basiswert (z.B. Aktien) zu einem im Voraus festgesetzten Ausübungspreis (*exercise price* oder *strike price*) zu kaufen (Call-Optionen) oder zu verkaufen (Put-Optionen).

### Bewertung von Optionen

Im Folgenden sei  $C(t, S(t))$  der Wert einer Call-Option mit Kurs  $S$  zur Zeit  $t$ .  $P(t, S(t))$  bezeichne den entsprechenden Wert einer Put-Option.  $K$  sei der vorher vereinbarte Ausübungspreis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird als Basispapier eine Aktie angenommen.

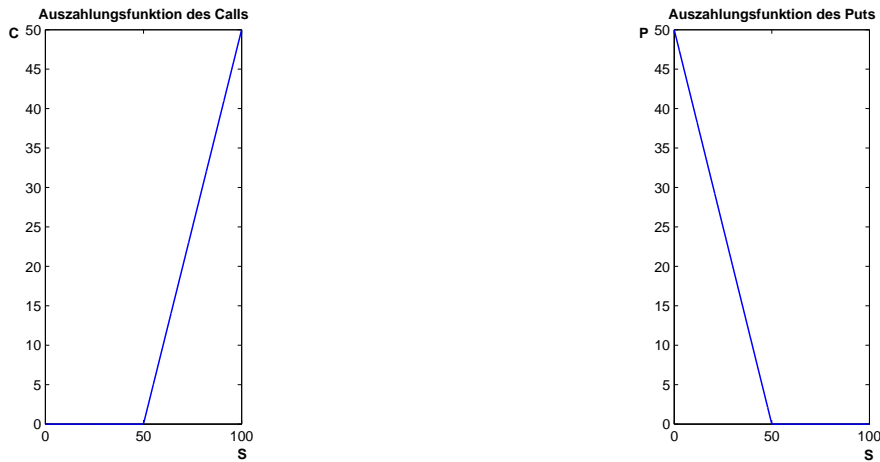
Nun wollen wir den Wert einer Option im Falle der Ausübung (intrinsischer Wert, *engl. intrinsic value*) angeben. Eine Call-Option wird ausgeübt, falls der vorher vereinbarte Ausübungspreis kleiner ist, als der Preis des Basiswertes zum Verfallszeitpunkt  $T$  ( $K < S(T)$ ). In diesem Fall kann der Optioneninhaber die Aktie zum Preis  $K$  kaufen und am Markt für  $S(T)$  weiterverkaufen. Somit erhält er einen Gewinn in Höhe von  $S(T) - K$ . Ansonsten ist die Option zum Zeitpunkt  $T$  wertlos und der Optionsinhaber übt sein Kaufrecht nicht aus.

Genau gegensätzlich verhält sich eine Put-Option. In diesem Fall wird die Option ausgeübt, falls der Preis des Basiswertes zum Verfallszeitpunkt  $T$  kleiner als der vorher vereinbarte Ausübungspreis ist ( $S(T) < K$ ). Hier wird der Optioneninhaber für  $S(T)$  kaufen und um  $K$  weiterverkaufen, also einen Gewinn in Höhe von  $K - S(T)$  machen. Es gelten also sogenannte *Auszahlungsfunktionen* (payoff functions):

$$\text{Call : } C(T, S(T)) = (S(T) - K)^+ := \max\{S(T) - K, 0\} \quad (1a)$$

$$\text{Put : } P(T, S(T)) = (K - S(T))^+ := \max\{K - S(T), 0\} \quad (1b)$$

Liegt der Ausübungspreis beim aktuellen Preis des Basiswertes zum Fälligkeitstermin ( $S(T) = K$ ), nennt man die Option *am Geld* (*engl. at the money, ATM*), *im Geld* (*engl. in the money, ITM*), falls die Call-Option ausgeübt wird, also  $K < S(T)$  gilt ( $K > S(T)$ , Put-Option). Ansonsten wird eine Call-



**Abbildung 2.1.1:** Auszahlungsfunktion für den Ausübungspreis  $K = 50$ .  
Quelle: eigene Darstellung, Daten entnommen aus [Wür07, Seite 4].

oder Put-Option *aus dem Geld* (engl. out of the money, OTM) genannt. Es ist klar, dass die Funktionen 1a und 1b nichtnegativ sind, also sichert eine Option eine nichtnegative zukünftige Zahlung. Aus diesem Grund muss der Optionskäufer eine *Optionsprämie* für das Optionsrecht an den Optionsverkäufer zahlen. Jedoch ist die Höhe der zukünftigen Zahlung unsicher. Es ist irrelevant, ob man den Wert einer Call- oder Put-Option berechnet, da folgender Satz gilt.

**Satz 2.1.2** (Put-Call-Parität, vgl. [Mar99] Satz 2.8)

*Für europäische Optionen gilt*

$$S(t) + P(S(t), t) - C(S(t), t) = Ke^{-r(T-t)},$$

*mit obigen Bezeichnungen und  $r$  sei der risikofreie Zinssatz.*

Zwei Hauptanwendungsgebiete von Optionen sind das Spekulieren und das Hedging. Spekulanten versuchen durch Kursprognosen ihren Gewinn durch den Kauf von Call-Optionen zu maximieren, da diese eine höhere Hebelwirkung haben als Aktien. Das heißt, Gewinne fallen höher aus, jedoch gilt das Gleiche für Verluste. Prognostiziert man fallende Kurse, kauft der Spekulant Put-Optionen.

Hedger versuchen sich vor Kursverlusten zu schützen. Mit Hilfe von Put-Optionen baut man sich eine Gegenposition auf, da diese bei fallenden Kursen Gewinn bringen.

### 2.1.3 Finanzwirtschaftliche Grundbegriffe

Um den Wert einer Option zu berechnen müssen wir Annahmen an den Finanzmarkt stellen. Wir gehen in dieser Diplomarbeit von einem *perfekten Finanzmarkt* (siehe auch [FHH04]) aus, wobei alle Investoren den selben Informationsstand haben, verzögerungsfrei handeln können und Folgendes gilt:

- Keine Arbitragemöglichkeiten,
- keine Transaktionskosten,
- keine Steuern,
- keine Einschränkungen beim Leerverkauf,
- kein gespaltener Kapitalmarkt, also der Habenzinssatz ist gleich dem Sollzinssatz ( $r_H = r_S = r$ ),
- alle Wertpapiere sind beliebig teilbar.

Da es keine Arbitragemöglichkeiten gibt, besteht also nicht die Möglichkeit sofort und risikolos Gewinne zu erzielen. Zum Beispiel durch das Ausnutzen von Preisdifferenzen gleicher Güter auf unterschiedlichen Märkten.

In einem *perfekten Finanzmarkt* fallen auch keine Transaktionskosten oder Steuern an. Es wird also immer nur der Kaufpreis bei einer Transaktion gezahlt und nicht etwa noch Transportkosten, Informationsbeschaffungskosten oder Steuern.

Ferner ist es möglich beliebig kleine Mengen an Aktien zu kaufen (Wertpapiere sind beliebig teilbar) und sogar Aktien zu verkaufen, die der Verkäufer zum Verkaufszeitpunkt nicht besitzt und sich erst zum Erfüllungszeitpunkt beschafft (Leerverkauf).

Da wir keinen gespaltenen Kapitalmarkt haben, rechnen wir in unserem Modell nur mit einem allgemeinen Zinssatz  $r$ .

## 2.2 Mathematische Grundbegriffe und Hilfsmittel

Um später den Wohlstands-Konsum-Quotienten (siehe Abschnitt 3.2) berechnen zu können, benötigen wir einige Hilfsmittel aus den Bereichen der Wahrscheinlichkeitstheorie, der Numerik und der Analysis. Die wichtigsten Grundbegriffe wollen wir hier kurz aufführen.

### 2.2.1 Hilfsmittel der Wahrscheinlichkeitstheorie

Bei der Optionspreisberechnung, insbesondere bei der Aufstellung des Modells, benötigt man die Wahrscheinlichkeitstheorie, da wir schließlich ein Modell mit Unsicherheiten haben werden (siehe auch [Mun] und [Mar99]).

#### Der Wahrscheinlichkeitsraum

Jedes Modell mit Unsicherheiten benötigt einen *Wahrscheinlichkeitsraum*. Dieser besteht aus einem Tripel  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , dabei ist  $\Omega$  der *Ergebnisraum*,  $\mathcal{A}$  die  $\sigma$ -*Algebra* und  $\mathbb{P}$  das *Wahrscheinlichkeitsmaß*.

Wir definieren zuerst den Ergebnisraum.

#### Definition 2.2.1 (Ergebnisraum)

Der Ergebnisraum (engl. *state space*)  $\Omega$  ist die Menge aller möglichen Ergebnisse eines unsicheren Modells. Ein Ereignis ist eine Teilmenge von  $\Omega$ .

Weiter benötigen wir die  $\sigma$ -Algebra.

#### Definition 2.2.2 ( $\sigma$ -Algebra, vgl. [Mar99] Definition 3.1.)

Eine Menge  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  heißt  $\sigma$ -Algebra, falls

- (i)  $\Omega \in \mathcal{A}$ ,
- (ii)  $A \in \mathcal{A} \implies \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ ,
- (iii)  $A_i \in \mathcal{A} \forall i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$ .

Zuletzt das Wahrscheinlichkeitsmaß.

#### Definition 2.2.3 (Wahrscheinlichkeitsmaß, vgl. [Mar99] Definition 3.2.)

Die Abbildung  $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  heißt Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{A}$ , falls gilt:

- (i)  $\mathbb{P}(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{A}$ ,
- (ii)  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ,
- (iii) Für paarweise disjunkte  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  ist  $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$  („ $\sigma$ -Additivität“).

Die Elemente  $A \in \mathcal{A}$  heißen Ereignisse.

Unsichere Objekte, wie zum Beispiel der Verlauf einer Aktie, werden wir mit *Zufallsvariablen* auf einem Wahrscheinlichkeitsraum modellieren.

**Definition 2.2.4** (Zufallsvariable, vgl. [Mar99] Definition 3.3.)

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Funktion  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Zufallsvariable ( $\mathcal{A}$ -meßbare Funktion), falls

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

### Informationsverlauf

Des Weiteren muss in einem Asset Pricing Modell die zunehmende Information während der Laufzeit berücksichtigt werden. Dieser Informationsverlauf wird mit einer sogenannten *Filtration*  $\mathcal{F}$  beschrieben.

**Definition 2.2.5** (Filtration, vgl. [Mar99] Definition 3.24.)

Sei  $\mathcal{T}$  eine beliebige geordnete Indexmenge und  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum.

- (i) Unter einer Filtration  $\mathcal{F}$  verstehen wir eine Familie von Unter- $\sigma$ -Algebren  $\{\mathcal{A}_t \mid t \in \mathcal{T}\}$  von  $\mathcal{A}$ , so dass  $\mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}_t$  für  $s < t$ .
- (ii) Ein stochastischer Prozeß  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  heißt adaptiert zur Filtration  $\mathcal{F}$ , wenn  $X_t$   $\mathcal{A}_t$ -meßbar ist,

wobei ein stochastischer Prozess eine Familie von Zufallsvariablen ist.

Möchte man betonen, dass die Information in einem stochastischen Prozess durch die Filtration  $\mathcal{F}$  gegeben ist, so kann man den *gefilterten Wahrscheinlichkeitsraum* mit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  angeben.

### Stochastische Prozesse

Mit der Hilfe von stochastischen Prozessen wollen wir die Unsicherheiten in unserem Modell beschreiben. Wir werden ein sogenanntes zeitstetiges Modell betrachten. In diesem Modell wird der Wiener-Prozess eine große Rolle spielen.

**Definition 2.2.6** (Wiener-Prozess, vgl. [Mar99] Definition 4.1.)

1. Sei  $\mathcal{T} = [t_0, T]$  und  $t \in \mathcal{T}$ . Ein (pfadweise) stetiger  $L^2$ -Prozess  $X_t$  (d.h.  $X_t \in L^2 \quad \forall t$ ) mit Parameterraum  $\mathcal{T}$  heißt Brownsche Bewegung mit Volatilität  $\sigma$  und Drift  $\mu$ , falls

- (i)  $X_{t_0}(\omega) = 0$  für fast alle  $\omega \in \Omega$ ,
- (ii) die Zuwächse normalverteilt sind mit  $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(\mu(t - s), \sigma^2(t - s)) \quad \forall 0 \leq s < t$ ,

(iii) für gegebenes  $s$  mit  $t > s \geq 0$  sind die Zuwächse  $X_t - X_s$  unabhängig.

2. Eine Brownsche Bewegung mit  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$  heißt Wiener Prozess (auch Standard Brownian motion) und wird mit  $W_t$  bezeichnet. Im Allgemeinen wird dazu  $t_0 = 0$  gewählt.

**Bemerkung 2.2.7** (Eigenschaften des Wiener Prozesses)

- Der Wiener Prozess ist ein Prozess mit stationären unabhängigen Inkrementen. Die Inkremente  $W_t - W_s$  für  $0 \leq s < t$  sind unabhängig und ihre Verteilung ist nur von  $t - s$  abhängig, also ist  $W_{t+\tau} - W_{s+\tau}$  genauso verteilt, wie  $W_t - W_s$ .
- Der Wiener Prozess ist ein Markov-Prozess. Das heißt das Verhalten zu einem Zeitpunkt  $t > t_0$  hängt nur vom Stand zum Zeitpunkt  $t_0$  ab, nicht von  $s < t_0$ . Es gilt also für  $A \in \mathcal{A}$ :

$$\mathbb{P}(W_t \in A \mid (W_s)_{s \leq t_0}) = \mathbb{P}(W_t \in A \mid W_{t_0}).$$

- Der Wiener Prozess ist ein Martingal. Das heißt, für  $(W_t)_{t \in \mathcal{T}}$  mit einer gegebenen Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ , einem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$ , gilt für alle  $s, t \in \mathcal{T}$  mit  $s < t$ :

$$E_s[W_t] = W_s.$$

Der Erwartungswert einer Beobachtung ist also gleich dem Wert der vorigen Beobachtung.

- Der Wiener Prozess ist ein Gaußscher Prozess, das heißt die gemeinsame Verteilung beliebiger endlich vieler  $W_{t_k}$  ist eine Normalverteilung.

Weitere stochastische Prozesse, die wir für die Modellierung unseres Modells benötigen, sind Folgende.

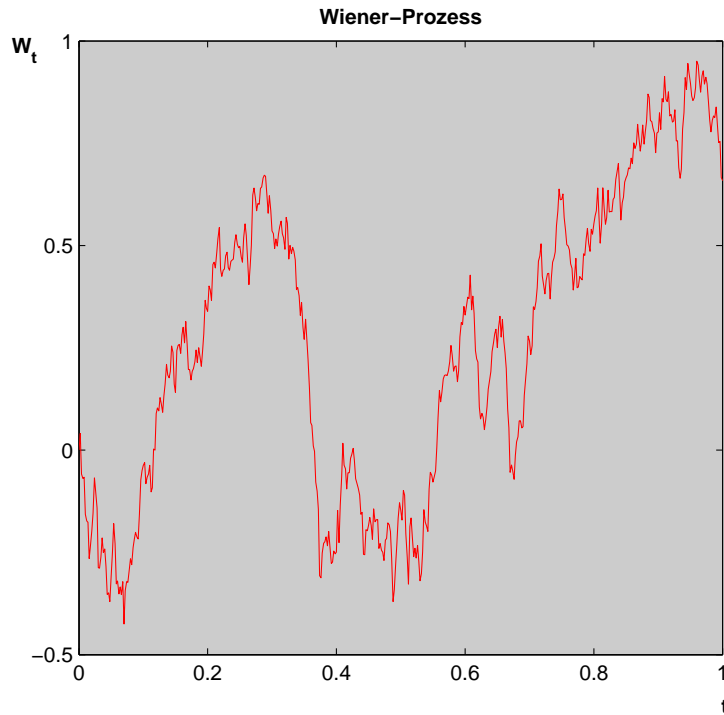
**Definition 2.2.8** (Diffusionsprozess, vgl. [Mun] 2.6.2)

Ein Diffusionsprozess ist ein stochastischer Prozess  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ , falls er folgende stochastische Differentialgleichung löst:

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t.$$

Hierbei ist  $W_t$  ein Wiener Prozess.  $\mu(X_t, t)$  wird als Driftterm bezeichnet und ist eine Funktion in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  und dem Wert von  $X_t$ . Gleiches gilt für die Funktion  $\sigma(X_t, t)$ , die die Volatilität des stochastischen Prozesses ist.





**Abbildung 2.2.1:** Eine Realisierung des Wiener Prozesses im Verlauf der Zeit.

Diffusionsprozesse sind spezielle *Ito-Prozesse* (siehe [Mun] 2.6.3), die das folgende Lemma erfüllen.

**Lemma 2.2.9** (Lemma von Ito, vgl. [Heu10] Lemma 1.2.8 )

Sei  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  ein  $n$ -dimensionaler Ito-Prozess, zum Beispiel

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$$

$$\text{mit } X_t = \begin{pmatrix} X_t^{(1)} \\ \vdots \\ X_t^{(n)} \end{pmatrix}, W_t = \begin{pmatrix} W_t^{(1)} \\ \vdots \\ W_t^{(m)} \end{pmatrix}, \mu(X_t, t) = \begin{pmatrix} \mu_1(X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}, t) \\ \vdots \\ \mu_n(X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}, t) \end{pmatrix}$$

und  $\sigma(X_t, t) = (\sigma_{ik}(X_t, t))_{\substack{k=1, \dots, m \\ i=1, \dots, n}}$ .

Weiter sei  $g : \mathbb{R}^n \times [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^p$  aus  $C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$ . Dann ist  $Y_t = g(X_t, t)$

wieder ein Ito-Prozess. Für  $k = 1, \dots, p$  gilt

$$dY_t^{(k)} = \frac{\partial g_k}{\partial t}(X_t, t)dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(X_t, t)dX_t^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(X_t, t)dX_t^{(i)}dX_t^{(j)},$$

wobei  $(dt)^2 = dt \cdot dW_t^{(i)} = 0$  und  $dW_t^{(i)}dW_t^{(j)} = dt$  gilt.

*Beweis.* Siehe Beweis zu 11.26 in [Irl98]. □

**Definition 2.2.10** (Poisson-Prozess, vgl. [Zoc10] Definition 1.9)

Wir nennen einen stochastischen Prozess  $(P_{\lambda,t})_{t \in \mathcal{T}}$  auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  Poisson-Prozess mit Intensität  $\lambda$ , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $P_{\lambda,0}(\omega) = 0$  für fast alle  $\omega \in \Omega$ ,
- (ii)  $P_{\lambda,t} - P_{\lambda,s} \sim \mathcal{P}_{\lambda \cdot (t-s)} \forall s < t$ , wobei  $\mathcal{P}_{\lambda \cdot (t-s)}$  die Poisson-Verteilung mit Parameter  $\lambda \cdot (t-s)$  ist ( $\mathcal{P}_{\lambda \cdot (t-s)}(X = k) = \frac{(\lambda \cdot (t-s))^k}{k!} e^{-\lambda \cdot (t-s)}$ ),
- (iii) sei  $n \in \mathbb{N}$  eine Folge  $0 < t_1 < \dots < t_n$  gegeben. Dann ist die Familie  $\{P_{\lambda,t_i} - P_{\lambda,t_{i-1}} \mid 2 \leq i \leq n\}$  von Zufallsvariablen stochastisch unabhängig.

Der Poisson-Prozess ermöglicht es uns sehr seltene Ereignisse in unserem Modell einzubauen. Diesen stochastischen Prozess nutzen wir später um plötzliche, unvorhergesehene Kursschwankungen zu modellieren.

### 2.2.2 Monte-Carlo Simulation

Hier soll ein kurzer Einblick in die Monte-Carlo Simulation gegeben werden. Diese sehr gängige Methode, um derivative Bewertungsproblem numerisch zu lösen, beruht vor allem auf dem *starken Gesetz der großen Zahlen*.

**Satz 2.2.11** (starke Gesetz der große Zahlen, vgl. [Vei06] Kapitel 5)  
*Seien  $\xi_i$  unabhängig, identisch verteilte Zufallszahlen. Dann gilt, dass der Mittelwert einer fortlaufenden Summe*

$$X_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$$

*fast sicher gegen dessen Erwartungswert  $E[\xi_i] = \mu_\xi$  konvergiert, also*

$$X_n \xrightarrow{f.s.} \mu_\xi$$

*gilt.*

Des Weiteren brauchen wir noch eine Aussage über das Verhalten der Verteilung der fortlaufenden Summe  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ . Diese erhalten wir mit dem *zentralen Grenzwertsatz*.

**Satz 2.2.12** (zentraler Grenzwertsatz, vgl. [Vei06] Kapitel 5)  
*Seien  $\xi_i$  unabhängig, identisch verteilte Zufallszahlen mit Erwartungswert  $E[\xi_i] = \mu_\xi$  und Varianz  $V[\xi_i] = \sigma_\xi^2$ . Dann gilt, dass die neue Zufallsvariable*

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu_\xi}{\sigma_\xi \sqrt{n}}$$

*für  $n \rightarrow \infty$  gegen die Standardnormalverteilung konvergiert, das heißt*

$$Z_n \xrightarrow{i.V.} N(0, 1).$$

Für  $X_n = \frac{1}{n} S_n$  gilt dann  $X_n \xrightarrow{i.V.} N(\mu_\xi, \frac{\sigma_\xi^2}{n})$ .

Unser Bewertungsmodell für eine Call-Option sieht wie folgt aus

$$C(S(x_0), x_t, K, t) = E^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_0^T r(x_s) ds} \max(0, S(x_T) - K)]$$

(siehe auch [Vei06] Kapitel 5). Hier ist  $\mathbb{Q}$  das risikoneutrale Maß. Wir werden später nicht die risikolose Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{Q}$  herleiten, sondern nutzen den in Abschnitt 3.3 ermittelten stochastischen Diskontfaktor  $\Pi_t$ , so dass

$$E^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_0^T r(x_s) ds} \max(0, S(x_T) - K)] = E^{\mathbb{P}}[\Pi_T \max(0, S(x_T) - K)]$$

gilt, wobei  $\mathbb{P}$  unser übliches Maß ist.  $x_t$  ist ein  $k$ -dimensionaler Zustandsvektor mit  $k$  stochastischen Zustandsvariablen, die den Kapitalmarkt modellieren, also den Optionspreis beeinflussen. Es wird der Erwartungswert über alle abgezinste Basiswertkurse genommen, wobei hier der Diskontfaktor  $-\int_0^T r(X_s)ds$  aus der risikolosen Momentanverzinsung durch Integration gewonnen wird. Die Schwierigkeit liegt in der Berechnung des Erwartungswertes, hierfür wollen wir die Monte-Carlo Simulation anwenden. Diese Methode simuliert  $n$  Zufallspfade der dem Bewertungsproblem zugrunde liegenden Zustandsvariablen  $x$  entsprechend den risikoadjustierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Nun diskontieren wir die Auszahlungscharakteristik  $\max(0, S(x_T) - K)$  mit dem risikofreien Zinssatz  $-\int_0^T r(X_s)ds$  (später mit  $\Pi_t$ ). Abschließend berechnet man den Mittelwert der diskontierten Auszahlungscharakteristiken mit dem Satz 2.2.11, wobei wir  $\xi_i = e^{-\int_0^T r_i(x_s)ds} \max(0, S_i(x_T) - K)$  haben. So erhalten wir den gesuchten Erwartungswert  $\mu_\xi$ . Die Verteilung von  $\xi$  ist mit Satz 2.2.12 gegeben durch  $N(\mu_\xi, \frac{\sigma_\xi^2}{n})$ . Der Nachteil der Monte-Carlo Simulation ist die sehr langsame Konvergenz. Für eine gute Approximation muss man eine große Anzahl von Simulationen durchführen. Es ist möglich ein optimales Verhältnis von Wiederholungsanzahl  $n$  und Zeitintervall  $\Delta t$  bei vorgegebener Berechnungsdauer  $R$  zu bestimmen, hierfür siehe [Vei06] Kapitel 5.2.6.

### 2.2.3 Hilfsmittel der Numerik

Aus dem Bereich der Numerik benötigen wir vor allem die Begriffe „Finite Differenzen“, „Konsistenz“, „Stabilität“ und „Konvergenz“, wobei Konvergenz durch Konsistenz und Stabilität impliziert wird. Hier halten wir uns an die Definitionen aus [Bur07] Seite 15 ff.

Durch das in Kapitel 3 aufgestellte Modell erhalten wir eine partielle Differentialgleichung. Um diese approximieren zu können benötigen wir folgende Differenzen-Schemata. Wir beschränken uns auf den 3-dimensionalen Fall und notieren exemplarisch die Ableitungen in  $x_1$ -Richtung.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \approx D^v u(x_1, x_2, x_3) = \frac{u(x_1 + h, x_2, x_3) - u(x_1, x_2, x_3)}{h}$$

(Vorwärtsdifferenzenquotient),

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \approx D^r u(x_1, x_2, x_3) = \frac{u(x_1, x_2, x_3) - u(x_1 - h, x_2, x_3)}{h}$$

(Rückwärtsdifferenzenquotient),

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \approx D^z u(x_1, x_2, x_3) = \frac{u(x_1 + h, x_2, x_3) - u(x_1 - h, x_2, x_3)}{2h}$$

(zentraler Differenzenquotient).

Die natürliche Approximation für die zweite Ableitung ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} &\approx D^2 u(x_1, x_2, x_3) \\ &= \frac{u(x_1 + h, x_2, x_3) - 2u(x_1, x_2, x_3) + u(x_1 - h, x_2, x_3)}{h^2}. \end{aligned}$$

Bei der Approximation mit dem Vor- und Rückwärtsdifferenzenquotienten machen wir einen Fehler erster Ordnung in  $h$ , man spricht von einer *Konsistenzordnung eins*. Für den zentralen Differenzenquotienten und die Approximation der zweiten Ableitung, wie oben, haben wir *Konsistenzordnung zwei*. Mehr dazu erfahren wir in Kapitel 5.2. Zunächst folgende Definitionen und Sätze aus [Bur07] Seite 16.

**Definition 2.2.13** (Diskrete Konsistenz)

Sei  $L : C^k(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$  ein Differentialoperator der Ordnung  $k$  und  $L_h$  eine diskrete Approximation auf einem Gitter  $G_h$ . Die Approximation heißt diskret konsistent, falls

$$\|L_h(u|_{G_h}) - (Lu)|_{G_h}\|_h \rightarrow 0, \text{ für } h \rightarrow 0$$

gilt. Die Konsistenzordnung der Approximation ist  $m$ , falls

$$\|L_h(u|_{G_h}) - (Lu)|_{G_h}\|_h \leq Ch^m$$

für alle  $u \in C^{k+m}(\Omega)$  gilt.

Neben der Konsistenz brauchen wir noch eine weitere Eigenschaft, um die Güte einer numerischen Approximation zu bewerten.

**Definition 2.2.14** (Diskrete Stabilität)

Sei  $L_h : G_h \rightarrow \mathbb{R}^N$  die diskrete Approximation eines Differentialoperators. Dann heißt  $L_h$  diskret stabil, wenn  $L_h^{-1}$  existiert, für  $h > 0$  hinreichend klein und  $\|L_h^{-1}\|$  gleichmäßig in  $h$  beschränkt ist. Oder äquivalent, falls  $K > 0$  unabhängig von  $h$  existiert, so dass

$$\|u_h\| \leq K \|L_h u_h\|$$

gilt.

Wie bereits oben angedeutet erhalten wir aus den beiden Definitionen die Konvergenz.

**Satz 2.2.15** (Konvergenz)

Sei  $L_h : C^k(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$  eine stabile und konsistente Approximation eines Differentialoperators  $L : C^k(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$ . Sei  $u$  die Lösung der Differentialgleichung  $Lu = f$  und  $u_h$  die Lösung von  $L_h u_h = f_h$ , so dass  $f_h \rightarrow f$  für  $h \rightarrow 0$ . Dann ist die Approximation konvergent, d.h.  $u_h \rightarrow u$  für  $h \rightarrow 0$ .

*Beweis.* Wir subtrahieren die Gleichungen  $L_h u_h = f_h$  und  $Lu = f$  voneinander und erhalten

$$Lu - L_h u_h = f - f_h.$$

Weiter addieren wir  $L_h u$  und erhalten durch umformen

$$L_h(u - u_h) = (L_h - L)u + f - f_h.$$

Wegen der Stabilität folgt

$$\|u - u_h\| = \|L_h^{-1}((L_h - L)u + f - f_h)\| \leq \|L_h^{-1}\|(\|(L_h - L)u\| + \|f - f_h\|),$$

wobei  $\|L_h^{-1}\|$  gleichmäßig beschränkt ist. Da  $\|(L_h - L)u\| \rightarrow 0$  (Konsistenz) und  $\|f - f_h\| \rightarrow 0$ , folgt schon die Konvergenz  $\|u - u_h\| \rightarrow 0$ .  $\square$

Aus dem Satz können wir direkt ein Korollar für die Fehlerabschätzung ziehen.

**Korollar 2.2.16** (Fehlerabschätzung)

Sei  $L_h : C^k(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$  eine stabile und konsistente Approximation eines Differentialoperators  $L : C^k(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$  mit Konsistenzordnung  $m$ . Sei  $u$  die Lösung der Differentialgleichung  $Lu = f$  und  $u_h$  die Lösung von  $L_h u_h = f_h$ , so dass  $\|f_h - f\| = \mathcal{O}(h^m)$  für  $h \rightarrow 0$ . Dann gilt die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\| \leq Ch^m$$

für eine Konstante  $C > 0$ .

*Beweis.* Mit der obigen Abschätzung erhalten wir die Fehlerabschätzung direkt aus der Stabilität und Konsistenzordnung.  $\square$

Um zu zeigen, dass unsere Approximation von Integralen ebenfalls konsistent ist, benötigen wir folgenden Satz aus [Nat05].

**Satz 2.2.17**

Sei  $f \in C^2[a, b]$ ,  $I = \int_a^b f(x)dx$  und  $I_1 = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$ . Dann gilt

$$|I - I_1| \leq h^3 \frac{1}{12} \max_{x \in [a, b]} |f^{(2)}(x)|.$$

*Beweis.* Siehe Beweis zu Satz 6.1.1 in [Nat05].  $\square$

**2.2.4 Hilfsmittel der Analysis**

Die *Taylor'sche Formel*, doch insbesondere den Satz 2.2.19 benötigen wir um die Konsistenz unserer Diskretisierung zu zeigen.

**Satz 2.2.18** (Taylor'sche Formel, siehe [For04] §22 Satz 1)

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein aus mehr als einem Punkt bestehendes Intervall. Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $(n+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion und  $a \in I$ . Dann gilt für alle  $x \in I$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x),$$

wobei

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{n+1}(t) dt.$$

*Beweis.* Der Beweis folgt mit Induktion nach  $n$ . Siehe auch [For04] §22 Beweis zu Satz 1.  $\square$

Mit dem Mittelwertsatz erhalten wir diese Form:

**Satz 2.2.19** (Lagrangesche Form des Restglieds, siehe [For04] §22 Satz 2)  
*Sei  $I \subset \mathbb{R}$  wieder ein aus mehr als einem Punkt bestehendes Intervall. Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion und  $a, x \in I$ . Dann existiert ein  $\zeta$  zwischen  $a$  und  $x$ , so dass*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n + 1)!} (x - a)^{n+1}$$

*ist.*

*Beweis.* Siehe [For04] §22 Beweis zu Satz 2. □



### 3 Das mathematische Modell

Unser Modell beruht auf der so genannten „Lucas tree economy“. Hier wird die Produktion von Gütern der ganzen Wirtschaft mit einem Baum („Lucas Tree“, [Mar09]) der Früchte abwirft verglichen. Diese Früchte sind die produzierten Güter („aggregate endowment“) der Wirtschaft und können konsumiert werden. Diesen Prozess werden wir als gegeben annehmen.

Des Weiteren hat jeder Investor eine bestimmte Nutzenfunktion. Der Investor nimmt die Preise als gegeben an und entscheidet, ob er investiert. Zur Vereinfachung wird häufig angenommen, dass ein Investor alle repräsentiert. Durch die Annahmen im Kapitel 1.1.2 liegt ein geräumter Markt vor, das heißt alle Güter werden gehandelt, also alle produzierten Güter konsumiert.

#### 3.1 Die Modelldynamik

Wir gehen zuerst auf die Dynamik des Konsumverlaufes ein und anschließend auf die Nutzenfunktion des Investors, um später eine partielle Differentialgleichung herzuleiten.

##### 3.1.1 Die Dynamik des Konsumverlaufes

Wir modellieren unseren Konsumverlauf wie folgt:

$$\frac{dC_t}{C_t} = (\mu_c + \phi_c X_t)dt + \tilde{\sigma}_C \sqrt{V_t} dW_t.$$

Wir erkennen, dass die erwartete Wachstumsrate des Konsumprozesses mit einer Gewichtung  $\phi_c$  von einem stochastischen Prozess  $X_t$  und die Volatilität des Konsums mit einer Gewichtung  $\tilde{\sigma}_C$  von einem Prozess  $V_t$  abhängt. Der Zustandsverlauf  $X_t \in ]-\infty, +\infty[$  und die Volatilität  $V_t \in [0, +\infty[$  sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} dX_t &= -\kappa_X X_t dt + \tilde{\sigma}_X (\lambda \sqrt{V_t} + 1 - \lambda) dW_t, \\ dV_t &= \kappa_V (\bar{V} - V_t) dt + \tilde{\sigma}_V \sqrt{V_t} dW_t \end{aligned}$$

mit  $\lambda \in [0, 1]$ .  $\kappa_x$  und  $\kappa_v$  sind jeweils die Geschwindigkeiten der Mittelwert-rückkehr (Mean Reversion Speed,  $X_t$  zu Null und  $V_t$  zu  $\bar{V}$ ). Des Weiteren können der Zustandsverlauf  $X_t$ , der den Wohlstandsverlauf der Ökonomie widerspiegelt, und die Volatilität  $V_t$  „Sprünge“ enthalten, also sehr starke

Schwankungen aufweisen. Dann ergibt sich mit dem Modell von oben

$$\begin{aligned}\frac{dC_t}{C_t} &= (\mu_c + \phi_c X_t)dt + \tilde{\sigma}_C \sqrt{V_t} dW_t, \\ dX_t &= -\kappa_X X_t dt + \tilde{\sigma}_X (\lambda \sqrt{V_t} + 1 - \lambda) dW_t + \xi^x dN_t^x, \\ dV_t &= \kappa_V (\bar{V} - V_t) dt + \tilde{\sigma}_V \sqrt{V_t} dW_t + \xi^v dN_t^v.\end{aligned}$$

$N_t^x$  und  $N_t^v$  sind Poisson Prozesse mit Intensitäten  $(l_{x,0} + l_{x,1} \cdot V_t)$  und  $(l_{v,0} + l_{v,1} \cdot V_t)$ . Die Intensitäten sind also linear von der Volatilität abhängig. Die Sprunghöhen sind  $\xi^x$  und  $\xi^v$ , wobei  $\xi^x$  eine normalverteilte und  $\xi^v$  eine exponentialverteilte Zufallsvariable ist.

Zuletzt erweitern wir unseren Konsumverlauf durch einen weiteren Baum der Früchte abwirft („Lucas orchard“, siehe hierfür auch [Mar09]). Es soll also

$$C_t = C_{1,t} + C_{2,t}$$

gelten. Unser Modell sieht also wie folgt aus:

$$\begin{aligned}C_t &= C_{1,t} + C_{2,t}, \\ \frac{dC_{1,t}}{C_{1,t}} &= (\mu_{c_1} + \phi_{c_1} X_t)dt + \tilde{\sigma}_{C_1} \sqrt{V_t} dW_t, \\ \frac{dC_{2,t}}{C_{2,t}} &= (\mu_{c_2} + \phi_{c_2} X_t)dt + \tilde{\sigma}_{C_2} \sqrt{V_t} dW_t, \\ dX_t &= -\kappa_X X_t dt + \tilde{\sigma}_X (\lambda \sqrt{V_t} + 1 - \lambda) dW_t + \xi^x dN_t^x, \\ dV_t &= \kappa_V (\bar{V} - V_t) dt + \tilde{\sigma}_V \sqrt{V_t} dW_t + \xi^v dN_t^v.\end{aligned}$$

In diesen stochastischen Differentialgleichungen sind  $\tilde{\sigma}_{C_1}$ ,  $\tilde{\sigma}_{C_2}$ ,  $\tilde{\sigma}_X$  und  $\tilde{\sigma}_V$  Vektoren im  $\mathbb{R}^4$ . Diese Volatilitätsvektoren geben an, wie stark  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $X$  und  $V$  auf den vier-dimensionalen Wiener-Prozess reagieren. Im Folgenden sei  $\tilde{\sigma}_{C_1}^\top = (\sigma_1, 0, 0, 0)$ ,  $\tilde{\sigma}_{C_2}^\top = (0, \sigma_2, 0, 0)$ ,  $\tilde{\sigma}_X^\top = (0, 0, \sigma_X, 0)$  und  $\tilde{\sigma}_V^\top = (0, 0, 0, \sigma_V)$  das heißt, die zwei Konsumprozesse  $C_1$  und  $C_2$  und die beiden Zustandsgrößen  $X$  und  $V$  sind alle unkorreliert.

### 3.1.2 Die Nutzenfunktion

Um die Präferenz des repräsentativen Investors für den vorliegenden Konsumprozess  $(C_t)_{t \in \mathcal{T}}$  zu messen, werden wir die von Epstein und Zin ([EZ89]) entwickelte rekursive Nutzenfunktion

$$U(t) = [(1 - e^{-\beta dt})C_t^{1-\rho} + e^{-\beta dt} E_t(U(t+dt)^{1-\gamma})^{\frac{1-\rho}{1-\gamma}}]^{-\frac{1}{1-\rho}} \quad (2)$$

verwenden. Hierbei ist  $\gamma > 0$  die relative Risikoaversion,  $\Psi = \frac{1}{\rho} > 0$  die Elastizität der intertemporalen Substitution (elasticity of intertemporal substitution (EIS)) und  $\beta \geq 0$  ist die Zeitpräferenzrate (time preference rate) (typische Werte:  $\gamma \in [2; 10]$ ,  $\Psi \in [0.1; 2]$ ,  $\beta \in [0.0; 0.1]$ ). Der Vorteil dieser Nutzenfunktion ist, dass die Elastizität der intertemporalen Substitution unabhängig von der Risikoaversion ist. Genauer werden wir die Funktion

$$J_t = E_t \left[ \int_t^\infty f(c_s, J_s) ds \right] \quad (3)$$

nutzen (für Details siehe [BCDG10]). Hierbei bezeichnet  $f$  die „aggregator function“

$$f(C, J) = \frac{\beta C^{1-\frac{1}{\psi}}}{(1-\frac{1}{\psi})[(1-\gamma)J]^{\frac{1}{\theta}-1}} - \beta \theta J$$

mit  $\theta = \frac{1-\gamma}{1-\frac{1}{\psi}}$ .

### 3.2 Wohlstands-Konsum-Quotient

Da  $J(t) + \int_0^t f(C_s, J(s)) ds$  ein Martingal ist (*transversality condition*:  $\lim_{T \rightarrow \infty} E[J(T)] = 0$  ist erfüllt) erhalten wir aus (3)

$$E[dJ_t + f(C_t, J_t)dt] = 0. \quad (4)$$

Und wir setzen

$$J_t = \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \beta^\theta I(s_t, X_t, V_t)^\theta, \quad (5)$$

wobei  $I(s_t, X_t, V_t)$  der *Wohlstands-Konsum-Quotient* ist (siehe [BCDG10]). Das Bestimmen dieses Quotienten wird der Hauptteil dieser Diplomarbeit sein. Hierfür werden wir (4) mit Hilfe von Ito's Lemma 2.2.9 in eine partielle Differentialgleichung von  $I(s_t, X_t, V_t)$  (für  $s_t$  siehe (6)) schreiben.

Wir schreiben unser Modell nochmal auf

$$\begin{aligned} C_t &= C_{1,t} + C_{2,t}, \\ \frac{dC_{1,t}}{C_{1,t}} &= (\mu_{c_1} + \phi_{c_1} X_t) dt + \sigma_{c_1} dW_t, \\ \frac{dC_{2,t}}{C_{2,t}} &= (\mu_{c_2} + \phi_{c_2} X_t) dt + \sigma_{c_2} dW_t, \\ dX_t &= \mu_x dt + \sigma_x dW_t + \xi^x dN_t^x, \\ dV_t &= \mu_v dt + \sigma_v dW_t + \xi^v dN_t^v, \end{aligned}$$

wobei wir  $\tilde{\sigma}_{C_1}\sqrt{V_t} = \sigma_{c_1}$ ,  $\tilde{\sigma}_{C_2}\sqrt{V_t} = \sigma_{c_2}$ ,  $-\kappa_X X_t = \mu_x$ ,  $\tilde{\sigma}_X(\lambda\sqrt{V_t} + 1 - \lambda) = \sigma_x$ ,  $\kappa_V(\bar{V} - V_t) = \mu_v$  und  $\tilde{\sigma}_V\sqrt{V_t} = \sigma_v$  gesetzt haben.

Nun soll  $s_t \in [0, 1]$  der Anteil des ersten „Baums“ an den insgesamt produzierten Gütern sein, also

$$s_t = \frac{C_{1,t}}{C_{1,t} + C_{2,t}}. \quad (6)$$

Dann folgt via Ito

$$ds_t = \mu_s dt + \sigma_s dW_t,$$

mit

$$\begin{aligned} \mu_s = & s_t(1 - s_t)[\mu_{c_1} - \mu_{c_2} + (\phi_{c_1} - \phi_{c_2})X_t - s_t\sigma_{c_1}^\top\sigma_{c_1} + (1 - s_t)\sigma_{c_2}^\top\sigma_{c_2} \\ & + (2s_t - 1)\sigma_{c_1}^\top\sigma_{c_2}], \\ \sigma_s = & s_t(1 - s_t)[\sigma_{c_1} - \sigma_{c_2}]. \end{aligned}$$

Weiter folgt für die Dynamik des ganzen Konsumverlaufs:

$$\frac{dC_t}{C_t} = \mu_c dt + \sigma_c dW_t,$$

mit

$$\begin{aligned} \mu_C = & (s_t\mu_{c_1} + (1 - s_t)\mu_{c_2}) + (s_t\phi_{c_1} + (1 - s_t)\phi_{c_2})X_t, \\ \sigma_C = & s_t\sigma_{c_1} + (1 - s_t)\sigma_{c_2}. \end{aligned}$$

Und somit für  $c_t = \log(C_t)$

$$dc_t = (\mu_c - \frac{1}{2}\sigma_c^2)dt + \sigma_c dW_t.$$

Diesen Konsumprozess  $(C_t)_{t \in \mathcal{T}}$  bewertet unser repräsentativer Investor mit der Nutzenfunktion (3), woraus wir (4) erhalten, mit  $J_t = \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\beta^\theta I^\theta$  und

$$f(C, J) = \frac{\beta C^{1-\frac{1}{\psi}}}{(1 - \frac{1}{\psi})[(1 - \gamma)J]^{\frac{1}{\theta}-1}} - \beta\theta J.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & E[dJ_t + f(C_t, J_t)dt] = 0 \\ \iff & E\left[\frac{dJ_t}{J} + \frac{f(C_t, J_t)dt}{J}\right] = 0 \\ \iff & E\left[\frac{d\left(\frac{C_t^{1-\gamma}}{(1-\gamma)}\beta^\theta I^\theta\right)}{J} + \frac{\theta}{I}dt - \beta\theta dt\right] = 0 \\ \iff & E\left[\frac{d\left(\frac{\beta^\theta}{(1-\gamma)}e^{(1-\gamma)\ln(C_t) + \theta\ln(I)}\right)}{J} + \frac{\theta}{I}dt - \beta\theta dt\right] = 0. \end{aligned}$$

Wir wenden das Lemma von Ito an, wobei die Sprungprozesse separat berücksichtigen ( $[dJ]_{Total} = [dJ]_{BB} + [dJ]_{Jump}$ ). Diese Aufteilung kann vorgenommen werden, da die Volatilität zwar die Aktie, aber die Aktie nicht die Volatilität beeinflusst (siehe auch [For11] oder [CT04] Kapitel 8.3.2):

$$\begin{aligned}
 E \left[ (1 - \gamma) \left[ \frac{dC}{C} - \frac{1}{2} \gamma \frac{(dC)^2}{C^2} \right] + \theta \left( \frac{dI}{I} + \frac{1}{2} (\theta - 1) \frac{(dI)^2}{I^2} + \theta (1 - \gamma) \frac{dC}{C} \frac{dI}{I} \right) \right. \\
 + \frac{\theta}{I} dt - \beta \theta dt \\
 + \frac{J(s_t, X_{t^-} + \xi^x, V_t) - J(s_t, X_{t^-}, V_t)}{J(s_t, X_{t^-}, V_t)} dN_t^x \\
 \left. + \frac{J(s_t, X_t, V_{t^-} + \xi^v) - J(s_t, X_t, V_{t^-})}{J(s_t, X_t, V_{t^-})} dN_t^v \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Hier ist zum Beispiel  $X_{t^-}$  der Wert von  $X_t$  vor dem Sprung. Wir rechnen nun  $dI$ ,  $(dI)^2$ ,  $\frac{dC}{C}$  und  $\frac{(dC)^2}{C^2}$  aus, wobei wir Terme mit  $(dt)^2$  vernachlässigen und  $(dW_t)^2$  mit seinem Erwartungswert  $dt$  approximieren (siehe Lemma 2.2.9). Setzen wir dies ein und nutzen  $J_t = \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \beta^\theta I^\theta$ , erhalten wir

$$\begin{aligned}
 E \left[ (1 - \gamma) [(\mu_C dt - \sigma_C dW_t) - \frac{1}{2} \gamma \sigma_C^\top \sigma_C dt] \right. \\
 + \frac{\theta}{I} [I_s(\mu_s dt + \sigma_s dW_t) + I_x(\mu_x dt + \sigma_x dW_t) + I_v(\mu_v dt + \sigma_v dW_t) \\
 + \frac{1}{2} (I_{ss} \sigma_s^\top \sigma_s dt + I_{xx} \sigma_x^\top \sigma_x dt + I_{vv} \sigma_v^\top \sigma_v dt \\
 + 2I_{sx} \sigma_s^\top \sigma_x dt + 2I_{sv} \sigma_s^\top \sigma_v dt + 2I_{xv} \sigma_x^\top \sigma_v dt)] \\
 + \frac{1}{2} \frac{\theta(\theta - 1)}{I^2} [(I_s^2 \sigma_s^\top \sigma_s + I_x^2 \sigma_x^\top \sigma_x + I_v^2 \sigma_v^\top \sigma_v \\
 + 2I_s I_v \sigma_s^\top \sigma_v + 2I_s I_x \sigma_s^\top \sigma_x + 2I_x I_v \sigma_x^\top \sigma_v) dt] \\
 + \frac{\theta(1 - \gamma)}{I} [\sigma_C^\top (I_s \sigma_s + I_x \sigma_x + I_v \sigma_v)] dt + \frac{\theta}{I} dt - \beta \theta dt \\
 + \frac{I(s_t, X_{t^-} + \xi^x, V_t)^\theta - I(s_t, X_{t^-}, V_t)^\theta}{I(s_t, X_{t^-}, V_t)^\theta} dN_t^x \\
 \left. + \frac{I(s_t, X_t, V_{t^-} + \xi^v)^\theta - I(s_t, X_t, V_{t^-})^\theta}{I(s_t, X_t, V_{t^-})^\theta} dN_t^v \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Abschließend rechnen wir den Erwartungswert aus. Hierbei gilt

$$\begin{aligned}
 & E[(I(s_t, X_{t^-} + \xi^x, V_t)^\theta - I(s_t, X_{t^-}, V_t)^\theta) dN_t^x] \\
 = & \left( E[I(s_t, X_{t^-} + \xi^x, V_t)^\theta - I(s_t, X_{t^-}, V_t)^\theta] \right) \cdot E[dN_t^x] \\
 = & \left( E[I(s_t, X_{t^-} + \xi^x, V_t)^\theta] - E[I(s_t, X_{t^-}, V_t)^\theta] \right) (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot V_t) dt \\
 = & \left( E[I(s_t, X_{t^-} + \xi^x, V_t)^\theta] - I(s_t, X_{t^-}, V_t)^\theta \right) (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot V_t) dt \\
 = & \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi^x) I(s_t, X_{t^-} + \xi^x, V_t)^\theta d\xi^x - I(s_t, X_{t^-}, V_t)^\theta \right) (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot V_t) dt,
 \end{aligned}$$

wobei  $g(\xi^x)$  die Dichtefunktion von  $\xi^x$  ist. Weiter haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass die Sprünge unkorreliert zueinander sind und das Auftreten eines Sprunges unabhängig von dessen Sprunghöhe ist. Die Rechnung für den Sprung in  $V_t$  ist analog mit  $h(\xi^v)$  als Dichtefunktion von  $\xi^v$ .

Wir erhalten unsere partielle Differentialgleichung in I:

$$\begin{aligned}
 (1 - \gamma)[\mu_C - \frac{1}{2}\gamma\sigma_C^\top\sigma_C] & \tag{7} \\
 + \frac{\theta}{I}[I_s\mu_s + I_x\mu_x + I_v\mu_v & \\
 + \frac{1}{2}I_{ss}\sigma_s^\top\sigma_s + \frac{1}{2}I_{xx}\sigma_x^\top\sigma_x + \frac{1}{2}I_{vv}\sigma_v^\top\sigma_v & \\
 + I_{sx}\sigma_s^\top\sigma_x + I_{sv}\sigma_s^\top\sigma_v + I_{vx}\sigma_v^\top\sigma_x] & \\
 + \frac{1}{2}\frac{\theta(\theta - 1)}{I^2}[I_s^2\sigma_s^\top\sigma_s + I_x^2\sigma_x^\top\sigma_x + I_v^2\sigma_v^\top\sigma_v & \\
 + 2I_sI_x\sigma_s^\top\sigma_x + 2I_sI_v\sigma_s^\top\sigma_v + 2I_xI_v\sigma_x^\top\sigma_v] & \\
 + \frac{\theta(1 - \gamma)}{I}[\sigma_C^\top(I_s\sigma_s + I_x\sigma_x + I_v\sigma_v)] + \frac{\theta}{I} - \beta\theta & \\
 + (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot V_t) \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi^x) I(s_t, X_{t^-} + \xi^x, V_t)^\theta d\xi^x - I(s_t, X_t, V_t)^\theta}{I(s_t, X_t, V_t)^\theta} & \\
 + (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot V_t) \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi^v) I(s_t, X_t, V_{t^-} + \xi^v)^\theta d\xi^v - I(s_t, X_t, V_t)^\theta}{I(s_t, X_t, V_t)^\theta} = 0. &
 \end{aligned}$$

### 3.3 Risikofreie Zinsrate und der Marktpreis des Risikos

Um die *risikofreie Zinsrate* und den *Marktpreis für das Risiko* zu bestimmen, benötigen wir den *Pricing Kernel*. Der Pricing Kernel in unserer Wirtschaft ist gegeben durch ([BCDG10] Seite 22):

$$\Pi_t = e^{-\beta\theta t - (1-\theta) \int_0^t I(s_u, X_u, V_u)^{-1} du} C_t^{-\gamma} I(s_t, X_t, V_t)^{\theta-1}.$$

Der Pricing Kernel spiegelt den Wert einer monetären Einheit im jeweiligen volkswirtschaftlichen Zustand wider ([Zai06] Seite 12). Die Drift des Pricing Kernels gibt uns den risikolosen Zins mit umgekehrten Vorzeichen. Die Dynamik des Pricing Kernels bekommen wir wieder mit dem Lemma von Ito, wobei

$$\begin{aligned} d\Pi &= \Pi\left(-\beta\theta - \frac{1-\theta}{I}\right)dt \\ &+ \Pi(-\gamma)C^{-1}dC \\ &+ \Pi(\theta-1)I^{-1}dI \\ &+ \Pi\frac{1}{2}(-\gamma)(-\gamma-1)C^{-2}(dC)^2 \\ &+ \Pi\frac{1}{2}(\theta-1)(\theta-2)I^{-2}(dI)^2 \\ &+ \Pi(-\gamma)(\theta-1)C^{-1}I^{-1}dC dI \\ &+ \Pi\left(\frac{I^{\theta-1}(s_t, X_{t^-} + \xi^x, V_t)}{I^{\theta-1}(s_t, X_{t^-}, V_t)} - 1\right) dN_t^x \\ &+ \Pi\left(\frac{I^{\theta-1}(s_t, X_t, V_{t^-} + \xi^v)}{I^{\theta-1}(s_t, X_t, V_{t^-})} - 1\right) dN_t^v \end{aligned}$$

gilt und wir anschließend

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{\Pi} &= \mu_\Pi dt + \sigma_\Pi dW_t + \left(\frac{I^{\theta-1}(s_t, X_{t^-} + \xi^x, V_t)}{I^{\theta-1}(s_t, X_{t^-}, V_t)} - 1\right) dN_t^x \\ &+ \left(\frac{I^{\theta-1}(s_t, X_t, V_{t^-} + \xi^v)}{I^{\theta-1}(s_t, X_t, V_{t^-})} - 1\right) dN_t^v, \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \mu_{\Pi} = & -\beta\theta - \frac{1-\theta}{I} + \gamma(-\mu_C + \frac{1}{2}(\gamma+1)\sigma_C^\top\sigma_C) \\
 & + \frac{\theta-1}{I}(I_s\mu_s + I_x\mu_x + I_v\mu_v + \frac{1}{2}I_{ss}\sigma_s^\top\sigma_s + \frac{1}{2}I_{xx}\sigma_x^\top\sigma_x + \frac{1}{2}I_{vv}\sigma_v^\top\sigma_v \\
 & \quad + I_{sx}\sigma_s^\top\sigma_x + I_{sv}\sigma_s^\top\sigma_v + I_{xv}\sigma_x^\top\sigma_v) \\
 & + \frac{1}{2}\frac{(\theta-1)(\theta-2)}{I^2}(I_s^2\sigma_s^2 + I_x^2\sigma_x^2 + I_v^2\sigma_v^2 \\
 & \quad + 2I_sI_x\sigma_s^\top\sigma_x + 2I_sI_v\sigma_s^\top\sigma_v + 2I_xI_v\sigma_x^\top\sigma_v) \\
 & - \gamma\frac{\theta-1}{I}\sigma_C^\top(I_s\sigma_s + I_x\sigma_x + I_v\sigma_v)
 \end{aligned}$$

und

$$\sigma_{\Pi} = -\gamma\sigma_C + \frac{\theta-1}{I}(I_s\sigma_s + I_x\sigma_x + I_v\sigma_v)$$

erhalten. Die risikofreie Zinsrate ist dann

$$\begin{aligned}
 r_t &= -\frac{E\left[\frac{d\Pi}{\Pi}\right]}{dt} \\
 &= -\mu_{\Pi} - (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot V_t)\bar{\mathcal{J}}I^{\theta-1}(X) - (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot V_t)\bar{\mathcal{J}}I^{\theta-1}(V),
 \end{aligned}$$

wobei

$$\bar{\mathcal{J}}I(X) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi^x)I(s_t, X_{t-} + \xi^x, V_t)d\xi^x - I(s_t, X_t, V_t)}{I(s_t, X_t, V_t)}$$

und

$$\bar{\mathcal{J}}I(V) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi^v)I(s_t, X_t, V_{t-} + \xi^v)d\xi^v - I(s_t, X_t, V_t)}{I(s_t, X_t, V_t)}$$

ist. Diese Gleichung können wir mit der partiellen Differentialgleichung (7) (multipliziert mit  $\frac{\theta-1}{\theta}$ ) aus Kapitel 3.2 vereinfachen und erhalten

$$\begin{aligned}
 r_t = & \beta + \frac{1}{\Psi}\mu_C - \frac{1}{2}\gamma\left(1 + \frac{1}{\Psi}\right)\sigma_C^\top\sigma_C \\
 & + \frac{1}{2}\frac{(\theta-1)}{I^2}\left[I_s^2\sigma_s^\top\sigma_s + I_x^2\sigma_x^\top\sigma_x + I_v^2\sigma_v^\top\sigma_v \right. \\
 & \quad \left. + 2I_sI_x\sigma_s^\top\sigma_x + 2I_sI_v\sigma_s^\top\sigma_v + 2I_xI_v\sigma_x^\top\sigma_v\right] \\
 & - \frac{(1-\theta)}{I}\left[\sigma_C^\top(I_s\sigma_s + I_x\sigma_x + I_v\sigma_v)\right] \\
 & + (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot V_t)\left(\frac{\theta-1}{\theta}\bar{\mathcal{J}}I^\theta(X) - \bar{\mathcal{J}}I^{\theta-1}(X)\right) \\
 & + (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot V_t)\left(\frac{\theta-1}{\theta}\bar{\mathcal{J}}I^\theta(V) - \bar{\mathcal{J}}I^{\theta-1}(V)\right).
 \end{aligned}$$



Formulieren wir die Dynamik des Pricing Kernels mit  $r_t$ , erkennen wir die Risikoprämien sowohl für die Diffusion als auch für den Sprung:

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{\Pi} &= -r_t dt - (\gamma\sigma_C - \frac{\theta - 1}{I}(I_s\sigma_s + I_x\sigma_x + I_v\sigma_v))dW_t \\ &+ \left( \frac{I^{\theta-1}(s_t, X_{t^-} + \xi^x, V_t)}{I^{\theta-1}(s_t, X_{t^-}, V_t)} - 1 \right) dN_t^x - (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot V_t)\bar{\mathcal{J}}I^\theta(X)dt \\ &+ \left( \frac{I^{\theta-1}(s_t, X_t, V_{t^-} + \xi^v)}{I^{\theta-1}(s_t, X_t, V_{t^-})} - 1 \right) dN_t^v - (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot V_t)\bar{\mathcal{J}}I^\theta(V)dt. \end{aligned}$$

### 3.4 Preis-Dividenden-Quotient

Mit Hilfe des Pricing Kernels können wir nun die Preise von Wirtschaftsgütern, z.B. Aktien, mit verschiedenen zukünftigen Dividenden berechnen. Die Dynamiken der Dividenden sind wie folgt modelliert:

$$\begin{aligned} \frac{dD_{1,t}}{D_{1,t}} &= (\mu_{D_1} + \phi_{D_1}X_t)dt + \tilde{\sigma}_{D_1}\sqrt{V_t}(\rho_{C_1,D_1}dW_{C_1,t} + \sqrt{1 - \rho_{C_1,D_1}^2}dW_{D_{1,t}}), \\ \frac{dD_{2,t}}{D_{2,t}} &= (\mu_{D_2} + \phi_{D_2}X_t)dt + \tilde{\sigma}_{D_2}\sqrt{V_t}(\rho_{C_2,D_2}dW_{C_2,t} + \sqrt{1 - \rho_{C_2,D_2}^2}dW_{D_{2,t}}). \end{aligned}$$

Also gilt für die log-Dividende

$$\begin{aligned} d\delta_{1,t} &= (\mu_{D_1} + \phi_{D_1}X_t - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_{D_1}^2V_t)dt \\ &+ \tilde{\sigma}_{D_1}\sqrt{V_t}(\rho_{C_1,D_1}dW_{C_1,t} + \sqrt{1 - \rho_{C_1,D_1}^2}dW_{D_{1,t}}), \end{aligned}$$

mit  $\delta_{1,t} = \log(D_{1,t})$ . Die Korrelationskoeffizienten  $\rho_{C_1,D_1}$  bzw.  $\rho_{C_2,D_2}$  beschreiben die Abhängigkeit zum jeweiligen Konsumprozess. Der Preis eines Assets  $P(s_t, X_t, V_t, D_t)$  berechnet sich mit der Standard Diskontierungsformel (siehe auch [BCDG10])

$$\Pi_t P_t = E_t \left[ \int_t^\infty \Pi_s D_s ds \right].$$

Da  $\Pi_t P_t + \int_0^t \Pi_s D_s ds$  ein Martingal ist, erhalten wir genauso wie oben beim Wohlstands-Konsum-Quotienten die Gleichung

$$E[d(\Pi_t P_t) + \Pi_t D_t dt] = 0.$$

Daraus erhalten wir

$$\frac{1}{dt} E[d\Pi P + d\Pi P + d\Pi dP] + \Pi D = 0.$$

Nun teilen wir durch  $D$  und  $\Pi$  und nutzen  $E[\frac{d\Pi}{\Pi}] = -r dt$ , weiter definieren wir den *Preis-Dividenden-Quotient*  $L(s_t, X_t, V_t)$  mit  $L := \frac{P}{D}$  und erhalten

$$\begin{aligned} & -rL + \frac{L}{dt} E \left[ \frac{dL}{L} + \frac{dD}{D} + \frac{dLdD}{LD} \right] \\ & + \frac{L}{dt} E \left[ \frac{d\Pi}{\Pi} \left( \frac{dL}{L} + \frac{dD}{D} + \frac{dLdD}{LD} \right) \right] + 1 = 0. \end{aligned}$$

Wenden wir das Lemma von Ito an, um die Dynamik von  $L$  zu erhalten und setzen die Dynamik von  $\Pi$  ein, erhalten wir eine partielle Differentialgleichung für  $L$ :

$$\begin{aligned} & -rL + L_s \mu_s + L_x \mu_x + L_v \mu_v \tag{8} \\ & + \frac{1}{2} (L_{ss} \sigma_s^\top \sigma_s + L_{xx} \sigma_x^\top \sigma_x + L_{vv} \sigma_v^\top \sigma_v) \\ & + \sigma_D (L_s \sigma_s + L_x \sigma_x + L_v \sigma_v) + \sigma_\Pi (L_s \sigma_s + L_x \sigma_x + L_v \sigma_v + L \sigma_D) + L \mu_D + 1 \\ & + \frac{(l_{x,0} + l_{x,1} \cdot V_t)}{I^{\theta-1}(s_t, X_t, V_t)} E \left[ I^{\theta-1}(s_t, X_{t-} + \xi^x, V_t) \left( L(s_t, X_{t-} + \xi^x, V_t) - L(s_t, X_t, V_t) \right) \right] \\ & + \frac{(l_{v,0} + l_{v,1} \cdot V_t)}{I^{\theta-1}(s_t, X_t, V_t)} E \left[ I^{\theta-1}(s_t, X_t, V_{t-} + \xi^v) \left( L(s_t, X_t, V_{t-} + \xi^v) - L(s_t, X_t, V_t) \right) \right] \\ & = 0. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung ist also unabhängig von einem Dividend-Share, da man die Dividenden einzeln bewertet und sie voneinander unkorreliert sind.  $\mu_D$  und  $\sigma_D$  stehen für den Drift bzw. für die Volatilität der zu bewertenden Dividende. Möchte man den Stream von  $D_1$  bewerten, gilt  $\sigma_D^\top = \sigma_{D_1}^\top = (\tilde{\sigma}_{D_1} \sqrt{V_t} \rho_{C_1, D_1}, 0, 0, 0, \tilde{\sigma}_{D_1} \sqrt{V_t} \sqrt{1 - \rho_{C_1, D_1}^2}, 0)$  und  $\mu_D = \mu_{D_1} + \phi_{D_1} X_t$ . Hier sind wir wieder zur Vektorschreibweise übergegangen, wobei hier nun die Vektoren aus dem  $\mathbb{R}^5$  sind. Dementsprechend gilt  $(W_t)^\top = (W_{C_1}, W_{C_2}, W_X, W_V, W_{D_1})$ . Bewertet man den Konsum, setzt also  $D = C_1 + C_2$ , erkennt man, dass die partielle Differentialgleichung (8) natürlich auch von  $I$  gelöst wird und bestätigt, dass  $I$  der Wohlstands-Konsum-Quotient ist.

## 4 Mathematische Analyse des Wohlstands-Konsum-Quotienten

Wir wollen nun die im Kapitel 3 hergeleitete partielle Differentialgleichung für den Wohlstands-Konsum-Quotienten genauer untersuchen. Zuerst wollen wir ermitteln, ob sie elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch ist, um anschließend die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung zu zeigen.

### 4.1 Allgemeine Strukturbetrachtung der PDGL

Um unsere partielle Differentialgleichung (7) einem Grundtyp zuzuordnen und den nichtlinearen Anteil in einem Term zu bündeln, werden wir sie mit  $I(s_t, X_t, V_t)^\theta$  multiplizieren und setzen  $I(s_t, X_t, V_t)^\theta = u(s_t, X_t, V_t)$ . So erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & (1 - \gamma)[\mu_C - \frac{1}{2}\gamma\sigma_C^\top\sigma_C]u \\
 & + u_s\mu_s + u_x\mu_x + u_v\mu_v + \frac{1}{2}u_{ss}\sigma_s^\top\sigma_s + \frac{1}{2}u_{xx}\sigma_x^\top\sigma_x + \frac{1}{2}u_{vv}\sigma_v^\top\sigma_v \\
 & + u_{sx}\sigma_s^\top\sigma_x + u_{sv}\sigma_s^\top\sigma_v + u_{xv}\sigma_x^\top\sigma_v \\
 & + (1 - \gamma)\sigma_C^\top(u_s\sigma_s + u_x\sigma_x + u_v\sigma_v) + \theta u^{1-\frac{1}{\theta}} - \beta\theta u \\
 & + (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot V_t) \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi^x)u(s_t, X_{t-} + \xi^x, V_t)d\xi^x - (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot V_t)u \\
 & + (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot V_t) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi^v)u(s_t, X_t, V_{t-} + \xi^v)d\xi^v - (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot V_t)u = 0,
 \end{aligned}$$

wobei Folgendes zu beachten ist:

$$\begin{aligned}
 u &= I^\theta, \\
 u_s &= \theta I^{\theta-1} I_s, \\
 u_x &= \theta I^{\theta-1} I_x, \\
 u_v &= \theta I^{\theta-1} I_v, \\
 u_{ss} &= \theta I^{\theta-1} [I_{ss} + (\theta - 1) \frac{I_s^2}{I}], \\
 u_{xx} &= \theta I^{\theta-1} [I_{xx} + (\theta - 1) \frac{I_x^2}{I}], \\
 u_{vv} &= \theta I^{\theta-1} [I_{vv} + (\theta - 1) \frac{I_v^2}{I}],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{sx} &= \theta I^{\theta-1} [I_{sx} + (\theta - 1) \frac{I_s I_x}{I}], \\ u_{xv} &= \theta I^{\theta-1} [I_{xv} + (\theta - 1) \frac{I_x I_v}{I}], \\ u_{sv} &= \theta I^{\theta-1} [I_{sv} + (\theta - 1) \frac{I_s I_v}{I}]. \end{aligned}$$

Nutzen wir aus, dass sowohl die Volatilität  $\sigma_s$  zu  $\sigma_x$  und  $\sigma_v$ , als auch  $\sigma_C$  zu  $\sigma_x$  und  $\sigma_v$  unkorreliert ist (also z.B.  $\sigma_s^\top \sigma_x = 0$ ), so haben wir nur noch

$$\begin{aligned} & (1 - \gamma) [\mu_C - \frac{1}{2} \gamma \sigma_C^\top \sigma_C] u \\ & + u_s \mu_s + u_x \mu_x + u_v \mu_v + \frac{1}{2} u_{ss} \sigma_s^\top \sigma_s + \frac{1}{2} u_{xx} \sigma_x^\top \sigma_x + \frac{1}{2} u_{vv} \sigma_v^\top \sigma_v \\ & + (1 - \gamma) \sigma_C^\top u_s \sigma_s + \theta u^{1-\frac{1}{\theta}} - \beta \theta u \\ & + (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot V_t) \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi^x) u(s_t, X_{t-} + \xi^x, V_t) d\xi^x - (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot V_t) u \\ & + (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot V_t) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi^v) u(s_t, X_t, V_{t-} + \xi^v) d\xi^v - (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot V_t) u = 0 \end{aligned}$$

oder äquivalent

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (u_{ss} \sigma_s^\top \sigma_s + u_{xx} \sigma_x^\top \sigma_x + u_{vv} \sigma_v^\top \sigma_v) \\ & + u_s \mu_s + u_x \mu_x + u_v \mu_v + (1 - \gamma) \sigma_C^\top u_s \sigma_s \\ & + \left[ (1 - \gamma) [\mu_C - \frac{1}{2} \gamma \sigma_C^\top \sigma_C] - \beta \theta - (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot V_t) - (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot V_t) \right] u \\ & + \theta u^{1-\frac{1}{\theta}} \\ & + (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot V_t) \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi^x) u(s_t, X_{t-} + \xi^x, V_t) d\xi^x \\ & + (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot V_t) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi^v) u(s_t, X_t, V_{t-} + \xi^v) d\xi^v = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Um das Aufschreiben zu erleichtern soll  $(s_t, X_t, V_t) = (x_1, x_2, x_3)$  gelten und  $U = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_1 \leq 1, x_{2min} \leq x_2 \leq x_{2max}, 0 \leq x_3 \leq x_{3max}\}$ , wobei  $x_{2min}$ ,  $x_{2max}$  und  $x_{3max}$  so gewählt sind, dass für die Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2 + \xi^x, x_3) d\xi^x \approx \int_U u(x_1, x_2 + \xi^x, x_3) d\xi^x$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(s_t, X_t, V_t + \xi^v) d\xi^v \approx \int_U u(x_1, x_2 + \xi^x, x_3) d\xi^v$$

gilt. Im weiteren Verlauf werden noch zusätzliche Bedingungen an  $U$  folgen. Wir schreiben die Gleichung (9) nun in der Form

$$Lu = F(u). \quad (10)$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} Lu &= (L_0 + L_1 + L_2)u, \\ L_0 u &= - \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + c(x)u(x), \\ L_1 u &= \sum_{i=1}^3 b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + d(x)u(x), \\ L_2 u &= - (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) \int_U g(\xi^x) u(x_1, x_2 + \xi^x, x_3) d\xi^x \\ &\quad - (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3) \int_U h(\xi^v) u(x_1, x_2, x_3 + \xi^v) d\xi^v, \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} A(x) &= (a_{ij}(x))_{i,j=1}^3 \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1^2(1-x_1)^2 x_3 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_X^2 (\lambda \sqrt{x_3} + (1-\lambda))^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_V^2 x_3 \end{pmatrix}, \\ b(x) &= - \begin{pmatrix} b_1 \\ -\kappa_x x_2 \\ \kappa_v (\bar{V} - x_3) \end{pmatrix}, \\ c(x) &= -(1-\gamma)(x_1 \mu_{c_1} + (1-x_1) \mu_{c_2}) + (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) + (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3), \\ d(x) &= \frac{1}{2} \gamma (1-\gamma) (x_1^2 x_3 \sigma_1^2 + (1-x_1)^2 x_3 \sigma_2^2) + \beta \theta \\ &\quad - (1-\gamma)(x_1 \phi_{c_1} + (1-x_1) \phi_{c_2}) x_2, \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} b_1 &= x_1(1-x_1)[\mu_{c_1} - \mu_{c_2} + (\phi_{c_1} - \phi_{c_2})x_2 - x_1 \sigma_1^2 x_3 + (1-x_1) \sigma_2^2 x_3] \\ &\quad + (1-\gamma)(x_1^2(1-x_1)x_3 \sigma_1^2 - x_1(1-x_1)^2 x_3 \sigma_2^2) \end{aligned}$$

und

$$F(u) = \theta u^{1-\frac{1}{\theta}}.$$

**Bemerkung 4.1.1**

Es sind  $a(x), b(x), c(x), d(x) \in C^\infty(\bar{U})$  und für  $\theta \leq -\frac{1}{2}$  gilt  $F(u) \in \mathcal{L}^2(U)$   $\forall u \in H^1(U)$ .

*Beweis.*  $\|F(u)\|_{\mathcal{L}^2(U)} = \left( \int_U \left| \theta u^{1-\frac{1}{\theta}} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$ ,

falls  $0 \leq \int_U \left| \theta u^{1-\frac{1}{\theta}} \right|^2 dx \leq 1$ .

Ist  $\int_U \left| \theta u^{1-\frac{1}{\theta}} \right|^2 dx > 1$ , gilt

$$\begin{aligned} \|F(u)\|_{\mathcal{L}^2(U)} &= \left( \int_U \left| \theta u^{1-\frac{1}{\theta}} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \int_U \left| \theta u^{1-\frac{1}{\theta}} \right|^2 dx \leq |\theta|^2 \int_U \left| (u^{1-\frac{1}{\theta}}) \right|^2 dx \\ &\leq |\theta|^2 \underbrace{\int_U |u|^{2-\frac{2}{\theta}} dx}_{< \infty, \text{ da } H^1(U) \hookrightarrow \mathcal{L}^6(U)} < \infty. \end{aligned}$$

□

**Definition 4.1.2** (elliptischer Differentialoperator)

(i) *Der Differentialoperator*

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + (c(x) + d(x))u$$

heißt elliptisch in  $x$ , falls alle  $n$  Eigenwerte der Matrix  $A(x)$  das gleiche Vorzeichen ( $\pm 1$ ) besitzen (d.h. falls  $A(x)$  positiv oder negativ definit ist).

(ii) *Der Differentialoperator heißt elliptisch in  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , wenn er in allen  $x \in \Omega$  elliptisch ist.*

**Korollar 4.1.3**

Die Differentialgleichung (10) ist elliptisch.

## 4.2 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung für eine elliptische PDGL

Nachdem wir gezeigt haben, dass wir eine elliptische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vorliegen haben, wollen wir die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung unter bestimmten Voraussetzungen zeigen. Dafür werden

wir zunächst unser Problem vereinfachen. Unser Problem sei nun wie folgt:

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } U \\ u = g & \text{auf } \partial U. \end{cases} \quad (11)$$

Hier ist unser  $f$  noch nicht abhängig von  $u$ . Weiter sei  $f \in L^2(U)$ . Um zu zeigen, dass ein  $u \in H^1(U)$  für das Problem (11) existiert, betrachten wir das äquivalente Problem

$$\begin{cases} L\tilde{u} = \tilde{f} & \text{in } U \\ \tilde{u} = 0 & \text{auf } \partial U, \end{cases} \quad (12)$$

wobei  $\tilde{u} = u - w \in H_0^1(U)$ ,  $\tilde{f} = f - Lw \in H^{-1}(U)$  und  $w$  aus der Spur von  $g$  ist (siehe auch [Eva08] S. 297).

Nun gehen wir vor wie in [Bur08] Seite 58ff. und nehmen an, dass  $a \in L^\infty(U)$  und  $c \in L^\infty(U)$  gilt. Weiter fordern wir für  $a$  eine gleichmässige untere Schranke und für  $c$  nur eine untere Schranke, d.h.

$$a(x) \geq \alpha > 0, \quad c(x) \geq 0 \text{ für fast alle } x \in U. \quad (13)$$

Wir erlauben aber ein negatives  $d$ . Zusätzlich sollen alle Koeffizienten beschränkt sein. Da die Koeffizienten nach der Bemerkung 4.1.1 aus  $C^\infty(\bar{U})$  sind, reicht es aus die Schranken zu überprüfen. Gilt im Folgenden, dass  $x_1 \in \{x_1 \in \mathbb{R} : 0 < x_{1min} \leq x_1 \leq x_{1max} < 1\}$  und zusätzlich noch  $x_3 \in \{x_3 \in \mathbb{R} : 0 < x_{3min} \leq x_3 \leq x_{3max}\}$ , finden wir eine gleichmässige untere Schranke für  $a(x)$ . Sind  $\gamma \geq 1$  und  $\mu_{c_1}, \mu_{c_2}, (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3), (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3) \geq 0$ , so gilt auch  $c(x) \geq 0$ . Da alle Koeffizienten stetige Funktionen auf einem kompakten Gebiet sind, sind sie auch durch ihr Minimum und Maximum beschränkt. Wir wollen nun die Sichtweise einer Operatorgleichung übernehmen und definieren wie in [Bur08] auf Seite 59 die Operatoren (hier ist  $I$  die Einheitsmatrix)

$$\begin{aligned} \tilde{L}_0 &= L_0, \\ \tilde{L}_1 &= I_{L^2 \rightarrow H^{-1}} L_1, \\ \tilde{L}_2 &= I_{L^2 \rightarrow H^{-1}} L_2, \end{aligned}$$

wobei für  $L_0$ ,  $L_1$  und  $L_2$  gilt:

$$L_0 : H_0^1(U) \rightarrow H^{-1}(U), \quad u \mapsto - \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + c(x)u,$$

$$L_1 : H_0^1(U) \rightarrow L^2(U), \quad u \mapsto \sum_{i=1}^3 b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + d(x)u,$$

$$L_2 : H_0^1(U) \rightarrow L^2(U), \quad u \mapsto - (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) \int_U g(\xi^x) u(x_1, x_2 + \xi^x, x_3) d\xi^x \\ - (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3) \int_U h(\xi^v) u(x_1, x_2, x_3 + \xi^v) d\xi^v.$$

$\tilde{L}_i$  operiert für  $i = \{0, 1, 2\}$  wie folgt:

$$\tilde{L}_i : H_0^1(U) \rightarrow H^{-1}(U).$$

Die Differentialgleichung (12) können wir auch als

$$\tilde{L}_0 \tilde{u} + \tilde{L}_1 \tilde{u} + \tilde{L}_2 \tilde{u} = \tilde{f} \tag{14}$$

schreiben. Mit dem nachfolgenden Satz zeigen wir, dass  $\tilde{L}_0 \tilde{u} = \tilde{f}$  eine eindeutige Lösung hat.

**Satz 4.2.1** (vergleiche [Bur08] Satz 3.18.)

Seien die Funktionen  $a \in \mathcal{L}^\infty(U)$  und  $c \in \mathcal{L}^\infty(U)$ , so dass sie (13) erfüllen. Sei  $\tilde{f} \in H^{-1}(U)$ . Dann existiert ein eindeutiger Minimierer  $\tilde{u} \in H_0^1(U)$  des Energiefunktionals

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} \int_U (a(x) |\nabla \tilde{u}|^2 + c(x) |\tilde{u}|^2) dx - \langle \tilde{f}, \tilde{u} \rangle,$$

der als eindeutige Lösung der Variationsgleichung

$$\int_U (a \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \varphi + c \tilde{u} \varphi) dx = \langle \tilde{f}, \varphi \rangle \forall \varphi \in H_0^1(U)$$

charakterisiert ist.

*Beweis.* Siehe Beweis von Satz 3.18 in [Bur08]. □

Also wissen wir, dass  $\tilde{L}_0$  stetig invertierbar ist und können (14) schreiben als

$$\tilde{u} + \tilde{L}_0^{-1} \tilde{L}_1 \tilde{u} + \tilde{L}_0^{-1} \tilde{L}_2 \tilde{u} = \tilde{L}_0^{-1} \tilde{f}. \tag{15}$$



Wir haben nun ein System der Form

$$(I + K)\tilde{u} = g \quad (16)$$

zu lösen, mit  $g = \tilde{L}_0^{-1}\tilde{f} \in H_0^1(U)$  und  $K = \tilde{L}_0^{-1}(\tilde{L}_1 + \tilde{L}_2) : H_0^1(U) \rightarrow H_0^1(U)$ .  $L_1$  und  $L_2$  sind stetige lineare Operatoren und  $\mathcal{L}^2 \hookrightarrow H^{-1}$  ist eine kompakte Einbettung, somit sind, mit der unten stehenden Definition 4.2.2 und dem unten stehenden Lemma 4.2.3,  $\tilde{L}_1$  und  $\tilde{L}_2$  kompakte Operatoren.

**Definition 4.2.2** (Kompakte Abbildung, [Wer07] Definition IV..7.17)

Seien  $X$  und  $Y$  normierte Räume,  $M \subset X$  sowie  $F : M \rightarrow Y$  ein Abbildung. Dann heißt  $F$  eine kompakte Abbildung, wenn  $F$  stetig ist und beschränkte Teilmengen von  $M$  auf relativkompakte Teilmengen von  $Y$  abbildet.

**Lemma 4.2.3** (vgl. Lemma 8.3 in [Alt06])

Seien  $A : X \rightarrow Y$  und  $B : Y \rightarrow Z$  stetige Abbildungen, dann gilt:  
 $A$  oder  $B$  kompakt  $\Rightarrow BA$  kompakt.

*Beweis.* Siehe Beweis zu Lemma 8.3 in [Alt06]. □

Ferner impliziert die Kompaktheit von  $\tilde{L}_1$  und  $\tilde{L}_2$  die Kompaktheit von  $K$ . Diese sehr spezielle Form von (16) nennt man kompakte Störung der Identität. Für solche Operatoren gilt der Satz von Riesz-Schauder (siehe [Wer07] Satz VI.2.1), aus dem wir den nächsten Satz folgern.

**Satz 4.2.4**

Sei  $K$  ein kompakter Operator auf einem Hilbertraum. Der Operator  $I+K$  ist genau dann surjektiv, wenn er injektiv ist.

Mit anderen Worten, genügt es die Eindeutigkeit des homogenen Problems  $(I + K)\tilde{u} = 0$  zu überprüfen, um schon die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung für eine beliebige rechte Seite zu erhalten.

*Beweis.* Siehe allgemeinen Beweis in [Wer07] von Satz VI.2.1 □

Um die Eindeutigkeit einer schwachen Lösung  $\tilde{u} \in H_0^1(U)$  zu zeigen, multiplizieren wir unser Problem (12) (homogene Variante,  $f = 0$ ) mit  $\varphi$  und integrieren partiell. So erhalten wir die schwache Formulierung

$$\begin{aligned} \int_U \left( \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^3 b_i(x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \varphi + (c(x) + d(x))\tilde{u}\varphi \right. \\ \left. - (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3)\varphi \int_U g(\xi^x)\tilde{u}(x_1, x_2 + \xi^x, x_3)d\xi^x \right. \\ \left. - (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3)\varphi \int_U h(\xi^v)\tilde{u}(x_1, x_2, x_3 + \xi^v)d\xi^v \right) dx = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(U). \end{aligned} \quad (17)$$

Wir wählen  $\varphi = \tilde{u}$  und erhalten

$$\begin{aligned} & \int_U \left( \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} b_i(x) \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial x_i} + (c(x) + d(x)) \tilde{u}^2 \right. \\ & \quad - (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) \tilde{u} \int_U g(\xi^x) \tilde{u}(x_1, x_2 + \xi^x, x_3) d\xi^x \\ & \quad \left. - (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3) \tilde{u} \int_U h(\xi^v) \tilde{u}(x_1, x_2, x_3 + \xi^v) d\xi^v \right) dx = 0. \end{aligned}$$

Und nach partieller Integration des zweiten Terms erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_U \left( \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \frac{b_i(x)}{\partial x_i} \tilde{u}^2 + (c(x) + d(x)) \tilde{u}^2 \right. \\ & \quad - (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) \tilde{u} \int_U g(\xi^x) \tilde{u}(x_1, x_2 + \xi^x, x_3) d\xi^x \\ & \quad \left. - (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3) \tilde{u} \int_U h(\xi^v) \tilde{u}(x_1, x_2, x_3 + \xi^v) d\xi^v \right) dx = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_U \left( \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} + (c(x) + d(x) - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \frac{b_i(x)}{\partial x_i}) \tilde{u}^2 \right. \\ & \quad - (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) \tilde{u} \int_U g(\xi^x) \tilde{u}(x_1, x_2 + \xi^x, x_3) d\xi^x \\ & \quad \left. - (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3) \tilde{u} \int_U h(\xi^v) \tilde{u}(x_1, x_2, x_3 + \xi^v) d\xi^v \right) dx = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_U \left( \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} + (-(1-\gamma)(x_1 \mu_{c_1} + (1-x_1) \mu_{c_2}) + d(x) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \frac{b_i(x)}{\partial x_i}) \tilde{u}^2 \right) dx \\ & \quad + (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) \\ & \quad \cdot \left( \int_U \tilde{u}(x)^2 dx - \int_U \tilde{u}(x) \int_U g(\xi^x) \tilde{u}(x_1, x_2 + \xi^x, x_3) d\xi^x dx \right) \\ & \quad + (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3) \\ & \quad \cdot \left( \int_U \tilde{u}(x)^2 dx - \underbrace{\int_U \tilde{u}(x) \int_U h(\xi^v) \tilde{u}(x_1, x_2, x_3 + \xi^v) d\xi^v dx}_{=:(*)} \right) \\ = & 0. \tag{18} \end{aligned}$$

Nun betrachten wir (\*). Mit Hilfe der *Cauchy-Schwarz Ungleichung* (siehe [For04] §16 Satz 7) haben wir

$$\begin{aligned}
 & \int_U \tilde{u}(x) \int_U h(\xi^v) \tilde{u}(x_1, x_2, x_3 + \xi^v) d\xi^v dx \\
 = & \int_U \int_U \tilde{u}(x) h(\xi^v) \tilde{u}(x_1, x_2, x_3 + \xi^v) d\xi^v dx \\
 \leq & \sqrt{\int_U \int_U \tilde{u}(x)^2 h(\xi^v) d\xi^v dx} \cdot \sqrt{\int_U \int_U \tilde{u}(x_1, x_2, x_3 + \xi^v)^2 h(\xi^v) d\xi^v dx}.
 \end{aligned}$$

Für unsere Dichtefunktion gilt  $\int_U h(\xi^v) d\xi^v \approx 1$  und durch die Substitution  $y = x_3 + \xi^v$  ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\int_U \int_U \tilde{u}(x)^2 h(\xi^v) d\xi^v dx} \cdot \sqrt{\int_U \tilde{u}(x_1, x_2, x_3 + \xi^v)^2 h(\xi^v) d\xi^v dx} \\
 = & \sqrt{\int_U \tilde{u}(x)^2 dx} \cdot \sqrt{\int_U \int_U \int_U \tilde{u}(x_1, x_2, y)^2 dx_1 dx_2 dy} \\
 = & \int_U \tilde{u}(x)^2 dx.
 \end{aligned}$$

So können wir den letzten Term in (18) nach unten abschätzen

$$(l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3) \left( \int_U \tilde{u}(x)^2 dx - \int_U \tilde{u}(x) \int_U h(\xi^v) \tilde{u}(x_1, x_2, x_3 + \xi^v) d\xi^v dx \right) \geq 0,$$

da  $(l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3) \geq 0$ . Analog folgt auch

$$(l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) \left( \int_U \tilde{u}(x)^2 dx - \int_U \tilde{u}(x) \int_U g(\xi^x) \tilde{u}(x_1, x_2 + \xi^x, x_3) d\xi^x dx \right) \geq 0.$$

Hier sind wir ähnlich wie in [Zoc10] vorgegangen, wobei uns der Übergang des 1-dimensionalen Falls zum 3-dimensionalen Fall durch den *Satz von Fubini* (siehe [For84] §7 Satz 7) keine Probleme bereitet.

So folgt die Eindeutigkeit für (12), falls

$$-(1 - \gamma)(x_1 \mu_{c_1} + (1 - x_1) \mu_{c_2}) + d(x) - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \frac{b_i(x)}{\partial x_i} \geq 0 \quad \forall x$$

ist und mit Satz 4.2.4 folgt schon die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (11). Abschließend fassen wir das im folgenden Satz zusammen.

**Satz 4.2.5**

Der Differentialoperator  $L$  sei gegeben wie in (10) und  $f \in \mathcal{L}^2(U)$ . Dann existiert für das Problem (11)

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } U \\ u = g & \text{auf } \partial U. \end{cases}$$

eine eindeutige schwache Lösung  $u \in H^1(U)$ , falls

$$-(1 - \gamma)(x_1\mu_{c_1} + (1 - x_1)\mu_{c_2}) + d(x) - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \frac{b_i(x)}{\partial x_i} \geq 0 \quad \forall x \in U$$

gilt.

### 4.3 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung für den Wohlstands-Konsum-Index

Wir haben bereits gezeigt, dass eine eindeutige Lösung für das Problem (11) existiert, jetzt möchten wir zeigen, dass dieses auch für

$$\begin{cases} Lu = F(u) & \text{in } U \\ u = g & \text{auf } \partial U. \end{cases} \quad (19)$$

gilt. Nun ist  $F$  auf der rechten Seite von  $u$  abhängig.

#### 4.3.1 Existenz der Lösung für den Wohlstands-Konsum-Index

Die Existenz einer Lösung wollen wir mit dem *Schauderschen Fixpunktsatz* zeigen.

**Satz 4.3.1** (Schauderscher Fixpunktsatz, vgl. [Wer07] Theorem IV.7.18)  
Sei  $C \neq \emptyset$  eine abgeschlossene, konvexe und beschränkte Teilmenge eines Banachraums und sei  $T : C \rightarrow C$  eine kompakte Abbildung. Dann besitzt  $T$  einen Fixpunkt.

*Beweis.* Siehe Beweis zu Theorem IV.7.12 in [Wer07]. □

Unsere Menge  $C$  sei wie folgt definiert:

$$C := \{u \in H^1(U) \mid \|u\|_{H^1} \leq R\}.$$

Die Menge  $C$  ist nichtleer ( $u = 0$  liegt in der Menge) und konvex. Denn seien  $a, b \in C$ , also  $\|a\|_{H^1} \leq R$  und  $\|b\|_{H^1} \leq R$ , dann gilt für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq \lambda \leq 1$ :

$$\|\lambda a + (1 - \lambda)b\|_{H^1} \leq \lambda\|a\|_{H^1} + (1 - \lambda)\|b\|_{H^1} \leq \lambda R + (1 - \lambda)R = R.$$

Und  $C$  ist nach Definition bezüglich der  $H^1$ -Norm abgeschlossen. Bleibt also noch die Kompaktheit unserer Abbildung  $T := L^{-1}F$  zu zeigen. Wir betrachten zunächst nur unser  $F$  und schreiben  $F$  wie folgt auf:

$$F : H^1(U) \xrightarrow{Id} \mathcal{L}^6(U) \xrightarrow{F} \mathcal{L}^6(U) \xrightarrow{Id} \mathcal{L}^2(U).$$

Die Einbettungen sind nach dem

**Satz 4.3.2** (Einbettung von Sobolev- in Lebesgueräume, [Bur08] Satz 3.9)  
Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und  $q \leq \frac{np}{n-pk}$  sowie  $q < \infty$ . Dann gilt die Einbettung  $W^{k,p}(\Omega) \subset \mathcal{L}^q(\Omega)$ , diese ist sogar kompakt für  $q < \frac{np}{n-pk}$ .

*Beweis.* Siehe Beweis zu Satz 8.9 in [Alt06]. □

kompakt und  $F$  ist stetig. Somit gilt nach dem Lemma 4.2.3, dass  $F$  eine kompakte Abbildung ist. Weiter folgt wieder mit dem Lemma 4.2.3, dass schon

$$T = L^{-1}F : H^1 \rightarrow H^1$$

eine kompakte Abbildung ist, da  $L^{-1} : \mathcal{L}^2(U) \rightarrow H^1(U)$  stetig ist.

Des Weiteren operiert der Operator  $T = L^{-1}F : C \rightarrow C$ , falls

$$R \geq (K\|L^{-1}\|_{\mathcal{L}^2 \rightarrow H^1}|\theta|)^\theta$$

gilt.

*Beweis.* Wir müssen zeigen, dass  $\|L^{-1}F(u)\|_{H^1} \leq R$  gilt, wobei für unsere Operatoren gilt:

$$F : H^1 \hookrightarrow \mathcal{L}^6 \rightarrow \mathcal{L}^2$$

und

$$L^{-1} : \mathcal{L}^2 \rightarrow H^1.$$

Wir erhalten

$$\|L^{-1}F(u)\|_{H^1} \leq \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}^2 \rightarrow H^1} \|F(u)\|_2,$$

wobei mit  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2 \rightarrow H^1}$  die Operatornorm von  $L^{-1}$  gemeint ist (siehe z.B. [Alt06] Kapitel 3). Weiter haben wir

$$\begin{aligned}
 & \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}^2 \rightarrow H^1} \|F(u)\|_2 \\
 & \leq \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}^2 \rightarrow H^1} |\theta| \|u^{1-\frac{1}{\theta}}\|_2 \\
 & \leq \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}^2 \rightarrow H^1} |\theta| \sqrt{\|u^{2-\frac{2}{\theta}}\|_1} \\
 & \leq \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}^2 \rightarrow H^1} |\theta| \sqrt{(\|u\|_{2-\frac{2}{\theta}})^{2-\frac{2}{\theta}}} \\
 & \leq \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}^2 \rightarrow H^1} |\theta| \sqrt{(\|u\|_6)^{2-\frac{2}{\theta}}} \\
 & \leq K \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}^2 \rightarrow H^1} |\theta| \sqrt{(\|u\|_{H^1})^{2-\frac{2}{\theta}}} \\
 & \leq K \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}^2 \rightarrow H^1} |\theta| R^{1-\frac{1}{\theta}}.
 \end{aligned}$$

Hier haben wir  $F(u) = \theta u^{1-\frac{1}{\theta}}$  mit  $1 - \frac{1}{\theta} \leq 3$  verwendet und sowohl die Hölderungleichung als auch den Sobolev'schen Einbettungssatz genutzt.  $K$  ist eine Konstante, die aus dem Sobolev'schen Einbettungssatz resultiert. Abschließend formen wir um und erhalten die Behauptung

$$K \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}^2 \rightarrow H^1} |\theta| R^{1-\frac{1}{\theta}} \leq R \iff R \geq (K \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}^2 \rightarrow H^1} |\theta|)^\theta.$$

□

Nun gilt nach dem Schauderschen Fixpunktsatz 4.3.1, dass der Operator  $L^{-1}F : C \rightarrow C$  einen Fixpunkt

$$u = L^{-1}F(u)$$

hat, wobei  $C = \{u \in H^1(U) \mid \|u\|_{H^1} \leq R\}$  eine Teilmenge des Banachraums  $H^1(U)$  ist. Das Ergebnis halten wir im folgenden Korollar fest.

**Korollar 4.3.3** (Existenz)

*Das Problem (19) besitzt ein Lösung*

$$u \in C := \{u \in H^1(U) \mid \|u\|_{H^1} \leq (K \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}^2 \rightarrow H^1} |\theta|)^\theta\}.$$

**4.3.2 Eindeutigkeit der Lösung für den Wohlstands-Konsum-Quotient**

Nach der Existenz müssen wir nun noch die Eindeutigkeit einer Lösung von (11) zeigen. Da elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung sogenannte *Maximumprinzipien* erfüllen, wollen wir die Eindeutigkeit mit dem *schwachen Maximumprinzip* zeigen, das eine schwächere Variante des *starken Maximumprinzips* ist.

**Satz 4.3.4** (starkes Maximumprinzip, vergleiche [Bur07] Satz 2.7)

Sei  $Lu < 0$  ( $> 0$ ) mit  $L$  wie in (10) und  $c(x) + d(x) - (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) - (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3) > 0$ . Dann gilt  $u \leq 0$  ( $\geq 0$ ) oder  $u$  hat kein lokales Maximum (Minimum) im Inneren von  $U$ .

*Beweis.* Angenommen es existiert ein Maximum von  $u$ , das in einem Punkt  $\bar{x}$  im Inneren von  $U$  angenommen wird, wobei  $u(\bar{x}) > 0$  ist. Dann gilt aufgrund der notwendigen Bedingung für lokale Extremstellen, dass  $\nabla u(\bar{x}) = 0$  ist und wegen der hinreichenden Bedingung für lokale Maxima ist die Hessematrix  $(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j})$  negativ semidefinit. Also haben wir

$$\begin{aligned} Lu(\bar{x}) &= - \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(\bar{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) + \sum_{i=1}^3 b_i(\bar{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i}(\bar{x}) \\ &\quad + \left( c(\bar{x}) + d(\bar{x}) - (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) - (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3) \right) u(\bar{x}) \\ &\quad + (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) \left( u(\bar{x}) - \underbrace{\int_U g(\xi^x) u(\bar{x}_1, \bar{x}_2 + \xi^x, \bar{x}_3) d\xi^x}_{\leq u(\bar{x})} \right) \\ &\quad + (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3) \left( u(\bar{x}) - \underbrace{\int_U h(\xi^v) u(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 + \xi^v) d\xi^v}_{\leq u(\bar{x})} \right) \\ &\geq - \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(\bar{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Nun folgt mit dem unten stehenden Lemma 4.3.5  $Lu(\bar{x}) \geq 0$ , da die negative Hessematrix von  $u(\bar{x})$  und auch  $A(\bar{x})$  positiv semidefinit (siehe Kapitel 4.1) sind. Das ist jedoch ein Widerspruch zu  $Lu < 0$ .

Die entsprechende Aussage über Minima erhält man durch analoges Vorgehen mit  $-u$ . □

Hier das Lemma über positiv definite Matrizen:

**Lemma 4.3.5**

Seien  $A, B \in \mathbb{R}^{d \times d}$  symmetrisch und positiv semidefinit. Dann gilt

$$A : B =: \sum_{i,j=1}^d A_{ij} B_{ij} \geq 0$$

*Beweis.* Siehe Beweis zu Lemma 2.8 in [Bur07]. □

Mit dem *starken Maximumprinzip* können wir nun auch die schwächere Version zeigen.

**Satz 4.3.6** (schwaches Maximumprinzip, vergleiche [Bur07] Satz 2.9)  
*Sei  $Lu \leq 0$  ( $\geq 0$ ) mit  $L$  wie in (10) und  $c(x) + d(x) - (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) - (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3) > 0$ . Dann gilt  $u \leq 0$  ( $\geq 0$ ) oder  $u$  nimmt sein globales Maximum (Minimum) am Rand von  $U$  an.*

*Beweis.* Wir führen wieder einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass  $u$  sein globales Maximum in einem inneren Punkt  $\bar{x} \in U$  annimmt und wieder  $u(\bar{x}) > 0$ . Für unsere Matrix  $A$  gilt  $a_{jj} \geq 0$  für  $j = \{1, 2, 3\}$ . Weiter betrachten wir die Funktion  $u^\epsilon(x) = u(x) + \epsilon \exp(\alpha(x_j - \bar{x}_j))$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (Lu^\epsilon)(x) &= (Lu)(x) - \epsilon(\alpha^2 a_{jj}(x) - \alpha b_j(x) - (c(x) + d(x))) \exp(\alpha(x_j - \bar{x}_j)) \\ &\quad + \epsilon \left( - (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) \int_U g(\xi^x) \exp(\alpha(x + \xi^x - \bar{x})) d\xi^x \right. \\ &\quad \left. - (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3) \int_U h(\xi^v) \exp(\alpha(x + \xi^v - \bar{x})) d\xi^v \right) \\ &\leq -\epsilon(\alpha^2 a_{jj}(x) - \alpha b_j(x) - (c(x) + d(x))) \exp(\alpha(x_j - \bar{x}_j)), \end{aligned}$$

da  $Lu \leq 0$ ,

$$(l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) \int_U g(\xi^x) \exp(\alpha(x + \xi^x - \bar{x})) d\xi^x \geq 0$$

und

$$(l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3) \int_U h(\xi^v) \exp(\alpha(x + \xi^v - \bar{x})) d\xi^v \geq 0.$$

Wählen wir unser  $\alpha$  hinreichend groß, so ist  $(Lu^\epsilon)(x)$  in einer Umgebung von  $x$  (unabhängig von  $\epsilon$ ) negativ.

Man sieht, dass  $u^\epsilon$  gleichmäßig gegen  $u$  konvergiert und, da bei gleichmässiger Konvergenz globale Maxima gegen globale Maxima konvergieren, gibt es  $x^\epsilon \rightarrow \bar{x}$ , sodass  $u^\epsilon$  in  $x^\epsilon$  ein Maximum annimmt und dort positiv ist. Dies steht aber im Widerspruch zu Satz 4.3.4, da  $Lu^\epsilon < 0$  in einer Umgebung von  $x^\epsilon$  gilt.  $\square$

Aus dem *schwachen Maximumprinzip* erhalten wir nun die Eindeutigkeit unseres Problems (10), da für zwei Lösungen  $u_1$  und  $u_2$  gilt, dass die Differenz  $u = u_1 - u_2$  die Gleichung  $L(u_1 - u_2) = F(u_1) - F(u_2)$  löst, sowie die Randbedingung  $u = 0$  erfüllt. Mit dem *Mittelwertsatz der Differentialgleichung* (siehe [For11] Corollar 1 §16) folgt  $L(u_1 - u_2) - F'(\nu)(u_1 - u_2) = 0$ , mit



einem  $\nu \in ]u_1, u_2[$ . Es gilt  $F'(u) = \underbrace{(\theta - 1)}_{<0} \underbrace{u^{-\frac{1}{\theta}}}_{\geq 0} \leq 0$ . Also bleibt das Maximumprinzip für  $(L - F'(\nu))u = 0$  erhalten und es folgt schon  $0 \leq u \leq 0$ , also  $u \equiv 0$ . Wir halten das Ergebnis im folgenden Korollar fest.

**Korollar 4.3.7** (Eindeutigkeit)

*Der Differentialoperator in (10) erfülle folgende Eigenschaft*

$$c(x) + d(x) - (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) - (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3) \geq 0.$$

*Dann existiert genau eine Lösung des Problems (10).*

## 5 Numerische Approximation des Wohlstands-Konsum-Quotienten

In diesem Kapitel wollen wir die numerische Lösung des Problems (19) berechnen. Im Verlauf der Arbeit haben wir schon einige Bedingungen an  $U$  erhalten und gezeigt, dass für diese Umgebung  $U$  eine eindeutige Lösung existiert. Um unser Problem numerisch zu lösen, benötigen wir noch Randbedingung mit denen wir uns im Kapitel 5.1.1 beschäftigen. Des Weiteren schreiben wir unsere Differentialgleichung  $Lu = F(u)$  um und erhalten

$$L = - \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^3 b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x) + d(x), \quad (20)$$

wobei  $(a_{ij}(x))_{i,j=1}^3$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$  und  $d(x)$  wie in (10) gegeben sind und

$$\begin{aligned} F(u) = & (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) \int_U g(\xi^x) u(x_1, x_2 + \xi^x, x_3) d\xi^x \\ & + (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3) \int_U h(\xi^v) u(x_1, x_2, x_3 + \xi^v) d\xi^v \\ & + \theta u^{1-\frac{1}{\theta}} \end{aligned}$$

ist.

### 5.1 Diskretisierung

Zuerst wollen wir den Differentialoperator diskretisieren und definieren ein Gitter auf  $U$  mit

$$G_h := \{x \in U \mid x = (x_1^i, x_2^j, x_3^k), 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq M, 0 \leq k \leq L\}$$

und  $x_1^i = x_1^{\min} + i(\Delta x_1)$ ,  $x_2^j = x_2^{\min} + j(\Delta x_2)$ ,  $x_3^k = x_3^{\min} + k(\Delta x_3)$ , wobei  $\Delta x_1 = \frac{x_1^{\max} - x_1^{\min}}{N}$  die Gitterfeinheit in  $x^1$ -Richtung,  $\Delta x_2 = \frac{x_2^{\max} - x_2^{\min}}{M}$  die Gitterfeinheit in  $x^2$ -Richtung und  $\Delta x_3 = \frac{x_3^{\max} - x_3^{\min}}{L}$  die Gitterfeinheit in  $x^3$ -Richtung ist. Setzen wir den Koordinatenursprung unseres Gitters in  $(x_1^{\min}, x_2^{\min}, x_3^{\min})$  und  $h := \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3\}$  erhalten wir das Gitter

$$G_h := \{(x_i, x_j, x_k) = (ih, jh, kh) \mid i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m, k = 0, \dots, l\}.$$

Wir können jedem Gitterpunkt einen eindeutigen Multiindex  $(i, j, k)$  zuordnen. Im Folgenden sei  $u(x_i, x_j, x_k) = u_{i,j,k}$ ,  $a(x_i, x_j, x_k) = a_{i,j,k}$ ,  $b(x_i, x_j, x_k) = b_{i,j,k}$ ,  $c(x_i, x_j, x_k) = c_{i,j,k}$ ,  $d(x_i, x_j, x_k) = d_{i,j,k}$  und  $F(u(x_i, x_j, x_k)) = F_{i,j,k}$ .

Mit Hilfe der Finiten-Differenzen-Methode (siehe Abschnitt 2.2.3) approximieren wir die ersten und zweiten Ableitungen.

Für die erste Ableitung nehmen wir, trotz der höheren Konsistenzordnung des zentralen Differenzenquotienten, den Rückwärtsdifferenzenquotienten, da wir ein konvektionsdominantes Problem (d.h. relativ große Werte von  $b_i$ ) vorliegen haben. Da unsere Matrix  $A(x)$  aus (10) nur Einträge auf der Hauptdiagonalen hat, kommen keine gemischten Ableitungen vor.

Daraus ergibt sich die Approximation des Differentialoperators  $L$ :

$$\begin{aligned}
 & - a_{11_{i,j,k}} \frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{h^2} - a_{22_{i,j,k}} \frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{h^2} \\
 & - a_{33_{i,j,k}} \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{h^2} + b_{1_{i,j,k}} \frac{u_{i,j,k} - u_{i-1,j,k}}{h} \\
 & + b_{2_{i,j,k}} \frac{u_{i,j,k} - u_{i,j-1,k}}{h} + b_{3_{i,j,k}} \frac{u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1}}{h} + c_{i,j,k} u_{i,j,k} + d_{i,j,k} u_{i,j,k}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Nun approximieren wir  $F(u)$  an den Gitterpunkten, wobei wir den nicht linearen Anteil von  $F(u)$  einfach an den Gitterpunkten auswerten. Somit müssen wir nur noch die Integraloperatoren approximieren. Dies machen wir mit der zusammengesetzten Trapezformel (siehe [Nat05] Seite 98ff.). Wir betrachten den ersten Integralterm  $(l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) \int_{x_2^{min}}^{x_2^{max}} g(\xi^x) u(x_1, x_2 + \xi^x, x_3) d\xi^x$  und erhalten durch die Substitution  $y = x_2 + \xi^x$

$$(l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) \int_{x_2^{min}}^{x_2^{max}} g(y - x_2) u(x_1, y, x_3) dy.$$

Wir diskretisieren diesen auf den äquidistanten Stützstellen

$$x_2^{min} = x_2^0 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = x_2^m = x_2^{max}.$$

Somit sind die Stützstellen auch Gitterpunkte unseres Gitters  $G_h$ . Für unsere verschobene Dichtefunktion  $g(y - x_2)$  schreiben wir

$$g_j(x_2) := g(y_j - x_2) = \frac{1}{\sigma_{\xi^x} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y_j - x_2 - \mu_{\xi^x})^2}{\sigma_{\xi^x}^2}},$$

wobei  $\mu_{\xi^x}$  der Erwartungswert und  $\sigma_{\xi^x}$  die Standardabweichung der normalverteilten Zufallsvariable  $\xi^x$  ist und erhalten

$$\begin{aligned}
 & (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) \int_{x_2^{min}}^{x_2^{max}} g(y - x_2) u(x_1, y, x_3) dy \\
 & \approx (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) h \left( \frac{1}{2} u_{i,0,k} g_0(x_2) + \frac{1}{2} u_{i,m,k} g_m(x_2) + \sum_{q=1}^{m-1} u_{i,q,k} g_q(x_2) \right).
 \end{aligned}$$

Durch eine ähnliche Vorgehensweise für das zweite Integral  $(l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3) \int_{x_{3,min}}^{x_{3,max}} h(\xi^v) u(x_1, x_2, x_3 + \xi^v) d\xi^v$ , gelangen wir zu folgender Approximation von  $F(u)$ :

$$\begin{aligned}
 & F_h(u_{i,j,k}) \\
 = & (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_k) h \left( \frac{1}{2} u_{i,0,k} g_0(x_j) + \frac{1}{2} u_{i,m,k} g_m(x_j) + \sum_{q=1}^{m-1} u_{i,q,k} g_q(x_j) \right) \\
 & + (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_k) h \left( \frac{1}{2} u_{i,j,0} h_0(x_k) + \frac{1}{2} u_{i,j,l} h_l(x_k) + \sum_{p=1}^{l-1} u_{i,j,p} h_p(x_k) \right) \\
 & + \theta u_{i,j,k}^{1-\frac{1}{\theta}}, \tag{22}
 \end{aligned}$$

mit

$$h_m(x) := h(y_m - x_3) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(y_m - x_3)}, & y_m - x_3 \geq 0 \\ 0, & y_m - x_3 < 0 \end{cases},$$

wobei  $\lambda \in \mathbb{R}^{>0}$ . Mit (21) und (22) haben wir nun

$$L_h u_{i,j,k} = F_h(u_{i,j,k})$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow & u_{i,j,k} \left( 2 \frac{a_{11i,j,k}}{h^2} + 2 \frac{a_{22i,j,k}}{h^2} + 2 \frac{a_{33i,j,k}}{h^2} + \frac{b_{1i,j,k}}{h} + \frac{b_{2i,j,k}}{h} + \frac{b_{3i,j,k}}{h} + c_{i,j,k} \right. \\
 & \left. + d_{i,j,k} \right) \\
 & + u_{i-1,j,k} \left( -\frac{a_{11i,j,k}}{h^2} - \frac{b_{1i,j,k}}{h} \right) \\
 & + u_{i,j-1,k} \left( -\frac{a_{22i,j,k}}{h^2} - \frac{b_{2i,j,k}}{h} \right) \\
 & + u_{i,j,k-1} \left( -\frac{a_{33i,j,k}}{h^2} - \frac{b_{3i,j,k}}{h} \right) \\
 & + u_{i+1,j,k} \left( -\frac{a_{11i,j,k}}{h^2} \right) \\
 & + u_{i,j+1,k} \left( -\frac{a_{22i,j,k}}{h^2} \right) \\
 & + u_{i,j,k+1} \left( -\frac{a_{33i,j,k}}{h^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_k)h \left( \frac{1}{2}u_{i,0,k}g_0(x_j) + \frac{1}{2}u_{i,m,k}g_m(x_j) + \sum_{q=1}^{m-1} u_{i,q,k}g_q(x_j) \right) \\
 &\quad + (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_k)h \left( \frac{1}{2}u_{i,j,0}h_0(x_k) + \frac{1}{2}u_{i,j,l}h_l(x_k) + \sum_{p=1}^{l-1} u_{i,j,p}h_p(x_k) \right) \\
 &\quad + \theta u_{i,j,k}^{1-\frac{1}{\theta}}.
 \end{aligned}$$

Zuletzt schreiben wir den nichtlinearen Teil um

$$\theta u_{i,j,k}^{1-\frac{1}{\theta}} = \theta u_{i,j,k} u_{i,j,k}^{-\frac{1}{\theta}}$$

und bringen ihn auf die andere Seite

$$\begin{aligned}
 &u_{i,j,k} \left( \frac{2a_{11i,j,k}}{h^2} + \frac{2a_{22i,j,k}}{h^2} + \frac{2a_{33i,j,k}}{h^2} + \frac{b_{1i,j,k}}{h} + \frac{b_{2i,j,k}}{h} + \frac{b_{3i,j,k}}{h} + c_{i,j,k} \right. \\
 &\quad \left. + d_{i,j,k} - \theta u_{i,j,k}^{-\frac{1}{\theta}} \right) \\
 &+ u_{i-1,j,k} \left( -\frac{a_{11i,j,k}}{h^2} - \frac{b_{1i,j,k}}{h} \right) \\
 &+ u_{i,j-1,k} \left( -\frac{a_{22i,j,k}}{h^2} - \frac{b_{2i,j,k}}{h} \right) \\
 &+ u_{i,j,k-1} \left( -\frac{a_{33i,j,k}}{h^2} - \frac{b_{3i,j,k}}{h} \right) \\
 &+ u_{i+1,j,k} \left( -\frac{a_{11i,j,k}}{h^2} \right) \\
 &+ u_{i,j+1,k} \left( -\frac{a_{22i,j,k}}{h^2} \right) \\
 &+ u_{i,j,k+1} \left( -\frac{a_{33i,j,k}}{h^2} \right) \\
 &= (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_k)h \left( \frac{1}{2}u_{i,0,k}g_0(x_j) + \frac{1}{2}u_{i,m,k}g_m(x_j) + \sum_{q=1}^{m-1} u_{i,q,k}g_q(x_j) \right) \\
 &\quad + (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_k)h \left( \frac{1}{2}u_{i,j,0}h_0(x_k) + \frac{1}{2}u_{i,j,l}h_l(x_k) + \sum_{p=1}^{l-1} u_{i,j,p}h_p(x_k) \right).
 \end{aligned}$$

Sammeln wir die Werte  $u_{i,j,k}$  und  $F_h(u_{i,j,k})$  in einem Vektor  $u_h$  und  $F_h$ , z.B. in der Form

$$u_h = \begin{pmatrix} u_{0,0,0} & u_{1,0,0} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{n+1,0,0} & u_{0,1,0} & u_{1,1,0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & u_{n+1,1,0} & u_{0,2,0} & \cdot & \cdot \\ \cdot & u_{n+1,m+1,0} & u_{n+1,m+1,1} & \cdot & \cdot & u_{n+1,m+1,l+1} \end{pmatrix}^\top,$$

(den Vektor  $F_h$  können wir analog zu  $u_h$  aufschreiben) und definieren eine geeignete Matrix  $L_h$ , so können wir das System in der Form

$$L_h u_h = F_h \quad (23)$$

schreiben.

### 5.1.1 Realistische Randbedingungen

In diesem Abschnitt leiten wir Randbedingungen aus der Gleichung (10) her, da wir aus dem Sachzusammenhang keine Dirichletrandwerte erhalten. Es lassen sich folgende Randbedingungen aufstellen.

#### Randbedingungen für $x_1 = 0, 1$

Am „linken“ Rand verschwinden die Terme mit  $x_1$ .

$x_1 \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} & -0,5(\sigma_X^2(\lambda\sqrt{x_3} + (1-\lambda))^2 u_{x_2 x_2} + \sigma_V^2 x_3 u_{x_3 x_3}) \\ & + \kappa_x x_2 u_{x_2} - \kappa_v (\bar{V} - x_3) u_{x_3} \\ & + [- (1-\gamma)\mu_{c_2} + (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) + (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3) + 0,5\gamma(1-\gamma)x_3\sigma_2^2 \\ & + \beta\theta - (1-\gamma)\phi_{c_2} x_2] u \\ = & (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) \int_U g(\xi^x) u(x_1, x_2 + \xi^x, x_3) d\xi^x \\ & + (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3) \int_U h(\xi^v) u(x_1, x_2, x_3 + \xi^v) d\xi^v + \theta u^{1-\frac{1}{\theta}}. \end{aligned}$$

Am „rechten“ Rand verschwinden die Terme mit  $(1 - x_1)$ .

$x_1 \rightarrow 1$ :

$$\begin{aligned} & -0,5(\sigma_X^2(\lambda\sqrt{x_3} + (1-\lambda))^2 u_{x_2 x_2} + \sigma_V^2 x_3 u_{x_3 x_3}) \\ & + \kappa_x x_2 u_{x_2} - \kappa_v (\bar{V} - x_3) u_{x_3} \\ & + [- (1-\gamma)\mu_{c_1} + (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) + (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3) + 0,5\gamma(1-\gamma)x_3\sigma_1^2 \\ & + \beta\theta - (1-\gamma)\phi_{c_1} x_2] u \\ = & (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) \int_U g(\xi^x) u(x_1, x_2 + \xi^x, x_3) d\xi^x \\ & + (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3) \int_U h(\xi^v) u(x_1, x_2, x_3 + \xi^v) d\xi^v + \theta u^{1-\frac{1}{\theta}}. \end{aligned}$$

**Randbedingungen für  $x_2 = \pm\infty$** 

Für hinreichend großes  $x_2$  sind nur noch folgende Summanden dominant.

$x_2 \rightarrow +\infty$ :

$$-x_1(1-x_1)(\phi_{c_1} - \phi_{c_2})u_{x_1} + \kappa_x u_{x_2} - (1-\gamma)(x_1\phi_{c_1} + (1-x_1)\phi_{c_2})u = 0.$$

Für hinreichend kleines  $x_2$  gilt Folgendes.

$x_2 \rightarrow -\infty$ :

$$x_1(1-x_1)(\phi_{c_1} - \phi_{c_2})u_{x_1} - \kappa_x u_{x_2} + (1-\gamma)(x_1\phi_{c_1} + (1-x_1)\phi_{c_2})u = 0.$$

**Randbedingung für  $x_3 = 0, +\infty$** 

Hier verschwinden wieder die Terme mit  $x_3$ .

$x_3 \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\sigma_X^2(1-\lambda)^2 u_{x_2 x_2} \\ & -x_1(1-x_1)[\mu_{c_1} - \mu_{c_2} + (\phi_{c_1} - \phi_{c_2})x_2]u_{x_1} \\ & + \kappa_x x_2 u_{x_2} - \kappa_v \bar{V} u_{x_3} \\ & + [-(1-\gamma)(x_1\mu_{c_1} - (1-x_1)\mu_{c_2}) + l_{x,0} + l_{v,0} \\ & + \beta\theta - (1-\gamma)(x_1\phi_{c_1} + (1-x_1)\phi_{c_2})x_2]u \\ = & l_{x,0} \int_U g(\xi^x) u(x_1, x_2 + \xi^x, x_3) d\xi^x \\ & + l_{v,0} \int_U h(\xi^v) u(x_1, x_2, x_3 + \xi^v) d\xi^v + \theta u^{1-\frac{1}{\theta}}. \end{aligned}$$

Für  $x_3 \rightarrow \infty$  erhalten wir aus der Gleichung (10) keine Randbedingungen. Hier setzen wir  $u = 0$ , da wir bei hoher Volatilität einen sehr hohen Wohlstands-Konsum-Quotienten erwarten.

Den Rand approximieren wir auf natürliche Weise mit dem Vorwärtsdifferenzenquotienten, falls  $i, j$  oder  $k$  gleich 0 und mit dem Rückwärtsdifferenzenquotienten, falls  $i, j$  oder  $k$  gleich  $n, m$  bzw.  $l$  ist. Also haben wir für

$i = 0$ :

$$\begin{aligned}
 & \alpha_{10,j,k} \frac{u_{0,j+1,k} - 2u_{0,j,k} + u_{0,j-1,k}}{h^2} + \alpha_{20,j,k} \frac{u_{0,j,k+1} - 2u_{0,j,k} + u_{0,j,k-1}}{h^2} \\
 & + \alpha_{30,j,k} \frac{u_{0,j+1,k} - u_{0,j,k}}{h} + \alpha_{40,j,k} \frac{u_{0,j,k+1} - u_{0,j,k}}{h} + \alpha_{50,j,k} u_{0,j,k} \\
 = & (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_k) h \left( \frac{1}{2} u_{0,0,k} g_0(x_j) + \frac{1}{2} u_{0,m,k} g_m(x_j) + \sum_{q=1}^{m-1} u_{0,q,k} g_q(x_j) \right) \\
 & + (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_k) h \left( \frac{1}{2} u_{0,j,0} h_0(x_k) + \frac{1}{2} u_{0,j,l} h_l(x_k) + \sum_{p=0}^{l-1} u_{0,j,p} h_p(x_k) \right),
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \alpha_{10,j,k} &= -0, 5\sigma_X^2 (\lambda\sqrt{x_k} + (1 - \lambda))^2, \\
 \alpha_{20,j,k} &= -0, 5\sigma_V^2 x_k, \\
 \alpha_{30,j,k} &= \kappa_x x_j, \\
 \alpha_{40,j,k} &= -\kappa_v (\bar{V} - x_k), \\
 \alpha_{50,j,k} &= -(1 - \gamma)\mu_{c_2} + (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_k) + (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_k) \\
 & \quad + 0, 5\gamma(1 - \gamma)x_k\sigma_2^2 + \beta\theta - (1 - \gamma)\phi_{c_2} x_j - \theta u_{0,j,k}^{-\frac{1}{\theta}}.
 \end{aligned}$$

Nach Äquivalenzumformungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & u_{0,j,k} \left( \frac{-2\alpha_{10,j,k}}{h^2} - \frac{2\alpha_{20,j,k}}{h^2} - \frac{\alpha_{30,j,k}}{h} - \frac{\alpha_{40,j,k}}{h} + \alpha_{50,j,k} \right) \\
 & + u_{0,j+1,k} \left( \frac{\alpha_{10,j,k}}{h^2} + \frac{\alpha_{30,j,k}}{h} \right) \\
 & + u_{0,j-1,k} \frac{\alpha_{10,j,k}}{h^2} + u_{0,j,k+1} \left( \frac{\alpha_{20,j,k}}{h^2} + \frac{\alpha_{40,j,k}}{h} \right) + u_{0,j,k-1} \frac{\alpha_{20,j,k}}{h^2} \\
 = & (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_k) h \left( \frac{1}{2} u_{0,0,k} g_0(x_j) + \frac{1}{2} u_{0,m,k} g_m(x_j) + \sum_{q=1}^{m-1} u_{0,q,k} g_q(x_j) \right) \\
 & + (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_k) h \left( \frac{1}{2} u_{0,j,0} h_0(x_k) + \frac{1}{2} u_{0,j,l} h_l(x_k) + \sum_{p=1}^{l-1} u_{0,j,p} h_p(x_k) \right).
 \end{aligned}$$



Wir gehen analog für  $i = n$  vor und erhalten

$$\begin{aligned}
 & u_{n,j,k} \left( -\frac{2\beta_{1n,j,k}}{h^2} - \frac{2\beta_{2n,j,k}}{h^2} - \frac{\beta_{3n,j,k}}{h} - \frac{\beta_{4n,j,k}}{h} + \beta_{5n,j,k} \right) \\
 & + u_{n,j+1,k} \left( \frac{\beta_{1n,j,k}}{h^2} + \frac{\beta_{3n,j,k}}{h} \right) + u_{n,j-1,k} \frac{\beta_{1n,j,k}}{h^2} \\
 & + u_{n,j,k+1} \left( \frac{\beta_{2n,j,k}}{h^2} + \frac{\beta_{4n,j,k}}{h} \right) + u_{n,j,k-1} \frac{\beta_{2n,j,k}}{h^2} \\
 = & (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_k) h \\
 & \cdot \left( \frac{1}{2} u_{n,0,k} g_0(x_j) + \frac{1}{2} u_{n,m,k} g_m(x_j) + \sum_{q=1}^{m-1} u_{n,q,k} g_q(x_j) \right) \\
 & + (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_k) h \\
 & \cdot \left( \frac{1}{2} u_{n,j,0} h_0(x_k) + \frac{1}{2} u_{n,j,l} h_l(x_k) + \sum_{p=1}^{l-1} u_{n,j,p} h_p(x_k) \right),
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \beta_{1n,j,k} &= -0, 5\sigma_X^2 (\lambda\sqrt{x_k} + (1 - \lambda))^2, \\
 \beta_{2n,j,k} &= -0, 5\sigma_V^2 x_k, \\
 \beta_{3n,j,k} &= \kappa_x x_j, \\
 \beta_{4n,j,k} &= -\kappa_v (\bar{V} - x_k), \\
 \beta_{5n,j,k} &= -(1 - \gamma)\mu_{c_1} + (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_k) + (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_k) \\
 & \quad + 0, 5\gamma(1 - \gamma)x_k\sigma_1^2 + \beta\theta - (1 - \gamma)\phi_{c_1} x_j - \theta u_{n,j,k}^{-\frac{1}{\theta}}.
 \end{aligned}$$

Für  $j = 0$  folgern wir

$$\eta_{1i,0,k} \frac{u_{i+1,0,k} - u_{i,0,k}}{h} + \eta_{2i,0,k} \frac{u_{i,1,k} - u_{i,0,k}}{h} + \eta_{3i,0,k} u_{i,0,k} = 0,$$

mit

$$\begin{aligned}
 \eta_{1i,0,k} &= x_i(1 - x_i)(\Phi_{c_1} - \Phi_{c_2}), \\
 \eta_{2i,0,k} &= -\kappa_x, \\
 \eta_{3i,0,k} &= (1 - \gamma)(x_i\Phi_{c_1} + (1 - x_i)\Phi_{c_2})
 \end{aligned}$$

und formen äquivalent um zu

$$u_{i,0,k} \left( -\frac{\eta_{1i,0,k}}{h} - \frac{\eta_{2i,0,k}}{h} + \eta_{3i,0,k} \right) + u_{i+1,0,k} \frac{\eta_{1i,0,k}}{h} + u_{i,1,k} \frac{\eta_{2i,0,k}}{h} = 0.$$

Wieder auf ähnliche Weise erhalten wir für  $j = m$  Folgendes, wie oben erwähnt, nutzen wir statt des Vorwärts- den Rückwärtsdifferenzenquotienten.

$$u_{i,m,k} \left( -\frac{\eta_{1,i,m,k}}{h} + \frac{\eta_{2,i,m,k}}{h} + \eta_{3,i,m,k} \right) + u_{i+1,m,k} \frac{\eta_{1,i,m,k}}{h} - u_{i,m-1,k} \frac{\eta_{2,i,m,k}}{h} = 0,$$

mit

$$\eta_{1,i,m,k} = -\eta_{1,i,0,k},$$

$$\eta_{2,i,m,k} = -\eta_{2,i,0,k},$$

$$\eta_{3,i,m,k} = -\eta_{3,i,0,k}.$$

Für  $k = 0$  gilt

$$\begin{aligned} & u_{i,j,0} \left( -2 \frac{\epsilon_{1,i,j,0}}{h^2} - \frac{\epsilon_{2,i,j,0}}{h} - \frac{\epsilon_{3,i,j,0}}{h} - \frac{\epsilon_{4,i,j,0}}{h} + \epsilon_{5,i,j,0} \right) \\ & + u_{i+1,j,0} \frac{\epsilon_{2,i,j,0}}{h} \\ & + u_{i,j+1,0} \frac{\epsilon_{3,i,j,0}}{h} + \frac{\epsilon_{1,i,j,0}}{h^2} \\ & + u_{i,j,1} \frac{\epsilon_{4,i,j,0}}{h} \\ & + u_{i,j-1,0} \frac{\epsilon_{1,i,j,0}}{h^2} \\ & = l_{x,0} h \left( \frac{1}{2} u_{i,0,0} g_0(x_j) + \frac{1}{2} u_{i,m,0} g_m(x_j) + \sum_{q=1}^{m-1} u_{i,q,0} g_q(x_j) \right) \\ & + l_{v,0} h \left( \frac{1}{2} u_{i,j,0} h_0(x_0) + \frac{1}{2} u_{i,j,l} h_l(x_0) + \sum_{p=1}^{l-1} u_{i,j,p} h_p(x_0) \right). \end{aligned}$$

mit

$$\epsilon_{1,i,j,0} = -\frac{1}{2} \sigma_X^2 (1 - \lambda)^2,$$

$$\epsilon_{2,i,j,0} = -x_i (1 - x_i) [\mu_{c_1} - \mu_{c_2} + (\phi_{c_1} - \phi_{c_2}) x_j],$$

$$\epsilon_{3,i,j,0} = \kappa_x x_j,$$

$$\epsilon_{4,i,j,0} = -\kappa_v \bar{V},$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{5,i,j,0} &= -(1 - \gamma)(x_i \mu_{c_1} - (1 - x_i) \mu_{c_2}) + l_{x,0} + l_{v,0} \\ &+ \beta \theta - (1 - \gamma)(x_i \phi_{c_1} + (1 - x_i) \phi_{c_2}) x_j - \theta u_{i,j,0}^{-\frac{1}{\theta}}. \end{aligned}$$

Und abschließend gilt für  $k = l$

$$u_{i,j,l} = 0.$$

Bei der Diskretisierung der Eckpunkte und Kanten muss man aufpassen, dass man keine Punkte außerhalb des Gitterwürfels benötigt. Zum Beispiel müssen im Punkt  $u_{m,0,k}$ , im Vergleich zu oben, einmal den Rückwärts- und einmal den Vorrwärtsdifferenzenquotient nehmen. Dies ist natürlich bei der späteren Implementierung zu beachten.

## 5.2 Numerische Analyse der Lösung

Im vorherigen Kapitel haben wir das Gleichungssystem (23) aufgestellt, welches unter Berücksichtigung der Randbedingungen zu lösen ist. Hierbei stellen sich folgende Fragen der numerischen Analysis:

- Existiert eine eindeutige diskrete Lösung  $u^h$ ?
- Ist die Lösung  $u^h$  beschränkt im Sinne der Definition 2.2.14?
- Konvergiert das Residuum gegen Null für  $h \rightarrow 0$ , bzw. ist die Lösung konsistent nach Definition 2.2.13?
- Konvergiert, für  $h \rightarrow 0$ ,  $u^h$  gegen die kontinuierliche Lösung  $u$  im Sinne der Definition 2.2.15?

### Existenz und Eindeutigkeit

Um die Existenz einer eindeutigen Lösung des Gleichungssystems (23) zu zeigen, untersuchen wir die Matrix  $L_h$  auf besondere Eigenschaften. Wir werden zeigen, dass die Diskretisierung unserer elliptischen Gleichung auf eine sogenannte *M-Matrix* führt, mit dessen Eigenschaften schon die eindeutige Existenz gezeigt ist.

Hierfür nutzen wir Definition 1.76 aus [Str01].

#### **Definition 5.2.1** ( $L_0$ -Matrix, M-Matrix)

Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  nennt man

- (i)  $L_0$ -Matrix, falls  $a_{ij} \leq 0$  für alle  $i \neq j$ ,

(ii)  $M$ -Matrix, falls  $A$  eine reguläre  $L_0$ -Matrix ist und jeder Eintrag von  $A^{-1}$  nichtnegativ ist.

Und nutzen den Satz 1.77 aus [Str01].

**Satz 5.2.2**

Eine  $L_0$ -Matrix  $A$  ist genau dann eine  $M$ -Matrix, falls ein  $y \in \mathbb{R}^n$  mit  $y > 0$  existiert, sodass  $Ay > 0$ . Dann gilt zusätzlich

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{\|y\|_\infty}{\min_k (Ay)_k},$$

wobei  $\|y\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |y_i|$ .

*Beweis.* Siehe Beweis von Satz 1.77 in [Str01]. □

Unsere Matrix  $L_h$  ist *stark diagonaldominant*.

**Definition 5.2.3** (starke Diagonaldominanz)

Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist *stark diagonaldominant*, falls für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

gilt.

Für unsere Matrix  $L_h$  gilt:

$$\begin{aligned} & \left| -\frac{a_{11_{i,j,k}}}{h^2} - \frac{b_{1_{i,j,k}}}{h} \right| + \left| -\frac{a_{22_{i,j,k}}}{h^2} - \frac{b_{2_{i,j,k}}}{h} \right| + \left| -\frac{a_{33_{i,j,k}}}{h^2} - \frac{b_{3_{i,j,k}}}{h} \right| \\ & + \left| -\frac{a_{11_{i,j,k}}}{h^2} \right| + \left| -\frac{a_{22_{i,j,k}}}{h^2} \right| + \left| -\frac{a_{33_{i,j,k}}}{h^2} \right| \\ \stackrel{(*)}{=} & \left| \frac{2a_{11_{i,j,k}}}{h^2} + \frac{2a_{22_{i,j,k}}}{h^2} + \frac{2a_{33_{i,j,k}}}{h^2} + \frac{b_{1_{i,j,k}}}{h} + \frac{b_{2_{i,j,k}}}{h} + \frac{b_{3_{i,j,k}}}{h} \right| \\ < & \left| \frac{2a_{11_{i,j,k}}}{h^2} + \frac{2a_{22_{i,j,k}}}{h^2} + \frac{2a_{33_{i,j,k}}}{h^2} + \frac{b_{1_{i,j,k}}}{h} + \frac{b_{2_{i,j,k}}}{h} + \frac{b_{3_{i,j,k}}}{h} + c_{i,j,k} + d_{i,j,k} \right. \\ & \left. - \theta u_{i,j,k}^{-\frac{1}{\theta}} \right|, \end{aligned}$$

weil  $(c_{i,j,k} + d_{i,j,k}) \geq 0$  aufgrund der Bedingung im Korollar 4.3.7 und zusätzlich  $-\theta u_{i,j,k}^{-\frac{1}{\theta}} > 0$  für unsere relevanten  $\theta \leq -\frac{1}{2}$  (siehe Bemerkung 4.1.1) ist. Die

Gleichheit (\*) gilt, da  $(-\frac{a_{11i,j,k}}{h^2} - \frac{b_{1i,j,k}}{h})$ ,  $(-\frac{a_{22i,j,k}}{h^2} - \frac{b_{2i,j,k}}{h})$ ,  $(-\frac{a_{33i,j,k}}{h^2} - \frac{b_{3i,j,k}}{h}) < 0$  für eine hinreichend kleine Schrittweite  $h$ , denn  $a_{11}, a_{22}, a_{33} > 0$  (siehe (10)). Aus diesem Grund ist unmittelbar ersichtlich, dass  $L_h$  eine  $L_0$ -Matrix ist. Und eine  $L_0$ -Matrix, die stark diagonaldominant ist, ist schon eine  $M$ -Matrix. Dies folgt mit Satz 5.2.2 und der Wahl von  $y = (1, \dots, 1)^\top$ .

### Stabilität

In dem Fall, dass  $L_h$  eine  $M$ -Matrix ist, ist das Schema auch schon stabil. Dies folgt direkt aus Satz 5.2.2:

$$\|u_h\|_\infty = \|L_h^{-1}\|_\infty \|L_h u_h\|_\infty \leq \frac{\|y\|_\infty}{\underbrace{\min_k (L_h y)_k}_{:=K}} \|L_h u_h\|_\infty,$$

mit derselben Wahl von  $y$  wie oben.

**Konsistenz**

Setzen wir also die Lösung  $u$  der Differentialgleichung in das diskretisierte Problem und bilden das Residuum an den Gitterpunkten:

$$\begin{aligned}
 & \|L_h(u|_{G_h}) - (Lu)|_{G_h}\|_h \\
 = & \left\| \begin{aligned} & -a_{11i,j,k} \frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{h^2} - a_{22i,j,k} \frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{h^2} \\ & - a_{33i,j,k} \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{h^2} + b_{1i,j,k} \frac{u_{i,j,k} - u_{i-1,j,k}}{h} \\ & + b_{2i,j,k} \frac{u_{i,j,k} - u_{i,j-1,k}}{h} + b_{3i,j,k} \frac{u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1}}{h} + c_{i,j,k} u_{i,j,k} + d_{i,j,k} u_{i,j,k} \\ & - \left( - \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^3 b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + (d(x) + c(x))u \right) \Big|_{G_h} \end{aligned} \right\|_h \\
 \leq & \left\| -a_{11i,j,k} \frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{h^2} - \left( -a_{11} \frac{\partial^2 u}{(\partial x_1)^2} \right) \Big|_{G_h} \right\|_h \\
 & + \left\| -a_{22i,j,k} \frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{h^2} - \left( -a_{22} \frac{\partial^2 u}{(\partial x_2)^2} \right) \Big|_{G_h} \right\|_h \\
 & + \left\| -a_{33i,j,k} \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{h^2} - \left( -a_{33} \frac{\partial^2 u}{(\partial x_3)^2} \right) \Big|_{G_h} \right\|_h \\
 & + \left\| b_{1i,j,k} \frac{u_{i,j,k} - u_{i-1,j,k}}{h} - \left( b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \Big|_{G_h} \right\|_h \\
 & + \left\| b_{2i,j,k} \frac{u_{i,j,k} - u_{i,j-1,k}}{h} - \left( b_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \Big|_{G_h} \right\|_h \\
 & + \left\| b_{3i,j,k} \frac{u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1}}{h} - \left( b_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) \Big|_{G_h} \right\|_h .
 \end{aligned}$$

Nun betrachten wir die einzelnen Summanden und mit Satz 2.2.19 ergibt sich im Punkt  $(i, j, k)$

$$\begin{aligned}
 & \left\| -a_{11_{i,j,k}} \frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{h^2} - \left(-a_{11} \frac{\partial^2 u}{(\partial x_1)^2}\right) \right\|_{G_h} \Big|_h \\
 = & \left\| -a_{11_{i,j,k}} \frac{u_{i,j,k} + \frac{\partial u_{i,j,k}}{\partial x_1} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j,k}}{(\partial x_1)^2} h^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j,k}}{(\partial x_1)^3} h^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 u_{i,j,k}}{(\partial x_1)^4} h^4 - 2u_{i,j,k} \right. \\
 & \left. + \frac{u_{i,j,k} - \frac{\partial u_{i,j,k}}{\partial x_1} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j,k}}{(\partial x_1)^2} h^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j,k}}{(\partial x_1)^3} h^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 u_{i,j,k}}{(\partial x_1)^4} h^4}{h^2} \right. \\
 & \left. - \left(a_{11_{i,j,k}} \frac{\partial^2 u_{i,j,k}}{(\partial x_1)^2}\right) \right\|_h \\
 = & \left\| -a_{11_{i,j,k}} \frac{1}{24} \left( \frac{\partial^4 u_{i+1,j,k}}{(\partial x_1)^4} h^4 + \frac{\partial^4 u_{i-1,j,k}}{(\partial x_1)^4} h^4 \right) \right\|_h \\
 \leq & \frac{1}{24} \underbrace{\left\| -a_{11_{i,j,k}} \frac{\partial^4 u}{(\partial x_1)^4} + \frac{\partial^4 u}{(\partial x_1)^4} \right\|_\infty}_{=: C_1} h^2.
 \end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\left\| -a_{22_{i,j,k}} \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{h^2} - \left(-a_{22} \frac{\partial^2 u}{(\partial x_2)^2}\right) \right\|_{G_h} \Big|_h \leq C_2 h^2$$

und

$$\left\| -a_{33_{i,j,k}} \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{h^2} - \left(-a_{33} \frac{\partial^2 u}{(\partial x_3)^2}\right) \right\|_{G_h} \Big|_h \leq C_3 h^2,$$

mit  $C_2 := \frac{1}{24} \left\| -a_{22_{i,j,k}} \frac{\partial^4 u}{(\partial x_2)^4} + \frac{\partial^4 u}{(\partial x_2)^4} \right\|_\infty$  und  $C_3 := \frac{1}{24} \left\| -a_{33_{i,j,k}} \frac{\partial^4 u}{(\partial x_3)^4} + \frac{\partial^4 u}{(\partial x_3)^4} \right\|_\infty$ .

Wir betrachten  $\left\| b_{1_{i,j,k}} \frac{u_{i,j,k} - u_{i-1,j,k}}{h} - \left(b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) \right\|_{G_h} \Big|_h$  und erhalten wieder mit Satz 2.2.19 im Punkt  $(i, j, k)$

$$\begin{aligned}
 & \left\| b_{1_{i,j,k}} \frac{u_{i,j,k} - u_{i-1,j,k}}{h} - \left(b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) \right\|_{G_h} \Big|_h \\
 = & \left\| b_{1_{i,j,k}} \frac{u_{i,j,k} - \left(u_{i,j,k} - \frac{\partial u_{i,j,k}}{\partial x_1} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j,k}}{(\partial x_1)^2} h^2\right)}{h} - \left(b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) \right\|_{G_h} \Big|_h \\
 \leq & \frac{1}{2} \underbrace{\left\| b_{1_{i,j,k}} \frac{\partial^2 u}{(\partial x_1)^2} \right\|_\infty}_{=: C_4} h.
 \end{aligned}$$

Entsprechend bekommen wir auch

$$\left\| b_{2_{i,j,k}} \frac{u_{i,j,k} - u_{i,j-1,k}}{h} - \left( b_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \Big|_{G_h} \right\|_h \leq C_5 h$$

und

$$\left\| b_{3_{i,j,k}} \frac{u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1}}{h} - \left( b_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) \Big|_{G_h} \right\|_h \leq C_6 h,$$

mit  $C_5 := \frac{1}{2} \| b_{2_{i,j,k}} \frac{\partial^2 u}{(\partial x_2)^2} \|_\infty$  und  $C_6 := \frac{1}{2} \| b_{3_{i,j,k}} \frac{\partial^2 u}{(\partial x_3)^2} \|_\infty$ .

Wir können also zusammenfassen

$$\| L_h(u|_{G_h}) - (Lu)|_{G_h} \|_h \leq C_1 h^2 + C_2 h^2 + C_3 h^2 + C_4 h + C_5 h + C_6 h \leq Ch,$$

mit  $C = \sum_{i=1}^6 C_i$ . Also ist unsere Approximation konsistent und erreicht Konsistenzordnung eins.

## Konvergenz

Da unsere Approximation sowohl konsistent als auch stabil ist, erhalten wir die Konvergenz direkt mit Satz 2.2.15 und die Konvergenzordnung mit Korollar 2.2.16. Unsere numerische Approximation ist also konvergent mit der Konvergenzordnung eins, denn es gilt

$$\| u - u_h \| \leq Ch,$$

für eine Konstante  $C > 0$ .

### 5.2.1 Fehleranalyse

Der größte Teil der Arbeit für die Fehleranalyse steckt bereits in der Konsistenz und der Stabilität. Wobei die Approximation der rechten Seite unseres Problems  $Lu = F(u)$  noch gar keinen Einfluss hatte. Dies holen wir nun nach. Der Fehler im Punkt  $(i, j, k)$  sei

$$E(u_{i,j,k}, h) := F(u_{i,j,k}) - (F_h)(u_{i,j,k}).$$



Also folgern wir

$$\begin{aligned}
 & \|E(u_{i,j,k}, h)\| \\
 = & \left\| (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot V_t) \int_{x_2^{\min}}^{x_2^{\max}} g(\xi^x) u(x_i, x_j + \xi^x, x_k) d\xi^x \right. \\
 & + (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot V_t) \int_{x_3^{\min}}^{x_3^{\max}} h(\xi^v) u(x_i, x_j, x_k + \xi^v) d\xi^v \\
 & - \left[ (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot V_t) h \right. \\
 & \quad \cdot \left( \frac{1}{2} u_{i,0,k} g_0(x_2) + \frac{1}{2} u_{i,m+1,k} g_{m+1}(x_2) + \sum_{q=1}^m u_{i,q,k} g_q(x_2) \right) \\
 & \quad + (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot V_t) h \\
 & \quad \cdot \left. \left( \frac{1}{2} u_{i,j,0} h_0(x_3) + \frac{1}{2} u_{i,j,l+1} h_{l+1}(x_3) + \sum_{p=0}^{l+1} u_{i,j,p} h_p(x_3) \right) \right] \left. \right\| \\
 \leq & \left\| (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot V_t) \int_{x_2^{\min}}^{x_2^{\max}} g(\xi^x) u(x_i, x_j + \xi^x, x_k) d\xi^x \right. \\
 & - (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot V_t) h \\
 & \quad \cdot \left( \frac{1}{2} u_{i,0,k} g_0(x_2) + \frac{1}{2} u_{i,m+1,k} g_{m+1}(x_2) + \sum_{q=1}^m u_{i,q,k} g_q(x_2) \right) \left. \right\| \\
 & + \left\| (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot V_t) \int_{x_3^{\min}}^{x_3^{\max}} h(\xi^v) u(x_i, x_j, x_k + \xi^v) d\xi^v \right. \\
 & - (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot V_t) h \\
 & \quad \cdot \left( \frac{1}{2} u_{i,j,0} h_0(x_3) + \frac{1}{2} u_{i,j,l+1} h_{l+1}(x_3) + \sum_{p=0}^{l+1} u_{i,j,p} h_p(x_3) \right) \left. \right\|.
 \end{aligned}$$

Wir betrachten wieder nur einen Summanden, da der andere entsprechend abgeschätzt werden kann. Wir wenden den Satz 2.2.17 an und berücksichtigen  $h \geq \frac{x_2^{\max} - x_2^{\min}}{m}$ :

$$\begin{aligned}
 & \left\| (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot V_t) \int_{x_2^{\min}}^{x_2^{\max}} g(\xi^x) u(x_i, x_j + \xi^x, x_k) d\xi^x \right. \\
 & - (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot V_t) h \\
 & \quad \cdot \left( \frac{1}{2} u_{i,0,k} g_0(x_2) + \frac{1}{2} u_{i,m+1,k} g_{m+1}(x_2) + \sum_{q=1}^m u_{i,q,k} g_q(x_2) \right) \left. \right\|_{\infty} \\
 \leq & (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot V_t) \frac{x_2^{\max} - x_2^{\min}}{12} h^2 \max_{i,j,k,\xi^x} |g(\xi^x) u(ih, jh + \xi^x, kh)|.
 \end{aligned}$$

Wir folgern die Abschätzung

$$\|E(u_{i,j,k}, h)\|_\infty \leq C_E h^2. \quad (24)$$

Abschließend zitieren wir aus [Bur07] den Satz 2.15 (unserem Problem angepasst).

**Satz 5.2.4**

Sei  $u \in C^2(\bar{U})$  die Lösung der Differentialgleichung  $Lu = F(u)$  mit dem Operator  $L$  definiert in (20). Weiter sei  $u_h$  die Lösung der Differenzialgleichung  $L_h u_h = F_h(u)$  und die Diskretisierung sei konsistent und stabil. Dann gilt eine Fehlerabschätzung der Form

$$\max_{i,j,k} |u(ih, jh, kh) - u_h(ih, jh, kh)| \leq Ch,$$

mit einer Konstanten  $C$  unabhängig von  $h$ .

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} & L_h(u_{i,j,k} - u_{hi,j,k}) \\ = & L_h u_{i,j,k} - L_h u_{hi,j,k} \\ = & L_h u_{i,j,k} - F_{hi,j,k} \\ = & L_h u_{i,j,k} - (F(u_{i,j,k}) - E(u_{i,j,k})) \\ = & \underbrace{L_h u_{i,j,k} - L u_{i,j,k}}_{:= (r_h)_{i,j,k}} + E(u_{i,j,k}) \end{aligned}$$

Da die Diskretisierung stabil ist, existiert  $L_h^{-1}$ , so dass

$$(u_{i,j,k} - u_{hi,j,k}) = L_h^{-1}((r_h)_{i,j,k} + E(u_{i,j,k}))$$

gilt. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & \max_{i,j,k} |u(ih, jh, kh) - u_h(ih, jh, kh)| \\ = & \max_{i,j,k} |L_h^{-1}((r_h)_{i,j,k} + E(u_{i,j,k}))| \\ \leq & \|L_h^{-1}\|_\infty \max_{i,j,k} |(r_h)_{i,j,k} + E(u_{i,j,k})|, \end{aligned}$$

da unsere Diskretisierung stabil und konsistent ist, gilt zum einen, dass  $L_h^{-1}$  gleichmäßig beschränkt ist, und zum anderen, dass  $\|(r_h)_{i,j,k}\|_\infty \leq Ch$ , wobei  $C$  nur von  $u$  abhängt. Mit (24) folgt die Behauptung.  $\square$

## 6 Numerische Approximation des Preis-Dividenden-Quotienten

In diesem Kapitel wollen wir die Gleichung (8) zuerst auf  $U$  diskretisieren und später lösen. Wir formulieren die Gleichung (8) nun in der Form

$$DL = F(L). \quad (25)$$

Dann gilt

$$D = - \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^3 b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x),$$

mit

$$A(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1^2(1-x_1)^2 x_3 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_X^2 (\lambda \sqrt{x_3} + (1-\lambda))^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_V^2 x_3 \end{pmatrix},$$

$$b(x) = - \begin{pmatrix} b_1 \\ -\kappa_x x_2 + \frac{\theta-1}{I(x)} I_{x_2}(x) \sigma_X^2 (\lambda \sqrt{x_3} + 1 - \lambda)^2 \\ \kappa_v (\bar{V} - x_3) + \frac{\theta-1}{I(x)} I_{x_3}(x) \sigma_V^2 x_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} c(x) &= r(x) - \mu_{D_1} - \phi_{D_1} x_2 \\ &\quad - \sigma_{D_1} \sigma_1 \rho_{C_1, D_1} x_3 \left( -x_1 \gamma + \frac{\theta-1}{I(x)} I_{x_1}(x) x_1 (1-x_1) \right) \\ &\quad + \frac{(l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3)}{I^{\theta-1}(x)} E [I^{\theta-1}(x_1, x_2 + \xi^x, x_3)] \\ &\quad + \frac{(l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3)}{I^{\theta-1}(x)} E [I^{\theta-1}(x_1, x_2, x_3 + \xi^v)] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F(x, L(x)) &= 1 + \frac{l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3}{I^{\theta-1}(x)} E [I^{\theta-1}(x_1, x_2 + \xi^x, x_3) L(x_1, x_2 + \xi^x, x_3)] \\ &\quad + \frac{l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3}{I^{\theta-1}(x)} E [I^{\theta-1}(x_1, x_2, x_3 + \xi^v) L(x_1, x_2, x_3 + \xi^v)], \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} b_1 &= x_1(1-x_1) [\mu_{c_1} - \mu_{c_2} + (\phi_{c_1} - \phi_{c_2}) x_2 - x_1 \sigma_1^2 x_3 + (1-x_1) \sigma_2^2 x_3 \\ &\quad + \sigma_1 \sigma_{D_1} \rho_{C_1, D_1} x_3 + x_1 (-\gamma) \sigma_1^2 x_3 - (1-x_1) (-\gamma) \sigma_2^2 x_3 \\ &\quad + \frac{\theta-1}{I(x)} I_{x_1}(x) x_1 (1-x_1) x_3 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)] \end{aligned}$$

gilt. Die lineare Differentialgleichung (25) ist ein einfacherer Fall als die bereits behandelte nichtlineare Differentialgleichung (10). Aus diesem Grund erhalten wir durch eine analoge Vorgehensweise zu den Kapiteln 4.2 und 4.3 bereits die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung  $L$  für ein  $c(x) - (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3) - (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3) \geq 0$ .

## 6.1 Diskretisierung

Wir nehmen wieder das Gitter

$$G_h := \{(x_i, x_j, x_k) = (ih, jh, kh) \mid i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m, k = 0, \dots, l\}$$

aus dem Kapitel 5, da wir dieselbe Umgebung  $U$  vorliegen haben und verwenden auch die Notation aus Kapitel 5.

Wie bei der Diskretisierung des Problems (10), verwenden wir auch hier für die zweiten Ableitungen den zentralen Differenzenquotienten und für die ersten Ableitungen den Rückwärts- bzw. Vorwärtsdifferenzenquotienten. Wir erhalten die Approximation des Differentialoperators  $D$ :

$$\begin{aligned} & - a_{11_{i,j,k}} \frac{L_{i+1,j,k} - 2L_{i,j,k} + L_{i-1,j,k}}{h^2} - a_{22_{i,j,k}} \frac{L_{i,j+1,k} - 2L_{i,j,k} + L_{i,j-1,k}}{h^2} \\ & - a_{33_{i,j,k}} \frac{L_{i,j,k+1} - 2L_{i,j,k} + L_{i,j,k-1}}{h^2} + b_{1_{i,j,k}} \frac{L_{i,j,k} - L_{i-1,j,k}}{h} \\ & + b_{2_{i,j,k}} \frac{L_{i,j,k} - L_{i,j-1,k}}{h} + b_{3_{i,j,k}} \frac{L_{i,j,k} - L_{i,j,k-1}}{h} + c_{i,j,k} L_{i,j,k}. \end{aligned} \quad (26)$$

Die Erwartungswerte auf der rechten Seite der Gleichung (25) approximieren wir wieder mit der zusammengesetzten Trapezformel und erhalten

$$\begin{aligned} & F_h(x_{i,j,k}, L_{i,j,k}) \\ & = 1 + \frac{l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_k}{I^{\theta-1}(x_{i,j,k})} \\ & \cdot \left[ h \left( \frac{1}{2} I_{i,0,k}^{\theta-1} L_{i,0,k} g_0(x_j) + \frac{1}{2} I_{i,m,k}^{\theta-1} L_{i,m,k} g_m(x_j) + \sum_{q=1}^{m-1} I_{i,q,k}^{\theta-1} L_{i,q,k} g_q(x_j) \right) \right] \\ & + \frac{l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_k}{I^{\theta-1}(x_{i,j,k})} \\ & \cdot \left[ h \left( \frac{1}{2} I_{i,j,0}^{\theta-1} L_{i,j,0} h_0(x_k) + \frac{1}{2} I_{i,j,l}^{\theta-1} L_{i,j,l} h_l(x_k) + \sum_{p=0}^{l-1} I_{i,j,p}^{\theta-1} L_{i,j,p} h_p(x_k) \right) \right]. \end{aligned}$$

Unser diskretisiertes Problem sieht also wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
 D_h L_{i,j,k} &= F_h(L_{i,j,k}) & (27) \\
 \Leftrightarrow L_{i,j,k} &\left( 2 \frac{a_{11,i,j,k}}{h^2} + 2 \frac{a_{22,i,j,k}}{h^2} + 2 \frac{a_{33,i,j,k}}{h^2} + \frac{b_{1,i,j,k}}{h} + \frac{b_{2,i,j,k}}{h} + \frac{b_{3,i,j,k}}{h} + c_{i,j,k} \right) \\
 &+ L_{i-1,j,k} \left( -\frac{a_{11,i,j,k}}{h^2} - \frac{b_{1,i,j,k}}{h} \right) \\
 &+ L_{i,j-1,k} \left( -\frac{a_{22,i,j,k}}{h^2} - \frac{b_{2,i,j,k}}{h} \right) \\
 &+ L_{i,j,k-1} \left( -\frac{a_{33,i,j,k}}{h^2} - \frac{b_{3,i,j,k}}{h} \right) \\
 &+ L_{i+1,j,k} \left( -\frac{a_{11,i,j,k}}{h^2} \right) \\
 &+ L_{i,j+1,k} \left( -\frac{a_{22,i,j,k}}{h^2} \right) \\
 &+ L_{i,j,k+1} \left( -\frac{a_{33,i,j,k}}{h^2} \right) \\
 = &1 + \frac{l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_k}{I^{\theta-1}(x_{i,j,k})} \\
 &\cdot \left[ h \left( \frac{1}{2} I_{i,0,k}^{\theta-1} L_{i,0,k} g_0(x_j) + \frac{1}{2} I_{i,m,k}^{\theta-1} L_{i,m,k} g_m(x_j) + \sum_{q=1}^{m-1} I_{i,q,k}^{\theta-1} L_{i,q,k} g_q(x_j) \right) \right] \\
 &+ \frac{l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_k}{I^{\theta-1}(x_{i,j,k})} \\
 &\cdot \left[ h \left( \frac{1}{2} I_{i,j,0}^{\theta-1} L_{i,j,0} h_0(x_k) + \frac{1}{2} I_{i,j,l}^{\theta-1} L_{i,j,l} h_l(x_k) + \sum_{p=0}^{l-1} I_{i,j,p}^{\theta-1} L_{i,j,p} h_p(x_k) \right) \right].
 \end{aligned}$$

### 6.1.1 Randbedingungen

Wir stellen nun mit Hilfe der Gleichung (25) die Randbedingungen auf.

**Randbedingungen für  $x_1 = 0, 1$**

Am „linken“ Rand verschwinden die Terme mit  $x_1$ .

$x_1 \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}
& -0,5(\sigma_X^2(\lambda\sqrt{x_3} + (1-\lambda))^2 L_{x_2x_2} + \sigma_V^2 x_3 L_{x_3x_3}) \\
& + (\kappa_x x_2 - \frac{\theta-1}{I(x)} I_{x_2}(x) \sigma_X^2 (\lambda\sqrt{x_3} + (1-\lambda))^2) L_{x_2} \\
& - (\kappa_v (\bar{V} - x_3) + \frac{\theta-1}{I(x)} I_{x_3}(x) \sigma_V^2 x_3) L_{x_3} \\
& + \left( r(0, x_j, x_k) - \mu_{D_1} - \phi_{D_1} x_2 \right. \\
& + \frac{(l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3)}{I^{\theta-1}(x)} E [I^{\theta-1}(x_1, x_2 + \xi^x, x_3)] \\
& \left. + \frac{(l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3)}{I^{\theta-1}(x)} E [I^{\theta-1}(x_1, x_2, x_3 + \xi^v)] \right) L \\
= & 1 + \frac{l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3}{I^{\theta-1}(x)} E [I^{\theta-1}(x_1, x_2 + \xi^x, x_3) L(x_1, x_2 + \xi^x, x_3)] \\
& + \frac{l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3}{I^{\theta-1}(x)} E [I^{\theta-1}(x_1, x_2, x_3 + \xi^v) L(x_1, x_2, x_3 + \xi^v)].
\end{aligned}$$

Am „rechten“ Rand verschwinden die Terme mit  $(1 - x_1)$ .

$x_1 \rightarrow 1$ :

$$\begin{aligned}
& -0,5(\sigma_X^2(\lambda\sqrt{x_3} + (1-\lambda))^2 L_{x_2x_2} + \sigma_V^2 x_3 L_{x_3x_3}) \\
& + (\kappa_x x_2 - \frac{\theta-1}{I(x)} I_{x_2}(x) \sigma_X^2 (\lambda\sqrt{x_3} + (1-\lambda))^2) L_{x_2} \\
& - (\kappa_v (\bar{V} - x_3) + \frac{\theta-1}{I(x)} I_{x_3}(x) \sigma_V^2 x_3) L_{x_3} \\
& + \left( r(n, x_j, x_k) - \mu_{D_1} - \phi_{D_1} x_2 + \sigma_{D_1} \sigma_1 \rho_{C_1, D_1} x_3 \gamma \right. \\
& + \frac{(l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3)}{I^{\theta-1}(x)} E [I^{\theta-1}(x_1, x_2 + \xi^x, x_3)] \\
& \left. + \frac{(l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3)}{I^{\theta-1}(x)} E [I^{\theta-1}(x_1, x_2, x_3 + \xi^v)] \right) L \\
= & 1 + \frac{l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_3}{I^{\theta-1}(x)} E [I^{\theta-1}(x_1, x_2 + \xi^x, x_3) L(x_1, x_2 + \xi^x, x_3)] \\
& + \frac{l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_3}{I^{\theta-1}(x)} E [I^{\theta-1}(x_1, x_2, x_3 + \xi^v) L(x_1, x_2, x_3 + \xi^v)].
\end{aligned}$$

**Randbedingungen für  $x_2 = \pm\infty$** 

Für hinreichend großes  $x_2$  sind nur noch folgende Summanden dominant.

$x_2 \rightarrow +\infty$ :

$$-x_1(1-x_1)(\phi_{c_1} - \phi_{c_2})L_{x_1} + \kappa_x L_{x_2} + ((x_1 \cdot \phi_{c_1} + (1-x_1) \cdot \phi_{c_2}) - \phi_{D_1})L = 0.$$

Für hinreichend kleines  $x_2$  gilt Folgendes.

$x_2 \rightarrow -\infty$ :

$$x_1(1-x_1)(\phi_{c_1} - \phi_{c_2})L_{x_1} - \kappa_x L_{x_2} - ((x_1 \cdot \phi_{c_1} + (1-x_1) \cdot \phi_{c_2}) - \phi_{D_1})L = 0.$$

**Randbedingung für  $x_3 = 0, +\infty$** 

Hier verschwinden wieder die Terme mit  $x_3$ .

$x_3 \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\sigma_X^2(1-\lambda)^2 L_{x_2 x_2} \\ & -x_1(1-x_1)[\mu_{c_1} - \mu_{c_2} + (\phi_{c_1} - \phi_{c_2})x_2]L_{x_1} \\ & + (\kappa_x x_2 - \frac{\theta-1}{I(x)} I_{x_2}(x)\sigma_X^2 \cdot (1-\lambda)^2)L_{x_2} - \kappa_v \bar{V}L_{x_3} \\ & + \left[ r(x_i, x_j, 0) - \mu_{D_1} - \phi_{D_1}x_2 \right. \\ & \left. + \frac{l_{x,0}}{I^{\theta-1}(x)} E \left[ I^{\theta-1}(x_1, x_2 + \xi^x, x_3) \right] \right. \\ & \left. + \frac{l_{v,0}}{I^{\theta-1}(x)} E \left[ I^{\theta-1}(x_1, x_2, x_3 + \xi^v) \right] \right] L \\ = & 1 + \frac{l_{x,0}}{I^{\theta-1}(x)} E \left[ I^{\theta-1}(x_1, x_2 + \xi^x, x_3) L(x_1, x_2 + \xi^x, x_3) \right] \\ & + \frac{l_{v,0}}{I^{\theta-1}(x)} E \left[ I^{\theta-1}(x_1, x_2, x_3 + \xi^v) L(x_1, x_2, x_3 + \xi^v) \right]. \end{aligned}$$

Für  $x_3 \rightarrow \infty$  erhalten wir, wie auch beim Wohlstands-Konsum-Quotienten, aus der Gleichung (10) keine Randbedingungen und setzen wieder  $L = 0$ .

Den Rand approximieren wir wieder auf natürliche Weise mit dem Vorwärtsdifferenzenquotienten, falls  $i, j$  oder  $k$  gleich 0 und mit dem Rückwärtsdifferenzenquotienten, falls  $i, j$  oder  $k$  gleich  $n, m$  bzw.  $l$  ist. Wir erhalten durch

eine ähnliche Vorgehensweise wie in Abschnitt 5.1.1 unsere Randbedingung für  $i = 0$ :

$$\begin{aligned}
 & L_{0,j,k} \left( \frac{-2\alpha_{10,j,k}}{h^2} - \frac{2\alpha_{20,j,k}}{h^2} - \frac{\alpha_{30,j,k}}{h} - \frac{\alpha_{40,j,k}}{h} + \frac{\alpha_{50,j,k}}{h} \right) \\
 & + L_{0,j+1,k} \left( \frac{\alpha_{10,j,k}}{h^2} + \frac{\alpha_{30,j,k}}{h} \right) \\
 & + L_{0,j-1,k} \frac{\alpha_{10,j,k}}{h^2} + L_{0,j,k+1} \left( \frac{\alpha_{20,j,k}}{h^2} + \frac{\alpha_{40,j,k}}{h} \right) + L_{0,j,k-1} \frac{\alpha_{20,j,k}}{h^2} \\
 = & 1 \\
 & + \frac{l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_k}{I^{\theta-1}(x_{0,j,k})} \\
 & \cdot \left[ h \left( \frac{1}{2} I_{0,0,k}^{\theta-1} L_{0,0,k} g_0(x_j) + \frac{1}{2} I_{0,m,k}^{\theta-1} L_{0,m,k} g_m(x_j) + \sum_{q=1}^{m-1} I_{0,q,k}^{\theta-1} L_{0,q,k} g_q(x_j) \right) \right] \\
 & + \frac{l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_k}{I^{\theta-1}(x_{0,j,k})} \\
 & \cdot \left[ h \left( \frac{1}{2} I_{0,j,0}^{\theta-1} L_{0,j,0} h_0(x_k) + \frac{1}{2} I_{0,j,l}^{\theta-1} L_{0,j,l} h_l(x_k) + \sum_{p=0}^{l-1} I_{0,j,p}^{\theta-1} L_{0,j,p} h_p(x_k) \right) \right],
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \alpha_{10,j,k} &= -0, 5\sigma_X^2 (\lambda\sqrt{x_k} + (1-\lambda))^2, \\
 \alpha_{20,j,k} &= -0, 5\sigma_V^2 x_k, \\
 \alpha_{30,j,k} &= \kappa_x x_j - \frac{\theta-1}{I(x_{0,j,k})} I_{x_2}(x_{0,j,k}) \sigma_X^2 (\lambda\sqrt{x_k} + (1-\lambda))^2, \\
 \alpha_{40,j,k} &= -\kappa_v (\bar{V} - x_k) - \frac{\theta-1}{I(x_{0,j,k})} I_{x_3}(x_{0,j,k}) \sigma_V^2 x_k, \\
 \alpha_{50,j,k} &= r(0, x_j, x_k) - \mu_{D_1} - \phi_{D_1} x_j \\
 & + \frac{(l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_k)}{I^{\theta-1}(x_{0,j,k})} E [I^{\theta-1}(x_0, x_j + \xi^x, x_k)] \\
 & + \frac{(l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_k)}{I^{\theta-1}(x_{0,j,k})} E [I^{\theta-1}(x_0, x_j, x_k + \xi^v)]
 \end{aligned}$$



und für  $i = n$ :

$$\begin{aligned}
& L_{n,j,k} \left( -\frac{2\beta_{1n,j,k}}{h^2} - \frac{2\beta_{2n,j,k}}{h^2} - \frac{\beta_{3n,j,k}}{h} - \frac{\beta_{4n,j,k}}{h} + \frac{\beta_{5n,j,k}}{h} \right) \\
& + L_{n,j+1,k} \left( \frac{\beta_{1n,j,k}}{h^2} + \frac{\beta_{3n,j,k}}{h} \right) + L_{n,j-1,k} \frac{\beta_{1n,j,k}}{h^2} \\
& + L_{n,j,k+1} \left( \frac{\beta_{2n,j,k}}{h^2} + \frac{\beta_{4n,j,k}}{h} \right) + L_{n,j,k-1} \frac{\beta_{2n,j,k}}{h^2} \\
= & 1 \\
& + \frac{l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_k}{I^{\theta-1}(x_{n,j,k})} \\
& \cdot \left[ h \left( \frac{1}{2} I_{n,0,k}^{\theta-1} L_{n,0,k} g_0(x_j) + \frac{1}{2} I_{n,m,k}^{\theta-1} L_{n,m,k} g_m(x_j) + \sum_{q=1}^{m-1} I_{n,q,k}^{\theta-1} L_{n,q,k} g_q(x_j) \right) \right] \\
& + \frac{l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_k}{I^{\theta-1}(x_{n,j,k})} \\
& \cdot \left[ h \left( \frac{1}{2} I_{n,j,0}^{\theta-1} L_{n,j,0} h_0(x_k) + \frac{1}{2} I_{n,j,l}^{\theta-1} L_{n,j,l} h_l(x_k) + \sum_{p=0}^{l-1} I_{n,j,p}^{\theta-1} L_{i,j,p} h_p(x_k) \right) \right],
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\beta_{1n,j,k} &= -0, 5\sigma_X^2 (\lambda\sqrt{x_k} + (1-\lambda))^2, \\
\beta_{2n,j,k} &= -0, 5\sigma_V^2 x_k, \\
\beta_{3n,j,k} &= \kappa_x x_j - \frac{\theta-1}{I(x_{n,j,k})} I_{x_2}(x_{n,j,k}) \sigma_X^2 (\lambda\sqrt{x_k} + (1-\lambda))^2, \\
\beta_{4n,j,k} &= -\kappa_v (\bar{V} - x_k) - \frac{\theta-1}{I(x_{n,j,k})} I_{x_3}(x_{n,j,k}) \sigma_V^2 x_k, \\
\beta_{5n,j,k} &= r(n, x_j, x_k) - \mu_{D_1} - \phi_{D_1} x_j + \sigma_{D_1} \sigma_1 \rho_{C_1, D_1} x_3 \gamma \\
& + \frac{(l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_k)}{I^{\theta-1}(x_{n,j,k})} E [I^{\theta-1}(x_n, x_j + \xi^x, x_k)] \\
& + \frac{(l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_k)}{I^{\theta-1}(x_{n,j,k})} E [I^{\theta-1}(x_n, x_j, x_k + \xi^v)].
\end{aligned}$$

Für  $j = 0$  erhalten wir

$$L_{i,0,k} \left( -\frac{\eta_{1i,0,k}}{h} - \frac{\eta_{2i,0,k}}{h} + \frac{\eta_{3i,0,k}}{h} \right) + L_{i+1,0,k} \frac{\eta_{1i,0,k}}{h} + L_{i,1,k} \frac{\eta_{2i,0,k}}{h} = 0,$$

mit

$$\begin{aligned}
\eta_{1i,0,k} &= x_i (1 - x_i) (\Phi_{c_1} - \Phi_{c_2}), \\
\eta_{2i,0,k} &= -\kappa_x, \\
\eta_{3i,0,k} &= -(x_i \cdot \phi_{c_1} + (1 - x_i) \cdot \phi_{c_2}) + \phi_{D_1}.
\end{aligned}$$

Für  $j = m$  nutzen wir wieder den Rückwärtsdifferenzenquotienten.

$$L_{i,n,k} \left( \frac{\eta_{1,i,n,k}}{h} - \frac{\eta_{2,i,n,k}}{h} + \frac{\eta_{3,i,n,k}}{h} \right) + L_{i-1,n,k} - \frac{\eta_{1,i,n,k}}{h} \\ + L_{i,n-1,k} - \frac{\eta_{2,i,n,k}}{h} = 0,$$

mit

$$\eta_{1,i,n,k} = -\eta_{1,i,0,k},$$

$$\eta_{2,i,n,k} = -\eta_{2,i,0,k},$$

$$\eta_{3,i,n,k} = -\eta_{3,i,0,k}.$$

Für  $k = 0$  gilt

$$L_{i,j,0} \left( -2 \frac{\epsilon_{1,i,j,0}}{h^2} - \frac{\epsilon_{2,i,j,0}}{h} - \frac{\epsilon_{3,i,j,0}}{h} - \frac{\epsilon_{4,i,j,0}}{h} + \epsilon_{5,i,j,0} \right) \\ + L_{i+1,j,0} \frac{\epsilon_{2,i,j,0}}{h} \\ + L_{i,j+1,0} \frac{\epsilon_{3,i,j,0}}{h} + \frac{\epsilon_{1,i,j,0}}{h^2} \\ + L_{i,j,1} \frac{\epsilon_{4,i,j,0}}{h} \\ + L_{i,j-1,0} \frac{\epsilon_{1,i,j,0}}{h^2} \\ = l_{x,0} h \left( \frac{1}{2} u_{i,0,0} g_0(x_j) + \frac{1}{2} u_{i,m,0} g_m(x_j) + \sum_{q=1}^{m-1} u_{i,q,0} g_q(x_j) \right) \\ + l_{v,0} h \left( \frac{1}{2} u_{i,j,0} h_0(x_0) + \frac{1}{2} u_{i,j,l} h_l(x_0) + \sum_{p=1}^{l-1} u_{i,j,p} h_p(x_0) \right),$$

mit

$$\begin{aligned}
\epsilon_{1i,j,0} &= -\frac{1}{2}\sigma_X^2(1-\lambda)^2, \\
\epsilon_{2i,j,0} &= -x_i(1-x_i)[\mu_{c_1} - \mu_{c_2} + (\phi_{c_1} - \phi_{c_2})x_j], \\
\epsilon_{3i,j,0} &= \kappa_x x_j - \frac{\theta-1}{I(x)} I_{x_2}(x)\sigma_X^2(1-\lambda)^2, \\
\epsilon_{4i,j,0} &= -\kappa_v \bar{V}, \\
\epsilon_{5i,j,0} &= r(x_i, x_j, 0) - \mu_{D1} - \phi_{D1} x_j \\
&\quad + \frac{l_{x,0}}{I_{i,j,0}^{(\theta-1)}} h \\
&\quad \cdot \left( \frac{1}{2} I_{i,j,0}^{(\theta-1)} g_0(x_j) + \frac{1}{2} I_{i,m,0}^{(\theta-1)} g_m(x_j) + \sum_{q=1}^{m-1} I_{i,q,0}^{(\theta-1)} g_q(x_j) \right) \\
&\quad + \frac{l_{v,0}}{I_{i,j,0}^{(\theta-1)}} h \\
&\quad \cdot \left( \frac{1}{2} I_{i,0,0}^{(\theta-1)} h_0(x_0) + \frac{1}{2} I_{i,m,0}^{(\theta-1)} h_m(x_0) + \sum_{q=1}^{m-1} I_{i,q,0}^{(\theta-1)} h_q(x_0) \right).
\end{aligned}$$

und für  $x_3 = l$  setzen wir  $L_{i,j,l} = 0$ .

## 6.2 Numerische Analyse der Lösung

Die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (27) erhalten wir wieder analog zu Abschnitt 5.2. Mit der Bedingung  $c(x) \geq 0$  ist unsere Matrix  $D_h$  wieder stark diagonaldominant und wir können alle Aussagen, die in Abschnitt 5.2 behandelten Sätze und Definitionen, benutzen. Unsere Approximation ist also konvergent mit der Konvergenzordnung eins.

## 7 Programmierung des Modells

In diesem Kapitel gehen wir auf die Implementierung des Modells zur Berechnung eines Optionswertes in MathWorks Matlab (R2010a) ein. Unser Programm wird mit `Main.m` gestartet. Hier wird zunächst das Gebiet  $U$ , auf welchem diskretisiert wurde, festgelegt.

```
min_X = 0; max_X=1;
min_Y =-0.1; max_Y=0.1;
min_Z =0; max_Z=10
```

Weiter werden die Schrittweiten `h1`, `h2` und `h3` gewählt. Bisher hatten wir nur eine Schrittweite, für die  $h = \max\{h1, h2, h3\}$  galt, wobei  $h1 = \Delta x_1$ ,  $h2 = \Delta x_2$  und  $h3 = \Delta x_3$  ist (siehe Kapitel 5). Nun erstellen wir mit

```
[X,Y,Z] = ndgrid(min_X:h1:max_X, min_Y:h2:max_Y,
                 min_Z:h3:max_Z);
```

unser Gitter auf  $U$ . Nach dem Einlesen der Modelldaten und der Modellparameter startet die Berechnung des *Wohlstands-Konsum-Quotienten* und anschließend die Berechnung des *Preis-Dividenden-Quotienten*, wobei hier auch die *risikolose Zinsrate* berechnet wird. Weiter folgt die Implementierung der *Monte-Carlo Simulation*. Hier werden unter anderem auch die Modelldynamiken berechnet, die einen möglichen Verlauf des Finanzmarktes simulieren. Abschließend kann nach  $n$ -maligem Durchlaufen der Monte-Carlo Simulation der Optionswert berechnet werden.

### 7.1 Implementierung der Approximation des Wohlstands-Konsum-Quotienten

Für die Implementierung des Wohlstands-Konsum-Quotienten nutzen wir die Diskretisierung aus Kapitel 5. Sie wird aufgerufen mit

```
[u I]=Wohlstands_Konsum_Quotient(Parameter, h1, h2, h3,
                                 size_data_X, size_data_Y, size_data_Z, X, Y, Z);,
```

wobei uns, zum Beispiel,

```
size_data_X = size(X,1);
```

die Anzahl der Stützstellen in  $x_1$ -Richtung gibt. In der Funktion `Wohlstands_Konsum_Quotient.m` werden zu Beginn die Koeffizienten von unserem Differentialoperator  $L_h$  (siehe Kapitel 5) initialisiert und anschließend  $L_h$  und  $F_h$  berechnet.

```
%compute F
F = initialize_Values_F(u,h2,h3, size_data_X, size_data_Y,
    size_data_Z,Parameter, Y ,Z);
%compute L
[L F] = initialize_Values_L(L, F, u, Parameter, size_data_X,
    size_data_Y, size_data_Z, h1..., d);
```

Da nach Kapitel 5 sowohl der Koeffizient  $c$ , als auch  $F_h$  von  $u$  abhängt, wird das Gleichungssystem in einer `while`-Schleife gelöst.

```
while norm((u-u_alt))>eps && k<500
    k=k+1;
    %Speichern der alten Version
    u_alt=u;
    F = initialize_Values_F(u_alt,h2, h3, ..., Y ,Z);
    [L F] = initialize_Values_L(L, F, u_alt, Parameter,
        size_data_X, ..., d);
    F = reshape(F, [numel(F) 1]);
    u =L\F;
end
if k==500
    disp('keine Loesung fuer u gefunden, maximale
        Iterationszahl ueberschritten');
end
```

Die Abbruchkriterien sind einmal die Überschreitung einer maximalen Iterationsanzahl (hier 500) und der Abstand zweier aufeinander folgend Iterationen (hier die Maschinengenauigkeit). Am Ende wird  $u$  mit

```
I=u.^(1/Parameter.theta);
```

zurücktransformiert und  $I$  wieder an die Datei `Main.m` übergeben.

### initialize\_Values\_F.m

In dieser Datei wird das  $F_h$  aus Kapitel 5 berechnet, wobei das Integral mit Hilfe der zusammengesetzten Trapezformel diskretisiert wurde und die Funktionen  $g$  und  $h$  jeweils die verschobenen Dichten der Normal- bzw. der Exponentialverteilung sind. Mit

```
s = 1 / (SA * sqrt(2*pi));
g_0_temp = zeros(1,m);
g_0 = zeros(size_grid);
for index=1:m
    g_0_temp(index) = s*exp(-0.5 * ((Y(1,1,1)-
        Y(1,index,1) - EW)^2 / SA^2));
    g_0(:,index,:) = g_0_temp(index);
end
```

wird für jeden Punkt  $(i, j, k)$  das  $g_0$  aus der Formel (22) berechnet. Genauso berechnen wir auch  $g_{m+1}$  und  $g_{qtemp}$ . Unser  $g_q$  in Matlab ist schon bereits die Summe  $\sum_{q=1}^{m-1} u_{i,q,k} g_q(x_j)$  aus der Formel (22) und wird mit

```
for i=1:size_data_X
    for j=1:size_data_Y
        for k=1:size_data_Z
            u_vektor = u(i,:,k);
            g_q(i,j,k) = g_q_temp(j,:) * u_vektor';
        end
    end
end
```

berechnet, da die Summe gleich dem Skalarprodukt ist. Analog implementieren wir die Diskretisierung des Integrals mit der verschobenen Exponentialverteilung. Und erhalten unser F durch

```
F = (l_x_0 + l_x_1 .* Z) .* h2 .* (0.5 .* u_i_0_k .* g_0
    + 0.5 .* u_i_m_k .* g_m + g_q)...
    + (l_v_0 + l_v_1 .* Z) .* h3 .* (0.5 .* u_i_j_0 .* h_0
    + 0.5 .* u_i_j_1 .* h_1 + h_p);,
```

wobei beispielsweise die Punkte  $u_{i,0,k}$  mit

## 7.1 Implementierung der Approximation des Wohlstands-Konsum-Quotienten

---

```

u_i_0_k = zeros(size_grid);
boundary_temp = u(:,1,:);
for index=1:m
    u_i_0_k(:,index,:) = boundary_temp;
end

```

berechnet wurden.

### initialize\_Values\_L.m

Hier wird das  $L_h$  aus Kapitel 5 implementiert. Jedoch haben wir aufgrund der Konvektionsdominanz die Diskretisierung mit Hilfe des Upwind-Verfahrens stabilisiert. So dass für  $L_h u_h = F_h$  nun Folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
& u_{i,j,k} \left( \frac{2a_{11i,j,k}}{h1^2} + \frac{2a_{22i,j,k}}{h2^2} + \frac{2a_{33i,j,k}}{h3^2} + \frac{\max\{b_{1i,j,k}, 0\}}{h1} - \frac{\min\{b_{1i,j,k}, 0\}}{h1} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\max\{b_{2i,j,k}, 0\}}{h2} - \frac{\min\{b_{2i,j,k}, 0\}}{h2} + \frac{\max\{b_{3i,j,k}, 0\}}{h3} - \frac{\min\{b_{3i,j,k}, 0\}}{h3} \right. \\
& \quad \left. + c_{i,j,k} + d_{i,j,k} - \theta u_{i,j,k}^{-\frac{1}{\theta}} \right) \\
& + u_{i-1,j,k} \left( -\frac{a_{11i,j,k}}{h1^2} - \frac{\max\{b_{1i,j,k}, 0\}}{h1} \right) \\
& + u_{i,j-1,k} \left( -\frac{a_{22i,j,k}}{h2^2} - \frac{\max\{b_{2i,j,k}, 0\}}{h2} \right) \\
& + u_{i,j,k-1} \left( -\frac{a_{33i,j,k}}{h3^2} - \frac{\max\{b_{3i,j,k}, 0\}}{h3} \right) \\
& + u_{i+1,j,k} \left( -\frac{a_{11i,j,k}}{h1^2} + \frac{\min\{b_{1i,j,k}, 0\}}{h1} \right) \\
& + u_{i,j+1,k} \left( -\frac{a_{22i,j,k}}{h2^2} + \frac{\min\{b_{2i,j,k}, 0\}}{h2} \right) \\
& + u_{i,j,k+1} \left( -\frac{a_{33i,j,k}}{h3^2} + \frac{\min\{b_{3i,j,k}, 0\}}{h3} \right) \\
& = (l_{x,0} + l_{x,1} \cdot x_k) h2 \left( \frac{1}{2} u_{i,0,k} g_0(x_j) + \frac{1}{2} u_{i,m,k} g_m(x_j) + \sum_{q=1}^{m-1} u_{i,q,k} g_q(x_j) \right) \\
& \quad + (l_{v,0} + l_{v,1} \cdot x_k) h3 \left( \frac{1}{2} u_{i,j,0} h_0(x_k) + \frac{1}{2} u_{i,j,l} h_l(x_k) + \sum_{p=1}^{l-1} u_{i,j,p} h_p(x_k) \right).
\end{aligned}$$

Mittels if-else-elseif-Schleifen stellen wir unsere Systemmatrix  $L_h$  auf.

## 7.1 Implementierung der Approximation des Wohlstands-Konsum-Quotienten

---

```

for k=1:l
    for j=1:m
        for i=1:n
            if (k==size_data_Z)

                row_index = sub2ind(size_grid,i,j,size_data_Z);

                f(row_index) = 0;
                L(row_index,row_index) = 1;

            elseif(k==1 && i==n && j>1 && j<m)
                .
                .
                .
            else

                row_index = sub2ind(size_grid, i,j,k);

                %Diagonale
                L(row_index, row_index) = 2*a_11(i,j,k)/h1^2
                +2*a_22(i,j,k)/h2^2+2*a_33(i,j,k)/h3^2
                + max(b_1(i,j,k),0)/h1-min(b_1(i,j,k),0)/h1
                +max(b_2(i,j,k),0)/h2-min(b_2(i,j,k),0)/h2
                + max(b_3(i,j,k),0)/h3-min(b_3(i,j,k),0)/h3
                + c(i,j,k)+d(i,j,k)-theta.*u(i,j,k).^(-1/theta);

                %linker Nachbar
                column_index = sub2ind(size_grid, i-1,j,k);
                L(row_index,column_index)=-a_11(i,j,k)/h1^2
                -max(b_1(i,j,k),0)/h1;

                %rechter Nachbar
                column_index = sub2ind(size_grid, i+1,j,k);
                L(row_index,column_index)=-a_11(i,j,k)/h1^2
                +min(b_1(i,j,k),0)/h1;

                %obere Nachbar
                column_index = sub2ind(size_grid, i,j-1,k);
                L(row_index,column_index)=-a_22(i,j,k)/h2^2
                -max(b_2(i,j,k),0)/h2;

```



```
%unterer Nachbar
column_index = sub2ind(size_grid, i,j+1,k);
L(row_index,column_index)=-a_22(i,j,k)/h2^2
+min(b_2(i,j,k),0)/h2;

%vorderer Nachbar
column_index = sub2ind(size_grid, i,j,k-1);
L(row_index, column_index)=-a_33(i,j,k)/h3^2
-max(b_3(i,j,k),0)/h3;

%hinterer Nachbar
column_index = sub2ind(size_grid, i,j,k+1);
L(row_index,column_index)=-a_33(i,j,k)/h3^2+
min(b_3(i,j,k),0)/h3;

end

end

end

end
```

Es wird also mit der Matlabfunktion `sub2ind` die jeweilige Zeile und Spalte der Systemmatrix ausfindig gemacht und entsprechend gefüllt. Bei den Randbedingungen muss man darauf achten, dass keine Punkte außerhalb des Gitterwürfels verwendet werden.

## 7.2 Implementierung der Approximation des Preis-Dividenden-Quotienten

Die Berechnung des Preis-Dividenden-Quotienten wird in `Main.m` mit

```
[L r] = Preis_Dividenden_Quotient(Parameter,I,u, h1, h2, h3,
size_data_X, size_data_Y, size_data_Z, X, Y, Z);
```

aufgerufen. Auch hier werden zuerst die Koeffizienten initialisiert und anschließend die Systemmatrix  $D$  und die rechte Seite des Gleichungssystems  $F$

aufgestellt. Die ersten Ableitungen von  $I$  werden in der Datei `finite_differences.m` berechnet.

```
function diffI=finite_differences(I, h1, h2, h3, size_data_X,
size_data_Y, size_data_Z, direction)
%Berechnet den Differenzenquotienten von I fuer die erste
%Ableitung nach
%x1, x2 oder x3

I = reshape(I,[size_data_X, size_data_Y, size_data_Z]);

diffI=zeros(size(I));

if direction == 1

    diffI(1:size_data_X-1, :, :)=(I(2:size_data_X, :, :)...
        -I(1:size_data_X-1, :, :))/h1;
    diffI(size_data_X, :, :)=(I(size_data_X, :, :)...
        -I(size_data_X-1, :, :))/h1;

elseif direction == 2

    diffI(:, 1:size_data_Y-1, :)=(I(:, 2:size_data_Y, :)...
        -I(:, 1:size_data_Y-1, :))/h2;
    diffI(:, size_data_Y, :)=(I(:, size_data_Y, :)...
        -I(:, size_data_Y-1, :))/h2;

else %direction == 3 oder falsche Eingabe

    diffI(:, :, 1:size_data_Z-1)=(I(:, :, 2:size_data_Z)...
        -I(:, :, 1:size_data_Z-1))/h3;
    diffI(:, :, size_data_Z)=(I(:, :, size_data_Z)...
        -I(:, :, size_data_Z-1))/h3;

end
```

Die Integralterme berechnen wir in `initialize_Values_Integralterm_Y.m` für den Sprung in  $x_2$  und in `initialize_Values_Integralterm_Z.m` für den Sprung in  $x_3$ . Die Intergralterme haben wir genauso wie die Integralterme im Wohlstands-Konsum-Quotienten implementiert. Des Weiteren wird in der Datei `Preis_Dividenden_Quotient.m` die risikolose Zinsrate  $r$  an al-

len Stützstellen berechnet und später an `Main.m` gegeben. Die Matrix  $D$  und der Vektor  $F$  wurden nach demselben Muster, wie in Kapitel 7.1, aufgestellt. Und die Lösung  $L$  auch wieder in einer `while`-Schleife gelöst.

### 7.3 Implementierung der Monte-Carlo Simulation

Die Datei `Main.m` ruft die Monte-Carlo Simulation mit

```
for i=1:n
[V_T(i) P_T(i) R]=MonteCarloSimulation(Parameter, I, L, r, X,
    Y, Z, size_data_X, size_data_Y, size_data_Z,
    max_X, min_X, max_Y, min_Y, max_Z, min_Z, T,
    N, dt);
end
```

$n$ -Mal auf. Hier werden mögliche Verläufe des Finanzmarktes simuliert und später mit diesen Modellmarktgrößen der Pricing-Kernel und der Endwert der Aktie berechnet. Die Datei `MonteCarloSimulation.m` beginnt mit der Programmierung der Dynamiken des Modells aus dem Kapitel 3.

#### Implementierung der Volatilität

Die Dynamik der Volatilität wird in der Datei `MonteCarloSimulation.m` unter

```
v_Zustand=initialize_Values_V_Zustand(Parameter,
    max_Z, min_Z);
```

berechnet. Diese Funktion bestimmt zuerst einen Startwert

```
v_Zustand(1)=Parameter.Mean_V;;
```

und berechnet den weiteren Verlauf in einer `while`-Schleife.

```
while min(v_Zustand)<min_Z || max(v_Zustand)>max_Z
```

```

    k=k+1;
    .
    .
    .
end

```

Die `while`-Schleife stellt sicher, dass die Volatilität nicht über das Gebiet  $U$  hinausgeht. In der `while`-Schleife wird als erstes der Wiener Prozess

```
W=Wiener_Prozess(T,N);
```

simuliert. Weiter wird die Sprunghöhe berechnet, die eine exponentialverteilte Zufallsvariable ist.

```
xi_v = exprnd(Parameter.EW_V,N+1,1);
```

Zuletzt wird der Verlauf der Volatilität mit der in Kapitel 3 vorgestellten Formel

```

for i=2:N+1
    dN=poissrnd((Parameter.l_v_0+Parameter.l_v_1
        .*v_Zustand(i-1))*dt,N+1,1);
    dv_Zustand(i)=Parameter.kappa_V
        *(Parameter.Mean_V-v_Zustand(i-1))*dt
        +sqrt(dt)*(Parameter.sigma_V
        *sqrt(v_Zustand(i-1)))*W(i)+xi_v(i)*dN(i);
    v_Zustand(i)=v_Zustand(i-1)+dv_Zustand(i);
end

```

simuliert, wobei in der `for`-Schleife zuerst der Poisson Prozess berechnet wird.

### Implementierung des Wohlstandsverlaufs

Die Simulation des Wohlstandssverlauf wird in der Datei `MonteCarloSimulation.m` mit

```
x_Zustand=initialize_Values_X_Zustand(Parameter,  
    max_Y, min_Y, v_Zustand);
```

aufgerufen. Wiederum wird zuerst der Startwert

```
x_Zustand(1)=Parameter.EW *Parameter.kappa_X^(-1);
```

bestimmt und dann der weitere Verlauf in einer `while`-Schleife

```
while min(x_Zustand)<min_Y || max(x_Zustand)>max_Y  
    k=k+1;  
    .  
    .  
    .  
end
```

berechnet. Erneut stellt die `while`-Schleife sicher, dass der Wohlstandssverlauf nicht über das Gebiet  $U$  hinausgeht. Zu Beginn wird der Wiener Prozess

```
W=Wiener_Prozess(T,N);
```

und dann der Poisson Prozess

```
dN=poissrnd((Parameter.l_x_0+Parameter.l_x_1.*v_Zustand)  
    *dt,N+1,1);
```

simuliert. Anschließend wird die normalverteilte Zufallsvariable, die Sprunghöhe, mit

```
xi_x = Parameter.EW.*ones(N+1,1)+Parameter.SA.*randn(N+1,1);
```

berechnet, um am Ende wieder den Verlauf mit der in Kapitel 3 vorgestellten Formel

```
for i=2:N+1
```

```

dx_Zustand(i)=-Parameter.kappa_X * x_Zustand(i-1)
*dt+sqrt(dt)*(Parameter.sigma_X * sqrt(v_Zustand(i))
*W(i)+xi_x(i)*dN(i));
x_Zustand(i)=x_Zustand(i-1)+dx_Zustand(i);
end

```

auswerten zu können.

### Implementierung der Konsumaufteilung

Nun beschreiben wir die Implementierung des Verlaufs der Konsumaufteilung, die in unserer Hauptdatei mit

```

s_Zustand =initialize_Values_s_Zustand(Parameter, max_X,
min_X,v_Zustand, x_Zustand);

```

startet. Wie bei den anderen beiden Dynamiken wird ein Startwert gewählt

```

s_Zustand(1)=0.5;

```

und anschließend in einer while-Schleife der weitere Verlauf mit

```

while min(s_Zustand)<min_X || max(s_Zustand)>max_X
    k=k+1;
    %Simulieren einer Brownschen Bewegung
    W1=Wiener_Prozess(T,N);
    W2=Wiener_Prozess(T,N);
    .
    .
    .
end

```

berechnet, wobei wir hier jeweils einen Wiener Prozess für die beiden Konsumverläufe haben. Nun folgt die Simulation nach der in Kapitel 3 hergeleiteten Formel.

```

for i=2:N+1
    ds_Zustand(i)=s_Zustand(i-1)*(1-s_Zustand(i-1))
        *(Parameter.mu_c1-Parameter.mu_c2
        +(Parameter.phi_c1-Parameter.phi_c2)
        *x_Zustand(i)-s_Zustand(i-1)
        *Parameter.sigma_1^2*v_Zustand(i)
        +(1-s_Zustand(i-1))*Parameter.sigma_2^2
        *v_Zustand(i))*dt
        +sqrt(dt)*s_Zustand(i-1)*(1-s_Zustand(i-1))
        *sqrt(v_Zustand(i))*Parameter.sigma_1*W1(i)
        -sqrt(dt)*s_Zustand(i-1)*(1-s_Zustand(i-1))
        *sqrt(v_Zustand(i))*Parameter.sigma_2*W2(i);
    s_Zustand(i)=s_Zustand(i-1)+ds_Zustand(i);
end

```

Sind die Dynamiken der Volatilität, der Konsumaufteilung und des Zustands implementiert, können wir den Wohlstands-Konsum-Quotienten  $I$  mit den möglichen Verläufen eines Finanzmarktes auswerten. Dieses geschieht mit

```

[s_neu, x_neu, v_neu, I_neu, Index_s, Index_x, Index_v]
=IndexBerechnung(N, X, Y, Z, s_Zustand, x_Zustand,
v_Zustand, I, size_data_X, size_data_Y, size_data_Z);

```

Die Funktionen

```

s_neu=union(X(:,1,1),s_Zustand);
x_neu=union(Y(1,(:,1))',x_Zustand);
v_neu=union(reshape(Z(1,1,:),numel(Z(1,1,:)),1),v_Zustand)

```

in `IndexBerechnung.m` sortieren die neuen Zustände von  $s$ ,  $x$  und  $v$  in die Gittervektoren ein und löschen doppelt vorkommende Werte. Mit

```

I_neu=interp(X,Y,Z,I,s_neu1,x_neu1,v_neu1);

```

wird  $I$  auf das erweiterte Gitter interpoliert.

Um die richtige Reihenfolge der Indizes zu erhalten, führen wir noch

```

for i=1:N+1
    [~,Index_s(i)]=min(abs(s_neu-s_Zustand(i)
        .*ones(size(s_neu))));
end

Index_x=zeros(N+1,1)
for i=1:N+1
    [~,Index_x(i)]=min(abs(x_neu-x_Zustand(i)
        .*ones(size(x_neu))));
end

Index_v=zeros(N+1,1)
for i=1:N+1
    [~,Index_v(i)]=min(abs(v_neu-v_Zustand(i)
        .*ones(size(v_neu))));
end

```

aus. Nun ist die Indexberechnung abgeschlossen und es kann der Wohlstands-Konsum-Quotient für die Zustände berechnet werden.

```

I_Index=zeros(N+1,1);
for i=1:N+1
    I_Index(i)=I_neu(Index_s(i),Index_x(i),Index_v(i));
end

```

Analog gehen wir für den Preis-Dividenden-Quotient  $L$  vor. Sind auch die Dynamiken des Konsums und der Dividende simuliert, wird in `MonteCarloSimulation.m` mit

```

P_T=exp(-Parameter.beta*Parameter.theta*T-(1-Parameter.theta)
    *(sum((I_Index).^(-1))*dt))
    *(c_Zustand(N+1))^(Parameter.gamma)
    *(I_neu(Index_s(N+1), Index_x(N+1),Index_v(N+1)))
    ^(-Parameter.theta-1);

```

der Endwert des Pricing-Kernels und mit

```

V=zeros(N+1,1);

```



```

for i=1:N+1
V(i)=L_neu(Index_s(i),Index_x(i),Index_v(i))*D1(i);
end
%Uebergabe des Endpreises der Aktie
V_T=V(N+1);

```

der Endwert einer Aktie berechnet und an die Datei `Main.m` gegeben.

## 7.4 Implementierung des Callpreises

Als Letztes wird in `Main.m` der erwartete Callpreis einer Option für einen vorher festgelegten *strike price*  $K$  berechnet. Hierfür konstruieren wir ein neues Gitter für die *moneyness*, welches symmetrisch um den Mittelpunkt liegt.

```

x_min=round((-1.2*T^(1/(12*T)))*100)/100;
x_max=round((1.2*T^(1/(12*T)))*100)/100;
M_moneyness=round(1200*T^(1/(12*T)));%M_moneyness ist die
%Feinheit des Gitters fuer den Erwartungswert der verschiedenen
%moneyiness-Werte
[moneyness,dx]=Gitter(M_moneyness,x_min,x_max);%moneyness ist
%hier die moneyness ueber das Intervall [x_min,x_max]

```

Nach der Berechnung des Basiswertes mit

```
V_0=(1/n)*sum(V_T.*P_T);
```

wird mit dem in Abschnitt 2.2.2 hergeleiteten Schätzer der erwartete Callpreis für jeden Gitterpunkt berechnet.

```

for i=0:M_moneyness
    %Bestimme den Strike Price bei gegebenem Preis und Moneyness
    K=V_0*(1+moneyness(i+1));

    %Berechne den Schaetzer fuer den Erwartungswert des
    %Callpreises fuer
    %jedes einzelne K.

```

```
%Schaetzung des Erwartungswertes:  
  
%heutiger Callpreis  
Call(i+1,1)=(1/n)*sum(P_T.*max(0,V_T-K*ones(n,1)));%Call(i)  
%ist unser geschaetzter Optionswert für einen vorher  
%festgelegten strike price K(i)  
  
end
```

## 8 Ergebnisse

Bei der Simulation unseres Modells haben wir die Parameter aus [BRS11] genutzt. Um in der ersten Simulation das Modell einfach zu halten wurden geringfügige Abweichungen vorgenommen. Sie sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

Definition	Parameter	Wert
erwartete Wachstumsrate des ersten Konsumprozesses	$\mu_{c1}$	0.0192
erwartete Wachstumsrate des zweiten Konsumprozesses	$\mu_{c2}$	0.0192
Gewichtung des Einflusses des Wohlstands $X$ auf den Drift des ersten Konsumprozesses	$\phi_{c1}$	1
Gewichtung des Einflusses des Wohlstands $X$ auf den Drift des zweiten Konsumprozesses	$\phi_{c2}$	1
Gewichtung des Einflusses der Volatilität $V$ auf den ersten Konsumprozess	$\sigma_1$	0.022863
Gewichtung des Einflusses der Volatilität $V$ auf den zweiten Konsumprozess	$\sigma_2$	0.022863
Geschwindigkeit der Mittelwertrückkehr von $X$	$\kappa_X$	0.008779
Gewichtung des Einflusses der Volatilität $V$ auf den Wohlstandsverlauf	$\sigma_X$	0.000085
erwartete Volatilität	$\bar{V}$	1
Geschwindigkeit der Mittelwertrückkehr von $V$	$\kappa_V$	3.6000
Intensität des Poisson-Prozesses von $X$	$l_{x,o} + l_{x,1}V$	$l_{x,0} = 0$ $l_{x,1} = 0.8$
Intensität des Poisson-Prozesses von $V$	$l_{v,o} + l_{v,1}V$	$l_{v,0} = 0$ $l_{v,1} = 0.8$
erwartete Sprunghöhe des Poisson-Prozesses von $X$	$E[\xi_x]$	-0.01
erwartete Sprunghöhe des Poisson-Prozesses von $V$	$E[\xi_v]$	2.5
Varianz der Sprunghöhe des Poisson-Prozesses von $X$	$Var[\xi_x]$	-0.01

Definition	Parameter	Wert
Risikoaversionskoeffizient	$\gamma$	10
zeitlicher discount Faktor	$\beta$	0.02
intertemporale Substitutionselastizität	$\psi$	2
erwartete Wachstumsrate des ersten Dividendenprozesses	$\mu_{D_1}$	1
erwartete Wachstumsrate des zweiten Dividendenprozesses	$\mu_{D_2}$	1
Gewichtung des Einflusses des Wohlstands $X$ auf den Drift des ersten Konsumprozesses	$\phi_{D_1}$	1
Gewichtung des Einflusses des Wohlstands $X$ auf den Drift des zweiten Konsumprozesses	$\phi_{D_2}$	1
Gewichtung des Einflusses der Volatilität $V$ auf den ersten Konsumprozess	$\sigma_{D_1}$	1
Gewichtung des Einflusses der Volatilität $V$ auf den zweiten Konsumprozess	$\sigma_{D_2}$	1
Korrelation zwischen dem Konsumprozess und der Dividende	$\rho_{C_1, D_1}$	1
Korrelation zwischen dem Konsumprozess und der Dividende	$\rho_{C_2, D_2}$	1

Die Parameter sollen einen „realistischen“ Finanzmarkt wiedergeben. Jedoch muss gleichzeitig auf die Einhaltung der herausgearbeiteten Schranken geachtet werden, damit es möglich ist eine numerische Lösung zu erhalten. Leider haben wir keine „realistische“ Simulation unseres Modells erhalten. Bereits die Lösung des Wohlstands-Konsum-Quotienten war fehlerhaft. Jedoch wissen wir im Falle der Existenz einer beschränkten positiven Lösung für die partielle Differentialgleichung in  $I$ , liegt auch für unsere transformierte partielle Differentialgleichung in  $u$  eine beschränkte positive Lösung vor. Für diese partielle Differentialgleichung konnten wir die eindeutige Existenz einer Lösung beweisen und es ist unmittelbar ersichtlich, dass  $u = 0$  eine Lösung ist. Also liegt es nahe, sowohl das Modell als auch die Randbedingungen nochmals zu studieren. Denn der Fehler kann bereits bei der Erstellung des Modells vorliegen. Hier wurde ein stationäres (Gleichgewichts-) Modell numerisch aufgearbeitet, jedoch die Frage offen gelassen, ob ein solcher stationärer Zustand auftritt. Des Weiteren wurde in der Diplomarbeit selbst schon die Problematik der Randbedingungen erwähnt. Hier war es uns leider nicht möglich alle Randbedingungen aus der partiellen Differentialgleichung abzulesen und es wurde versucht mit einer sinnvoll erscheinenden Vermutung, über das Verhalten des Wohlstands-Konsum-Quotienten, eine Randbedingung

aufzustellen. Weiter besteht die Möglichkeit, dass außerhalb unseres Gebietes  $U$  noch eine weitere positive Lösung existiert, was man noch untersuchen könnte. Es wird ein  $I \in [90, 160]$  erwartet.

## 9 Zusammenfassung und Ausblick

Ziel der vorliegenden Diplomarbeit war es eine numerische Analyse eines Long Run Risks Modells zu erstellen, um anschließend, zum Beispiel, Call-Optionen zu bewerten.

Zu Beginn haben wir die Grundlagen der Optionspreisberechnung eingeführt. In diesem Kapitel wurde geklärt was eine Option ist und wir haben Annahmen an unseren Finanzmarkt gestellt. Weiter wurden in diesem Teil der Arbeit erste mathematische Grundbegriffe und Hilfsmittel gegeben, die im späteren Verlauf der Arbeit benötigt wurden. Und es wurde eine Einleitung in die Monte-Carlo Simulation gegeben.

Im Kapitel 3 haben wir das uns vorliegende Modell vorgestellt. Wir haben die einzelnen Zustandsvariablen beschrieben und deren Dynamiken hergeleitet. Nach der Einführung der Nutzenfunktion des Investors, wurde die partielle Differentialgleichung für den Wohlstands-Konsum-Quotienten hergeleitet. Mit diesem Quotienten konnten wir nun den Pricing Kernel und, nach der Herleitung der Dynamik des Pricing Kernels, auch die risikofreie Zinsrate und den Marktpreis des Risikos formulieren. Abschließend wurde in dem Kapitel noch die partielle Differentialgleichung für den Preis-Dividenden-Quotient hergeleitet.

Nun folgte eine Analyse der partiellen Differentialgleichung, wobei wir mit der nichtlinearen partiellen Differentialgleichung für den Wohlstands-Konsum-Quotienten starteten. Hier haben wir gezeigt, dass unsere PDGL elliptisch ist und haben die Eindeutigkeit und Existenz einer Lösung, unter bestimmten Bedingungen, gezeigt. Bei diesem Beweis haben wir erst eine allgemeine elliptische PDGL betrachtet und sind dann anschließend auf unsere konkrete PDGL eingegangen.

Nach der Analyse folgte die numerische Approximation der PDGL für den Wohlstands-Konsum-Quotienten. Hier haben wir die PDGL auf einem Gitter diskretisiert und Randbedingungen aufgestellt. Anschließend haben wir eine numerische Analyse der Approximation durchgeführt.

Die Behandlung der partiellen Differentialgleichung für den Preis-Dividenden-Quotient hat uns wenig Arbeit gemacht, da es ein einfacherer Fall war als die zuvor behandelte nichtlineare PDGL. Zum Schluss haben wir das Modell und die Approximationen des Wohlstands-Konsum-Quotienten und des Preis-Dividenden-Quotienten in das Programm Matlab implementiert. Weiter wurde die Monte-Carlos Simulation implementiert, um den Callpreis zu bestimmen.

Wir haben unser Ergebnis nicht simuliert, da unsere transformierte Lösung des Wohlstands-Konsum-Quotienten Null ist. Im Kapitel 8 wurden mögliche Fehlerquellen diskutiert. Erhält man einen „realistischen“ Wohlstands-Konsum-Quotienten besteht die Möglichkeit das Modell noch zu erweitern. Wir haben der Einfachheit halber angenommen, dass ein Investor alle repräsentiert. Hier könnte man auch mindestens zwei Investoren betrachten. Eine weitere Modifikation könnte sein, dass die Agenten, die auf dem Markt handeln, von den auftretenden Börsencrash lernen und sich dementsprechend verhalten. Ein Stichwort dafür ist *Bayesian Updating*.

## Literatur

- [Alt06] Hans W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer, 2006. 5., überarbeitete Auflage.
- [BCDG10] Luca Benzoni, Pierre Collin-Dufresne, and Robert S. Goldstein. Explaining Asset Pricing Puzzles Associated with the 1987 Market Crash, 2010. second Version.
- [BRS11] Nicole Branger, Paulo Rodrigues, and Christian Schlag. The Role of Volatility Shocks and Rare Events in Long-Run Risk Models, 2011. Paper.
- [BS11] BS. The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 1997, Stand: 13.12.2011. [http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/economics/laureates/1997/](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1997/).
- [Bur07] Martin Burger. Numerik partielle Differentialgleichungen, WS 2006/07. Skript.
- [Bur08] Martin Burger. Partielle Differentialgleichungen, WS 2008. Skript.
- [CT04] Rama Cont and Peter Tankov. *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, 2004.
- [Eva08] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2008. Volume 19.
- [EZ89] Larry G. Epstein and Stanley E. Zin. Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework. *Econometrica* 57, pages S. 937–969, 1989.
- [FHH04] Jürgen Franke, Wolfgang Härdle, and Christian Hafner. *Einführung in die Statistik der Finanzmärkte*. Springer, 2004. 2. Auflage.
- [For84] Otto Forster. *Analysis 3*. Vieweg, 1984. 3. Auflage.
- [For04] Otto Forster. *Analysis 1*. Vieweg, 2004. 7. Auflage.



- 
- [For11] Peter Forsyth. An Introduction to Computational Finance Without Agonizing Pain, 2011. <http://www.cs.uwaterloo.ca/paforsyth/agon.pdf>.
- [Gab11] Gab. Gabler Wirtschaftslexikon, Stand: 07.11.2011. <http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Archiv/757/optionsgeschaefv8.html>.
- [Heu10] Christof Heuer. NuBAkO - Entwicklung und Anwendung einer Toolbox zur Bewertung von Derivaten. Master's thesis, Westfälische Wilhelms-Universität Münster - Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, 2010.
- [Irl98] Albrecht Irl. *Finanzmathematik*. Teubner, 1998.
- [Mar99] Robert Maringer. Mathematik derivater Finanzinstrumente, 1999. Skript.
- [Mar09] Ian Martin. The Lucas Orchard, 2009. Working Paper.
- [Mun] Claus Munk. Financial asset pricing theory. Work in Progress.
- [Nat05] Frank Natterer. Einführung in die Numerische Mathematik. Höhere Numerische Mathematik, 2004/2005. Skript.
- [Ros76] Stephen Ross. The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing. *Journal of Economic Theory*, pages S. 341–360, 1976.
- [Sha64] William Sharpe. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *Journal of Finance*, pages S. 425–442, 1964.
- [Str01] Jens Struckmeier. Numerik Partieller Differentialgleichungen, 2001. Skript.
- [Vei06] Jochen Veith. *Bewertung von Optionen unter der Coherent Market Hypothesis*. Deutscher Universitäts-Verlag, 2006. Dissertation Universität Tübingen.
- [Wer07] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, 2007. 6., korrigierte Auflage.
- [Wür07] Anja Würfel. Analytische und numerische Lösung der Black-Scholes-Gleichung für europäische und amerikanische Basket-Optionen. Master's thesis, Technische Universität Berlin - Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften, 2007.

- [Zai06] Michael Zaiser. Structured Credits - Der heilige Gral des Kapitalmarkts?, 2006. HVB Credit & Credit Derivatives Strategy Team.
- [Zoc10] Jann-Phillipp Zocher. Numerische Berechnung von Preis-Konsum Quotienten in verallgemeinerten Gleichgewichtsmodellen. Master's thesis, Westfälische Wilhelms-Universität Münster - Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, 2010.

## Erklärung der Eigenständigkeit

Hiermit versichere ich, Johannes Härtel, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Gedanklich, inhaltlich oder wörtlich Übernommenes habe ich durch Angabe von Herkunft und Text oder Anmerkung belegt bzw. kenntlich gemacht. Dies gilt in gleicher Weise für Bilder, Tabellen und Skizzen, die nicht von mir selbst erstellt wurden.

Alle auf der CD beigefügten Programme sind von mir selbst programmiert worden.

---

Münster, 06.07.2012