

WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Local Discontinuous Galerkin Verfahren für die Stokes Gleichungen und Homogenisierung in porösen Medien

Diplomarbeit

vorgelegt von
Felix Albrecht

Betreuer: Prof. Dr. Mario Ohlberger

Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Münster, Oktober 2009

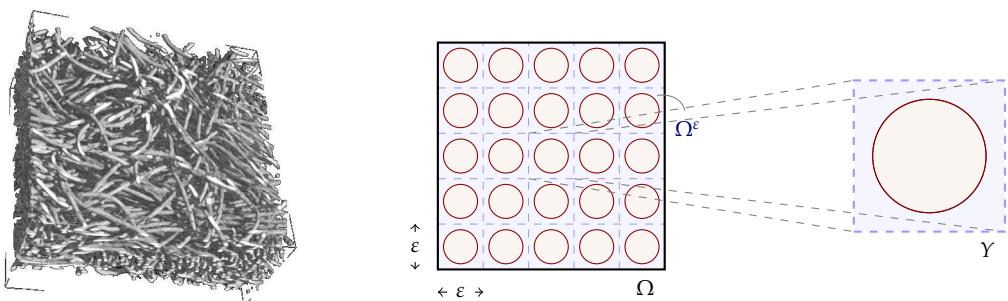
Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	3
2 Die Stokes Gleichungen	9
2.1 Die Stokes Gleichungen	11
2.1.1 Die stationären Stokes Gleichungen	11
2.1.2 Funktionenräume	13
2.1.3 Die schwache Formulierung der Stokes Gleichungen	16
2.2 Die Local Discontinuous Galerkin Methode	19
2.2.1 Die diskrete Variationsformulierung	19
2.2.2 Die Systemmatrizen	28
2.2.3 Die Kondensation der Matrizen	37
2.3 Iterative Lösungsverfahren	39
2.3.1 Das Verfahren der Konjugierten Gradienten	39
2.3.2 Die Lösung des Sattelpunktproblems	41
2.4 Die Implementierung in DUNE	45
2.4.1 Die Klassen in <code>dune-stokes/stokes/</code>	47
2.4.2 Eine Beispielimplementierung in <code>dune-stokes/src/</code>	49
2.5 Numerische Experimente	51
3 Einphasenströmung in homogenen porösen Medien	57
3.1 Einphasenströmung in periodischen porösen Medien	59
3.2 Zwei-Skalen Konvergenz und Homogenisierung	61
3.3 Das Darcy Gesetz	67
3.4 Die Implementierung in DUNE und COMSOL	69
3.4.1 Die Approximation des Permeabilitätstensors	69
3.4.2 Die Lösung des elliptischen Darcy Problems	73

3.5 Numerische Experimente	75
3.5.1 Die Approximation des Permeabilitätstensors	75
3.5.2 Die Lösung des elliptischen Darcy Problems	78

1 Einleitung

In vielen anwendungsorientierten Fragestellungen der Flüssigkeitsdynamik stößt man auf Phänomene, bei deren Modellierung mehrere räumliche Skalen involviert sind. So ist man beispielsweise bei der Ausbeutung von Ölreservoirs, bei der Beseitigung von Verunreinigungen im Grundwasser oder beim Design von Brennstoffzellen am makroskopischen Verhalten bestimmter Größen, wie zum Beispiel der Sättigung, dem Druck oder der Geschwindigkeit einer Flüssigkeit, interessiert. Die zugrundeliegenden chemischen oder physikalischen Prozesse können jedoch nur auf einer mikroskopischen Skala beschrieben werden. Charakteristisch für Problemstellungen, die mehrere Skalen enthalten, ist also das Verhältnis der Größe eines makroskopischen Gebietes Ω , welches mitunter mehrere Quadratkilometer umfassen kann, zu einer feinen Mikrostruktur innerhalb dieses Gebietes, die durch einen Parameter $\varepsilon > 0$ charakterisiert wird.



Gasdiffusionsschicht einer Brennstoffzelle

(Fraunhofer ITWM, Kaiserslautern)

Mathematische Modellierung eines periodischen
porösen Mediums Ω^ε

Abbildung 1.1: Beispiel der Mikrostruktur in einer Brennstoffzelle (links) und der mathematischen Modellierung eines homogenen porösen Mediums Ω^ε in zwei Raumdimensionen und der entsprechenden periodischen Einheitszelle Y (rechts).

So entspricht ε zum Beispiel dem Durchmesser einer Faser in einer Gasdiffusionsschicht bei der Betrachtung von Brennstoffzellen. Üblicherweise ist ε um mehrere Größenordnungen kleiner als eine typische Größe in Ω , es gilt also $\varepsilon \ll |\Omega|$.

Ein solches Gebiet modellieren wir als ein poröses Medium Ω^ε . Unter einem porösen Medium verstehen wir ein Gebiet, welches Hindernisse der Größe ε enthält, durch die zum Beispiel eine Flüssigkeit nicht strömen kann. Im einfachsten Fall ist ein homogenes poröses Medium durch eine periodische Anordnung von gleichförmigen Hindernissen gegeben (siehe Abbildung 1.1). Die mikroskopischen Hindernisse sind dabei jeweils affin ähnlich zu einem Hindernis in der periodischen Einheitszelle Y , die, skaliert und verschoben, das homogene poröse Medium ausfüllt.

In der vorliegenden Arbeit interessieren wir uns für das makroskopische Verhalten eines Fluids in einem homogenen porösen Medium Ω^ε . Die Strömung eines Fluids mit Viskosität μ in Ω^ε wird durch die Geschwindigkeit u^ε des Fluids und den Druck p^ε , der auf das Fluid wirkt, beschrieben. Diese sind als Lösungen der stationären Stokes Gleichungen,

$$\begin{aligned} \nabla p^\varepsilon - \varepsilon^2 \mu \Delta u^\varepsilon &= f && \text{in } \Omega^\varepsilon, \\ \nabla \cdot u^\varepsilon &= 0 && \text{in } \Omega^\varepsilon, \end{aligned}$$

mit homogenen Dirichletrandwerten gegeben. Für die Lösungen dieses vollen Feinskalenproblems nimmt man die Existenz einer asymptotischen Entwicklung der Form

$$p^\varepsilon(x) = p_0(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon p_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 p_2(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \dots$$

mit Funktionen $p_i(x, y)$ an, wobei diese Funktionen von den Variablen $x \in \Omega^\varepsilon$ und $y = \frac{x}{\varepsilon} \in Y$ abhängen und Y -periodisch in y sind.¹ Das makroskopische Verhalten solch einer Funktion zeigt sich dabei in Abhängigkeit von der „langsam“ Variablen x , während sich das mikroskopische oder oszillatorische Verhalten der Funktion in Abhängigkeit der „schnell“ Variablen y zeigt. Um die Stokes Gleichungen numerisch erfolgreich lösen zu können, müssen wir die feine Skala des porösen Mediums auflösen. Für die Berechnung der numerischen Approximationen müssen wir daher ein Gitter der Feinheit ε , oder kleiner, für das Gebiet Ω^ε zugrunde legen. Dies stellt in der Praxis eine unnötige Herausforderung für existierende Hardware dar und führt zu technisch bedingten

¹Diese Annahme ist zum Beispiel durch die Existenz und die Form des Zwei-Skalen Grenzwertes gerechtfertigt (siehe Bemerkung 3.2.3).

Beschränkungen, etwa in der Größe des zu behandelten Gebietes Ω oder in der gewünschten Genauigkeit der Berechnung. Diese Hindernisse sind in sofern unnötig, als dass wir nur am makroskopischen Verhalten des Fluids interessiert sind und nicht am mikroskopischen Anteil der Strömung. Formal bedeutet dies, dass wir am Grenzwert obiger Gleichung für $\varepsilon \rightarrow 0$ interessiert sind (vergleiche Abbildung 1.2). In welchem Sinne ist

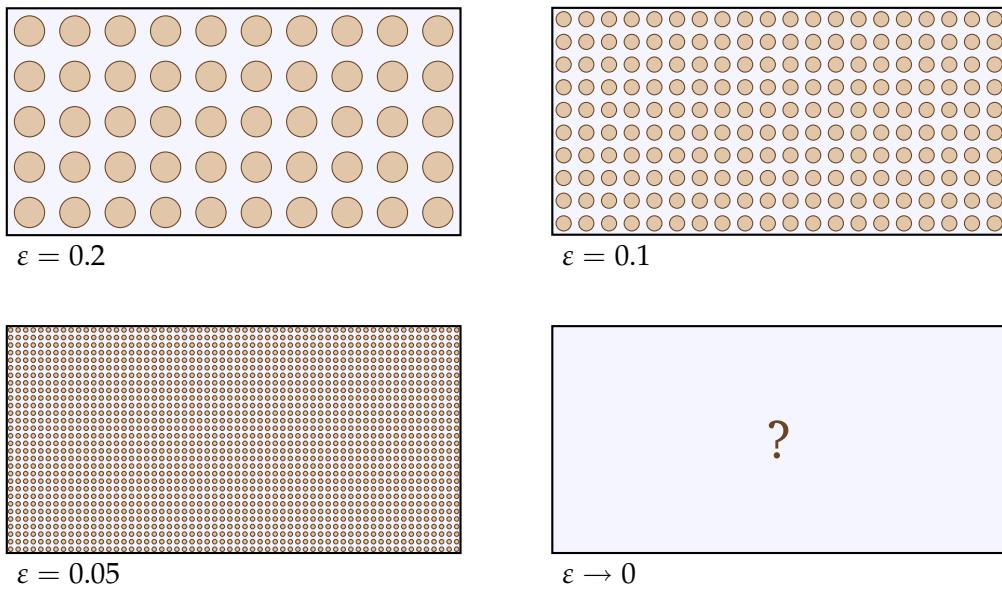


Abbildung 1.2: Homogenisierungsgrenzwert

diese Aussage zu verstehen? Da für jedes $\varepsilon > 0$ eine eindeutige schwache Lösung der Stokes Gleichungen existiert, kann man sinnvollerweise fragen, ob Grenzwerte der Folgen $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ und $(p^\varepsilon)_\varepsilon$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ existieren und, wenn ja, welche Art von Konvergenz dieser Betrachtung zugrunde liegt. Außerdem kann man fragen, welche Differentialgleichung die Grenzwerte $u_0 := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon$ und $p_0 := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p^\varepsilon$ erfüllen, falls sie existieren. Eine Antwort auf diese beiden Fragen liefert die Theorie der Homogenisierung mit Hilfe der Zwei-Skalen Konvergenz. Bei dem Begriff der Zwei-Skalen Konvergenz, der Anfang der 1990er Jahre von Nguetseng [Ngu89] und Allaire [All92] eingeführt wurde, handelt es sich um einen sinnvollen Konvergenzbegriff für Folgen von Funktionen, die einen periodischen Mikroanteil aufweisen. Durch Verwendung von Testfunktionen der Form $\varphi(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$ gelangt man dabei mit Hilfe der Zwei-Skalen Konvergenz zu einem sinnvollen Grenzwert, der dem ersten Term der asymptotischen Entwicklung entspricht. Man erhält also

zum Beispiel für den Druck einen Grenzwert $p_0(x, y)$, der einen makroskopischen Anteil in Abhängigkeit von x und einen mikroskopischen Anteil in Abhängigkeit von y aufweist. Durch Mittelung über die mikroskopische Variable y erhält man einen makroskopischen Druck $p(x) := \int_Y p_0(x, y) dy$. Mit Hilfe der oszillierenden Testfunktionen $\varphi(x, y)$ erhält man als Ergebnis der Homogenisierung eine Variationsformulierung einer partiellen Differentialgleichung, die von den Grenzwerten der Folgen $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ und $(p^\varepsilon)_\varepsilon$ erfüllt wird ([Hor97]). Um aus dieser Variationsformulierung eine Differentialgleichung zu erhalten, welche das makroskopische Verhalten der Geschwindigkeit und des Drucks beschreibt, führt man die Einheitszellen Stokes Probleme,

$$\begin{aligned} \nabla \pi_i - \Delta \omega_i &= e_i && \text{in } Y, \\ \nabla \cdot \omega_i &= 0 && \text{in } Y, \\ y \mapsto \pi_i(y), \omega_i(y) && & \text{Y-periodisch,} \end{aligned}$$

mit den Einheitsvektoren e_i für jede Raumrichtung i , ein. Mit Hilfe dieser mikroskopischen Lösungen auf der periodischen Einheitszelle Y definiert man den Permeabilitätsensor A durch

$$(A)_{ij} := \int_{Y_s} \nabla \omega_i(y) \cdot \nabla \omega_j(y) dy.$$

In diesem Permeabilitätsensor sind alle nötigen Informationen über die Mikroskala kodiert. Mittelt man die homogenisierte Variationsformulierung über die mikroskopische Variable, so erhält man das Darcy Gesetz

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\mu} A \left(f(x) - \nabla p(x) \right) && \text{in } \Omega, \\ \nabla \cdot u(x) &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u(x) \cdot n_\Omega &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dieses Darcy Gesetz beschreibt das makroskopische Verhalten des Fluids in den makroskopischen Größen u und p als ein System zweiter Ordnung. Dieses elliptische System kann unabhängig von ε gelöst werden. Zur Bestimmung des Permeabilitätsensors ist man lediglich auf die Lösung der mikroskopischen Einheitszellen Stokes Probleme angewiesen. Schon 1856 hatte Darcy beobachtet, dass das makroskopische Verhalten einer Strömung durch ein poröses Medium durch das Darcy Gesetz beschrieben wird

([Dar56]). Doch erst in den 1980er Jahren wurde dieses Gesetz von Keller und Tartar ([Kel80], [Tar80]) mathematisch fundiert.

Motiviert durch die Einheitszellen Stokes Probleme befassen wir uns in Kapitel 2 mit der effizienten Lösung der stationären Stokes Gleichungen mit Hilfe von Local Discontinuous Galerkin Methoden. Den theoretischen Überlegungen des zweiten Kapitels liegt die Arbeit von Cockburn, Kanschat, Schötzau und Schwab von 2002, [CKSS02], zugrunde. In Abschnitt 2.4 stellen wir außerdem die Implementierung eines numerischen Verfahrens zur Bestimmung einer approximativen Lösung der Stokes Gleichungen mit Hilfe von Local Discontinuous Galerkin Methoden innerhalb des Softwareframeworks DUNE² vor. Eine ähnliche Implementierung wurde schon 2008 von Kräkel vorgestellt ([KrÄ08]). Da wir im Hinblick auf die Verwendung dieser Implementierung im Kontext von Mehrskalensimulationen an Allgemeinheit und Flexibilität der verwendeten Interfaceklassen interessiert sind, haben wir über die Arbeit von Kräkel hinausgehend die in Abschnitt 2.4 vorgestellte Implementierung durchgeführt.³ Diese Implementierung ist in enger Zusammenarbeit mit Herrn René Milk entstanden, wofür ich mich an dieser Stelle herzlich bedanken möchte. Während der eigene Aufgabenbereich hauptsächlich in der theoretischen Herleitung der Systemmatrizen und der Implementierung der Assemblierung dieser Matrizen bestand (Abschnitt 2.2), hat sich Herr Milk hauptsächlich für die Theorie und Implementierung des Sattelpunktlösers und der zugrundeliegenden CG Verfahren (Abschnitt 2.3) verantwortlich gezeigt. Im letzten Abschnitt des zweiten Kapitels stellen wir numerische Experimente vor, in denen wir die Resultate aus [CKSS02, §4] nachvollziehen und zu derselben Schlussfolgerung bezüglich der Optimalität der Konvergenzordnung des Verfahrens kommen.

Im dritten Kapitel dieser Arbeit befassen wir uns mit der zu Beginn dieser Einleitung dargestellten Problematik der Strömung eines Fluids in einem homogenen porösen Medium. Dazu führen wir den Begriff eines homogenen porösen Mediums und den Begriff der Zwei-Skalen Konvergenz ein. Mittels Homogenisierung erhalten wir aus dem vollen Feinskalenproblem das Darcy Gesetz. Außerdem befassen wir uns mit der Implementierung dieser Mehrskalenproblematik. Dazu stellen wir, aufbauend auf der in Kapitel 2 vorgestellten Implementierung, eine Lösung des Einheitszellen Stokes Problems in DUNE zur Bestimmung des Permeabilitätstensors vor. Für ein sandiges Medium stellen wir bei-

²<http://www.dune-project.org/>

³Die im Rahmen dieser Arbeit entstandene Implementierung liegt der Arbeit als CD-ROM bei.

1. Einleitung

spielhaft eine Lösung des Darcy Gesetzes mit Hilfe von COMSOL⁴ vor, wobei wir den zuvor berechneten Permeabilitätstensor verwenden. Die so gewonnene makroskopische Lösung vergleichen wir qualitativ mit den entsprechenden Lösungen des vollen Feinskalen Stokes Problems. Dabei beobachten wir eine gute qualitative Übereinstimmung der vollen Feinskalenlösung mit der makroskopischen Lösung.

Ziel zukünftiger Arbeit ist es, auch die Lösung des Darcy Gesetzes in DUNE zu implementieren, um eine quantitative Fehleranalyse betreiben zu können.

An dieser Stelle möchte ich mich auch bei Herrn Prof. Dr. Mario Ohlberger herzlich für die sehr gute Betreuung bedanken.

Münster, den 26. Oktober 2009

⁴<http://www.comsol.de/>

2 Die Stokes Gleichungen

In diesem Kapitel befassen wir uns mit der Diskretisierung und Lösung der Stokes Gleichungen mit Hilfe von Local Discontinuous Galerkin Methoden. Die Stokes Gleichungen beschreiben die Strömung eines inkompressiblen Fluids in einem gegebenen Gebiet und sind damit eine linearisierte Form der Navier-Stokes Gleichungen für langsame Strömungen. Für die Stokes Gleichungen sind Existenz und Eindeutigkeit von schwachen Lösungen bewiesen (siehe Satz 2.1.13 und [Tem77]).

Im Gegensatz zu anderen Diskretisierungen, wie zum Beispiel Gemischten Finiten Elementen (siehe [BF91]), überführt man die Stokes Gleichungen für die Local Discontinuous Galerkin Diskretisierung zuerst in ein System von Gleichungen erster Ordnung, bevor man sie schwach formuliert. Ein weiterer Unterschied zu anderen Diskretisierungen besteht darin, dass man dieses System erster Ordnung elementweise auf allen Elementen einer Unterteilung des Rechengebietes und nicht auf dem gesamten Rechengebiet schwach formuliert. Dadurch hängen die lokalen Finite Elemente Räume jeweils nur von einem Element solch einer Unterteilung ab. Das resultierende Verfahren kann daher sehr allgemeine Gitter (zum Beispiel mit hängenden Knoten oder verschiedenartigen Elementen) sowie verschiedene lokale Funktionenräume verwenden. Eine Diskretisierung mit Local Discontinuous Galerkin Methoden eignet sich somit besonders für *hp*-adaptive und parallele Verfahren. Ein weiterer Vorteil einer Local Discontinuous Galerkin Diskretisierung besteht darin, dass die Erhaltungsgesetze schon elementweise erzwungen werden. Einziger Nachteil einer Local Discontinuous Galerkin Diskretisierung ist ein relativ hoher Rechenaufwand und Speicherbedarf im Vergleich zu anderen Diskretisierungen, da das resultierende Sattelpunktproblem durch ein geschachteltes CG Verfahren gelöst werden muss. Dieser Nachteil wird allerdings durch die Möglichkeit der einfachen Parallelisierung aufgehoben. Da die Abhängigkeit zwischen den einzelnen Elementen einer Unterteilung durch sogenannte numerische Flüsse in den Randintegralen realisiert wird, ist die Local Discontinuous Galerkin Methode eine Kombination von

Finite Elemente ([Cia78]) und Finite Volumen Methode ([KrÃ97]).

Das Discontinuous Galerkin Verfahren, also ein Verfahren, in dem unstetige LÃ¶sungen ausdrÃ¼cklich zugelassen sind, wurde zuerst 1973 von Reed und Hill in [RH73] vorgestellt. In der Folge wurden verschiedene Verfahren entwickelt, welche die Idee der unstetigen Ansatzfunktionen aufgriffen.¹ Eine Erweiterung fÃ¼r konvektionsdominante Probleme zweiter Ordnung stellt die Arbeit von Bassi und Rebang von 1997 dar ([BR97]). Die Local Discontinuous Galerkin Methode als Erweiterung fÃ¼r Konvektions-Diffusions Probleme wurde erstmals 1998 von Cockburn und Shu eingefÃ¼hrt ([CS98a], [CS98b]) und in [CKSS02] fÃ¼r die Stokes Gleichungen formuliert.

Dieses Kapitel ist wie folgt aufgebaut: Im ersten Abschnitt stellen wir zuerst die Stokes Gleichungen vor und geben die nÃ¶tigen FunktionenrÃ¤ume an, um klassische Resultate wie Existenz und Eindeutigkeit von LÃ¶sungen zu formulieren.

Im zweiten Abschnitt fÃ¼hren wir, aufbauend auf [CKSS02], die Local Discontinuous Galerkin Methode ein und leiten die Systemmatrizen der Diskretisierung her.

Im dritten Abschnitt stellen wir das Verfahren der Konjugierten Gradienten zur LÃ¶sung des Sattelpunktproblems, welches sich aus der Diskretisierung ergibt, vor und beweisen die Konvergenz einer Folge von LÃ¶sungen durch ein geschachteltes CG Verfahrens gegen die eindeutige LDG LÃ¶sung (Satz 2.3.5).

Im vierten Abschnitt stellen wir, auf den Ergebnissen der ersten Abschnitte aufbauend, eine Implementierung innerhalb des Softwareframeworks DUNE vor. Diese Implementierung besteht aus einem vollwertigen DUNE-Modul, `dune-stokes`, und einer Beispieldokumentation, welche die Benutzung dieses Moduls zeigt.

Im letzten Abschnitt stellen wir numerische Experimente vor, die wir mit Hilfe dieser Implementierung durchgefÃ¼hrt haben und zeigen, dass wir die Resultate aus [CKSS02, §4] mit DUNE reproduzieren kÃ¶nnen. Wie erwartet entspricht die experimentelle Konvergenzordnung des Drucks in L^2 der Polynomordnung der zugehÃ¶renden Finite Elemente AnsatzrÃ¤ume, wÃ¤hrend die experimentelle Konvergenzordnung der Geschwindigkeit in L^2 dieser Polynomordnung plus eins entspricht.

¹In diesem Zusammenhang sind zum Beispiel Interior Penalty Methoden ([KK00]), standard gemischte Methoden ([For93]), stabilisierte gemischte Methoden ([FHS93]) und Galerkin kleinste Quadrate Methoden ([HFB86], [HF87]) zu nennen.

2.1 Die Stokes Gleichungen

In diesem Abschnitt stellen wir die Stokes Gleichungen vor, welche die Strömung eines Fluids in einem Gebiet beschreiben. Dazu definieren wir die stationären Stokes Gleichungen und führen anschließend einige Funktionenräume ein, um klassische Aussagen zu Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen treffen zu können.

2.1.1 Die stationären Stokes Gleichungen

Die stationären Stokes Gleichungen beschreiben das Equilibrium der Strömung eines Fluids unter Berücksichtigung gegebener Kräfte und Randdaten. Die gesuchten Größen sind dabei das Geschwindigkeitsfeld u (im Folgenden kurz Geschwindigkeit genannt) eines Fluids und der Druck p , der auf ein Fluid wirkt, dessen Viskosität durch den Parameter μ gegeben ist. Die Randdaten g_D für die Geschwindigkeit und die auf das Fluid wirkenden Kräfte f , wie zum Beispiel die Gravitation, müssen gegeben sein.

Definition 2.1.1 (Stationäre Stokes Gleichungen, Klassische Lösung) [CKSS02, §1]
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (für $d = 2, 3$) ein beschränktes, polygonal berandetes, nichtleeres Gebiet und seien Dirichlet-Randwerte $g_D : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ und eine rechte Seite $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ gegeben. Dann lauten die stationären Stokes Gleichungen für die Geschwindigkeit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ und den Druck $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eines Fluids mit Viskosität $\mu \in \mathbb{R}^{>0}$

$$\begin{aligned} \nabla p - \mu \Delta u &= f && \text{in } \Omega, \\ \nabla \cdot u &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= g_D && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Ein Paar $(u, p) \in \mathcal{C}^2(\Omega)^d \times \mathcal{C}^1(\Omega)$, welches (2.1.1) für gegebenes $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)^d$ und $g_D \in \mathcal{C}^2(\partial\Omega)^d$ löst, nennen wir klassische Lösung der stationären Stokes Gleichungen.

Dabei ist der Gradient einer skalaren Funktion² $p \in \mathbb{R}$ durch den Vektor $\nabla p \in \mathbb{R}^d$ mit $(\nabla p)_i := \frac{\partial p}{\partial x_i}$ gegeben, der Laplace Operator einer vektorwertigen Funktion $u \in \mathbb{R}^d$ durch

²Wir benutzen der Einfachheit halber den Begriff einer Funktion synonym mit ihrer Auswertung.

den Vektor $\Delta u := \nabla \cdot \nabla u \in \mathbb{R}^d$ mit $(\nabla \cdot \nabla u)_i := \sum_{j=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_j^2}$ und die Divergenz einer vektorwerten Funktion $u \in \mathbb{R}^d$ durch den Skalar $\nabla \cdot u := \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 2.1.2 (Kompatibilitätsbedingung der Randwerte) [CKSS02, §1]

Zusätzlich zu (2.1.1) ist es üblich, von den Randwerten g_D die Kompatibilitätsbedingung

$$\int_{\partial\Omega} g_D \cdot n_\Omega \, ds = 0 \quad (2.1.2)$$

zu fordern, wobei $n_\Omega \in \mathbb{R}^d$ die äußere Normale an Ω ist. Nimmt man diese Bedingung nicht zu (2.1.1) hinzu, so ist der Druck p nur bis auf eine reelle Konstante eindeutig bestimmt.

Wir wollen zwei Beispiele in zwei Raumdimensionen für eine Geschwindigkeit und einen Druck angeben, welche die stationären Stokes Gleichungen (2.1.1) lösen. Der Unterschied zwischen den beiden Beispielen besteht dabei hauptsächlich darin, dass im ersten Beispiel keine Kräfte auf das Fluid wirken.

Beispiel 2.1.3 (Klassische Lösungen)

(i) [CKSS02, §4] Sei $d = 2$, $\Omega = [-1, 1]^2$ und sei die Geschwindigkeit durch

$$u(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -e^{x_1}(x_2 \cos(x_2) + \sin(x_2)) \\ e^{x_1}x_2 \sin(x_2) \end{pmatrix}$$

und der Druck durch

$$p(x_1, x_2) = 2e^{x_1} \sin(x_2)$$

gegeben. Dann sind u und p klassische Lösungen von (2.1.1) mit rechter Seite

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und den Randwerten

$$g_D(x_1, x_2) = u(x_1, x_2),$$

wobei die Randwerte die Kompatibilitätsbedingung (2.1.2) erfüllen.

(ii) [KB05, §4.1] Sei $d = 2$, $\Omega = [0, 1]^2$ und sei die Geschwindigkeit durch

$$u(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}(x_1 + x_2)\right) \\ -\cos\left(\frac{\pi}{2}(x_1 + x_2)\right) \end{pmatrix}$$

und der Druck durch

$$p(x_1, x_2) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x_1 - x_2)\right)$$

gegeben. Dann sind u und p klassische Lösungen von (2.1.1) mit rechter Seite

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}(x_1 - x_2)\right) + \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}(x_1 + x_2)\right)\right) \\ -\frac{\pi}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}(x_1 - x_2)\right) + \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}(x_1 + x_2)\right)\right) \end{pmatrix}$$

und den Randwerten

$$g_D(x_1, x_2) = u(x_1, x_2),$$

wobei die Randwerte die Kompatibilitätsbedingung (2.1.2) nicht erfüllen.

2.1.2 Funktionenräume

Da wir im Allgemeinen nicht erwarten können, dass zu gegebenen Daten f und g_D eine klassische Lösung der Stokes Gleichungen existiert, gehen wir zu einem anderen Lösungsbegriff über – der *schwachen Lösung*. Dafür benötigen wir insbesondere den Begriff der schwachen Ableitung und führen in diesem Abschnitt die dafür nötigen Begriffe und Funktionenräume ein.

Definition 2.1.4 (Lebesgue-Räume)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und Lebesgue-messbar. Dann sind die Lebesgue-Räume, definiert durch

$$L^p(\Omega) := \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \int_{\Omega} |v(x)|^p dx < \infty \right\}, \quad \text{für } 1 \leq p < \infty, \quad \text{und}$$

$$L^\infty(\Omega) := \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \inf\{M \geq 0 \mid |v(x)| \leq M \text{ fast überall in } \Omega\} < \infty \right\},$$

Banachräume mit der Norm

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \text{für } 1 \leq p < \infty, \quad \text{und}$$

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} := \inf\{M \geq 0 \mid |v(x)| \leq M \text{ fast überall in } \Omega\}.$$

Bei den Elementen der Lebesgue-Räume handelt es sich streng genommen nicht um Funktionen, sondern um Äquivalenzklassen. Dabei sind zwei Funktionen äquivalent, wenn sie sich nur auf Teilmengen mit Lebesgue-Maß 0 unterscheiden.

Bemerkung 2.1.5 (Lebesgue-Räume)

Von besonderem Interesse ist der Lebesgue-Raum $L^2(\Omega)$, welcher zusammen mit dem Skalarprodukt

$$(w, v)_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} w(x)v(x) dx$$

einen Hilbertraum bildet.

Für $1 \leq p < \infty$ ist der Dualraum von $L^p(\Omega)$ gegeben durch $L^q(\Omega)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, der Dualraum von $L^\infty(\Omega)$ ist $L^1(\Omega)$. Es gilt $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ falls $p \leq q$ und Ω endliches Lebesgue-Maß hat.

Um mit Hilfe der Lebesgue-Räume Funktionenräume konstruieren zu können, in denen wir nach Lösungen der Stokes Gleichungen suchen, müssen wir zuerst eine geeignete Verallgemeinerung des Begriffs der Differenzierbarkeit einer Funktion einführen.

Definition 2.1.6 (Ableitung im Distributionen Sinne)

Sei $\mathcal{D}(\Omega) := \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger und $\mathcal{D}'(\Omega)$ der Raum der linearen Funktionale auf $\mathcal{D}(\Omega)$, die stetig bezüglich der Konvergenz in $\mathcal{D}(\Omega)$ sind.³ Sei außerdem die α -te Ableitung einer Funktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ durch

$$D^\alpha \varphi := \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d}},$$

für alle Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^{d \geq 0}$ mit $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$, gegeben. Die Elemente von $\mathcal{D}'(\Omega)$ heißen Distributionen.

Sei L eine solche Distribution, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $\langle L, \varphi \rangle$ ihre duale Paarung. Dann ist die α -te Ableitung im Distributionen Sinne, oder α -te distributionelle Ableitung, von L durch

$$\langle D^\alpha L, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle L, D^\alpha \varphi \rangle$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gegeben.

³Konvergenz in $\mathcal{D}(\Omega)$ ist durch die uniforme Konvergenz aller Ableitungen einer Funktion auf einer abgeschlossenen und beschränkten Teilmenge von Ω gegeben.

Bemerkung 2.1.7 (Ableitung im Distributionen Sinne, schwache Ableitung)

Die distributionelle Ableitung $D^\alpha L$ ist wiederum eine Distribution und beliebig oft im obigen Sinne differenzierbar. Für eine glatte Funktion fällt der Begriff der distributionellen Ableitung mit dem der Ableitung im üblichen Sinne zusammen.

Jede Funktion $v \in L^p(\Omega)$ kann mit der Distribution

$$v \mapsto \int_{\Omega} v(x) \varphi(x) dx$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ assoziiert werden. Falls zu einer Distribution L eine Funktion $g_\alpha \in L^p(\Omega)$ existiert, so dass

$$\langle D^\alpha L, \varphi \rangle = \int_{\Omega} g_\alpha(x) \varphi(x) dx$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt, so heißt g_α schwache Ableitung der Ordnung α von L . In diesem Sinne lassen sich auch die Begriffe des Gradienten und der Divergenz verallgemeinern.

Mit dem Begriff der distributionellen Ableitung und mit den Lebesgue-Räumen können wir nun die Funktionenräume definieren, in denen wir nach Lösungen der Stokes Gleichungen suchen können.

Definition 2.1.8 (Sobolevräume)

Sei $k \in \mathbb{N}^{>0}$ und $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist der Sobolevraum $W^{k,p}(\Omega)$ definiert als der Raum der Funktionen aus $L^p(\Omega)$, deren distributionellen Ableitungen bis zur Ordnung k Funktionen in $L^p(\Omega)$ sind, also

$$W^{k,p}(\Omega) := \left\{ v \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha v \in L^p(\Omega) \text{ für alle Multiindizes } |\alpha| \leq k \right\}.$$

Der Sobolevraum $W^{k,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum mit Norm

$$\|v\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad \text{für } 1 \leq p < \infty, \quad \text{und}$$

$$\|v\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \max_{\alpha \leq k} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}$$

und Halbnorm

$$|v|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad \text{für } 1 \leq p < \infty, \quad \text{und}$$

$$|v|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \max_{\alpha=k} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Bemerkung 2.1.9 (Sobolevräume)

Der Sobolevraum $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(w, v)_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha w, D^\alpha v)_{L^p(\Omega)}.$$

Der Raum $W_0^{k,p}(\Omega)$ ist definiert als der Abschluss von \mathcal{C}_0^∞ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{W_0^{k,p}}(\Omega)$. Es gilt, dass $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ dicht in $W^{k,p}(\Omega)$ liegt, wenn Ω lipschitzstetigen Rand hat.

Von Bedeutung sind außerdem die Sobolevräume $H^s(\Omega)$ und $H^s(\partial\Omega)$ für $s \in \mathbb{R}^{>0}$, die mit Hilfe der Fouriertransformtion definiert werden können.⁴ Für $s = \frac{1}{2}$ liefert der folgende Satz eine intuitive Charakterisierung von $H^{1/2}(\partial\Omega)$ als dem Raum der Funktionen, die als Randwerte Funktionen in $H^1(\Omega)$ zugeordnet werden können.

Satz 2.1.10 (Spur Theorem)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit lipschitzstetigem Rand $\partial\Omega$ und sei $s > \frac{1}{2}$. Dann gilt:

(i) Es existiert eine lineare stetige Abbildung

$$\gamma_0 : H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-1/2}(\partial\Omega)$$

derart, dass $\gamma_0 v = v|_{\partial\Omega}$ für alle $v \in H^s(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ gilt.

(ii) Es existiert eine lineare stetige Abbildung

$$\mathcal{R}_0 : H^{s-1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^s(\Omega)$$

derart, dass $\gamma_0 \mathcal{R}_0 \varphi = \varphi$ für alle $\varphi \in H^{s-1/2}(\partial\Omega)$ gilt.

Wir können also bei Funktionen, die in einem Sobolevraum $H^s(\Omega)$, für $s > \frac{1}{2}$, liegen, auf wohldefinierte Weise von Randwerten sprechen, obwohl es sich bei dem Rand von Ω um eine Menge von Lebesgue-Maß 0 handelt.

2.1.3 Die schwache Formulierung der Stokes Gleichungen

Mit dem Begriff der schwachen Ableitung aus dem vorangegangenen Abschnitt führen wir in diesem Abschnitt den Begriff der schwachen Lösung ein. Die Existenz solcher

⁴Siehe dazu, und für weitere Details zu Funktionenräumen, [Eva98] und [QV94].

schwachen Lösungen und sogar deren Eindeutigkeit können wir, im Gegensatz zu klassischen Lösungen, beweisen (siehe Satz 2.1.13). Die schwache Formulierung der Stokes Gleichungen geht, so, wie wir sie in diesem Abschnitt einführen, nicht direkt in die Formulierung der Local Discontinuous Galerkin Methode ein. Dennoch handelt es sich bei dem Begriff der schwachen Lösung um ein wichtiges Hilfsmittel zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen und um eine Grundlage der meisten numerischen Lösungsmethoden, wie zum Beispiel der Finite Elemente und der Finite Volumen Methode.

Als Funktionenräume für die schwache Lösung der Stokes Gleichungen betrachten wir

$$\tilde{V} := \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma_0 v = g_D \text{ auf } \partial\Omega\} \quad \text{und} \quad (2.1.3a)$$

$$\tilde{Q} := \{q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q(x) dx = 0\}. \quad (2.1.3b)$$

Definition 2.1.11 (Schwache Formulierung, Schwache Lösung)

Seien \tilde{V} und \tilde{Q} durch (2.1.3) gegeben, sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit lokal lipschitzstetigem Rand und seien $f \in L^2(\Omega)^d$ und $g_D \in H^{1/2}(\partial\Omega)^d$ gegeben. Dann heißt das Paar $(u, p) \in \tilde{V} \times \tilde{Q}$ schwache Lösung der Stokes Gleichungen (2.1.1) genau dann, wenn

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} p v \cdot n_{\Omega} ds - \int_{\Omega} p \nabla \cdot v dx \\ & - \mu \int_{\partial\Omega} v \cdot \nabla u \cdot n_{\Omega} ds + \mu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx, \\ & \int_{\Omega} \nabla \cdot u q = 0 \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

für alle $(v, q) \in \tilde{V} \times \tilde{Q}$ gilt.⁵

Bemerkung 2.1.12

- (i) Klassische Lösungen sind insbesondere schwache Lösungen.
- (ii) Ist das Paar (u, p) eine schwache Lösung von (2.1.1) und gilt zusätzlich $(u, p) \in C^2(\Omega)^d \times C^1(\Omega)$, so ist (u, p) auch eine klassische Lösung von (2.1.1).

Beweis:

- (i) Diese Aussage erhalten wir nach Multiplikation der ersten Gleichung von (2.1.1) mit einer Testfunktion $v \in \tilde{V}$ und der zweiten Gleichung von (2.1.1) mit einer

⁵Siehe Motivation 2.2.3 für eine Definition des inneren Produktes $\nabla u : \nabla v$.

Testfunktion $q \in \tilde{Q}$, durch Integration über Ω und anschließender partieller Integration.

- (ii) Da $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)^d$ und $p \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ können wir die Gleichungen (2.1.4) partiell integrieren und erhalten

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot v \, dx - \mu \int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx,$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot u \, q = 0$$

für alle $(v, q) \in \tilde{V} \times \tilde{Q}$. Nach dem Hauptsatz der Variationsrechnung gilt damit

$$\begin{aligned} \nabla p - \mu \Delta u &= f && \text{fast überall in } \Omega, \\ \nabla \cdot u &= 0 && \text{fast überall in } \Omega \end{aligned}$$

und

$$u = g_D \quad \text{fast überall auf } \partial\Omega,$$

da $u \in \tilde{V}$. □

Mit dem Begriff der schwachen Lösung verfügen wir nun über einen Lösungsbegriff, der es uns erlaubt, die Existenz von Lösungen zu zeigen. Dabei stellt er eine Erweiterung des klassischen Lösungsbegriffs dar, indem er die Menge möglicher Lösungen um die der schwach differenzierbaren erweitert, wobei er weiterhin mit dem der klassischen Lösung übereinstimmt, wenn die gegebenen Daten dies zulassen. Die Erweiterung geht allerdings nicht so weit, dass die Eindeutigkeit einer Lösung verloren geht, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 2.1.13 (Existenz und Eindeutigkeit der schwachen Lösung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit lokal lipschitzstetigem Rand und seien $f \in L^2(\Omega)^d$ und $g_D \in H^{1/2}(\partial\Omega)^d$. Dann existiert eine eindeutige schwache Lösung $(u, p) \in \tilde{V} \times \tilde{Q}$ der stationären Stokes Gleichungen (2.1.1).

Beweis: Siehe [Tem77, Theorem I.2.2.1] und [Tem77, Lemma I.2.2.1]. □

Aufbauend auf der schwachen Formulierung der Stokes Gleichungen (2.1.4) sind verschiedene Diskretisierungen entwickelt worden, die darauf beruhen, diskrete Teilmengen $V_h \times Q_h \subset \tilde{V} \times \tilde{Q}$ in Abhängigkeit einer Zerlegung des Gebietes Ω zu betrachten und mit Hilfe der endlichen Basen dieser Teilmengen ein Gleichungssystem für eine approximative Lösung $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ aufzustellen und zu lösen. Für eine Folge von feiner werdenden Zerlegungen erhält man so eine Folge von Lösungen, die gegen die eindeutige schwache Lösung konvergieren. Verfahren dieser Form sind als Verfahren basierend auf der Finite Elemente Methode bekannt (siehe dazu [Cia78]).⁶

Einen ähnlichen Ansatz verfolgt die Local Discontinuous Galerkin Methode, die wir im folgenden Abschnitt vorstellen.

2.2 Die Local Discontinuous Galerkin Methode

In diesem Abschnitt stellen wir eine Diskretisierung der stationären Stokes Gleichungen mit Hilfe der Local Discontinuous Galerkin Methode vor. Dazu leiten wir, aufbauend auf [CKSS02], eine diskrete Variationsformulierung für die Stokes Gleichungen her und zitieren bekannte Resultate zu Existenz und Eindeutigkeit einer diskreten Lösung dieser Variationsformulierung. Diese Variationsformulierung formen wir anschließend in ein lineares Gleichungssystem für die Freiheitsgrade der gesuchten Funktionen um.

2.2.1 Die diskrete Variationsformulierung

Wie die Finite Elemente Methode basiert auch die Local Discontinuous Galerkin Methode auf einer Zerlegung des Gebietes Ω . Diese Zerlegung kann jedoch wesentlich unregelmäßiger ausfallen als dies für eine standard Finite Elemente Methode nötig ist. Auch wenn wir in dieser Arbeit der Einfachheit halber eine konforme Triangulierung als Zerlegung des Gebietes einführen, kann man problemlos nichtkonforme Zerlegungen, zum Beispiel solche mit hängenden Knoten, verwenden. So verwendet zum Beispiel die in Abschnitt 2.4 vorgestellte Implementierung nicht die Annahme, dass es sich bei der grundlegenden Triangulierung um eine konforme handelt. Ein weiterer Unterschied

⁶Im Zusammenhang mit den Stokes Gleichungen sind dabei Gemischte Finite Elemente Methoden zu nennen, siehe [BF91].

zur Finite Elemente Methode besteht darin, dass die Stokes Gleichungen nicht auf Ω , sondern auf den Elementen der Triangulierung schwach formuliert werden. Dementsprechend hängen auch die Funktionenräume, in denen nach einer Lösung gesucht wird, von den Elementen der Triangulierung ab. Eine Abhängigkeit zwischen den Elementen wird bei der Local Discontinuous Galerkin Methode durch die Verwendung von numerischen Flussfunktionen hergestellt. Die Local Discontinuous Galerkin Methode ist damit eine Kombination aus der Finite Elemente und der Finite Volumen Methode [KrÄ97].

Definition 2.2.1 (Triangulierung)

Sei P_k , für $k \in \mathbb{N}^{>0}$, die Menge der konvexen, polygonal berandeten Teilmengen des \mathbb{R}^d mit maximal k Ecken und positivem d -dimensionalem Hausdorff-Maß (welches wir mit \mathcal{H}^d bezeichnen). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und polygonal berandet und $T_\Omega \subset \mathbb{N}$ eine Indexmenge. Dann heißt

$$\mathcal{T}_h := \{T_t \in P_k \mid t \in T_\Omega\}$$

konforme unstrukturierte Triangulierung von Ω , falls gilt:

$$(i) \quad \Omega = \bigcup_{t \in T_\Omega} \overline{T_t}$$

$$(ii) \quad \overset{\circ}{T_t} \cap \overset{\circ}{T_s} = \emptyset \text{ für alle } t \neq s \in T_\Omega$$

$$(iii) \quad \text{Es gilt entweder } \overline{T_t} \cap \overline{T_s} = \emptyset, \mathcal{H}^{d-1}(\overline{T_t} \cap \overline{T_s}) = 0 \text{ oder } \mathcal{H}^{d-1}(\overline{T_t} \cap \overline{T_s}) > 0 \text{ für } t \neq s \in T_\Omega.$$

Wir nennen $T_t \in \mathcal{T}_h$ Element der Triangulierung und definieren die lokale Gitterweite $h_t := \text{diam}(T_t)$ und die globale Gitterweite $h := \max_{t \in T_\Omega} h_t$. Gilt $\mathcal{H}^{d-1}(\overline{T_t} \cap \overline{T_s}) > 0$ für $t \neq s \in T_\Omega$, so nennen wir T_t und T_s benachbart und definieren die Fläche zwischen ihnen durch

$$\varepsilon_s^t := \overline{T_t} \cap \overline{T_s}.$$

Wir definieren die Menge der Nachbarn eines Elementes durch

$$\mathcal{N}(t) := \{T_s \in \mathcal{T}_h \mid \mathcal{H}^{d-1}(\overline{T_t} \cap \overline{T_s}) > 0, \quad t \neq s\},$$

die Menge der inneren Kanten eines Elementes durch

$$\mathcal{E}_I(t) := \{\varepsilon_s^t = \overline{T_t} \cap \overline{T_s} \mid s \in \mathcal{N}(t)\},$$

die Menge der Randkanten eines Elementes als die Menge der Kanten des Elementes, die auf dem Rand des Gebietes Ω liegen,

$$\mathcal{E}_D(t) := \{\varepsilon_d^t := \overline{T_t} \cap \partial\Omega \mid \mathcal{H}^{d-1}(\varepsilon_d^t) > 0\},$$

und die Menge der Kanten eines Elementes durch

$$\mathcal{E}(t) := \mathcal{E}_I(t) \cup \mathcal{E}_D(t).$$

Außerdem definieren wir die Menge der inneren Kanten der Triangulierung durch

$$\mathcal{E}_I(\Omega) := \bigcup_{t \in T_\Omega} \mathcal{E}_I(t)$$

und die Menge der Randkanten der Triangulierung durch

$$\mathcal{E}_D(\Omega) := \bigcup_{t \in T_\Omega} \mathcal{E}_D(t).$$

Wir bezeichnen mit n_+^t die äußere Normale eines Elementes T_t und mit n_-^t seine innere Normale (jeweils in Abhängigkeit von einem Punkt auf dem Rand von T_t). Zu einer inneren Kante ε_s^t bezeichnen wir die äußere Normale auf ε_s^t bezüglich T_t mit n_s^t und zu einer Randkante ε_d^t bezeichnen wir die äußere Normale auf ε_d^t bezüglich T_t mit n_d^t (siehe auch Abbildung 2.1).

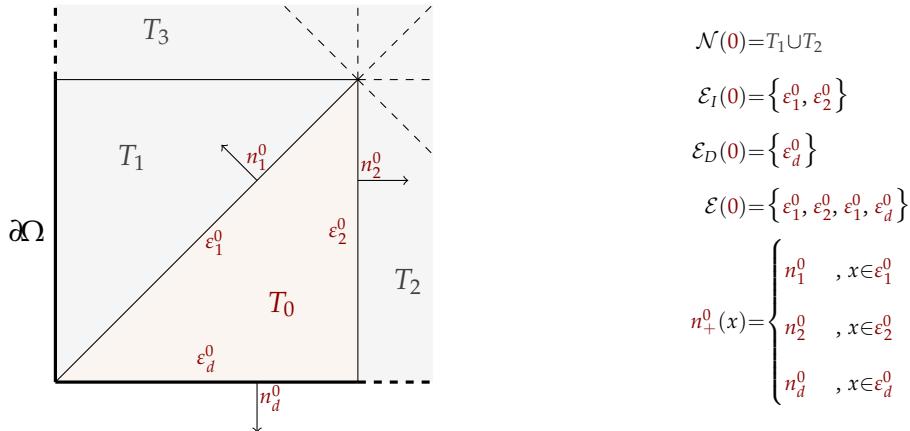


Abbildung 2.1: Ausschnitt aus einer Triangulierung eines rechteckigen Gebietes

Bevor wir auf allen Elementen der Triangulierung eine schwache Formulierung der stationären Stokes Gleichungen (2.1.1) herleiten können, müssen wir diese zuerst als System von Gleichungen erster Ordnung schreiben, damit in den Randintegralen der schwachen Formulierung keine Ableitungen der gesuchten Funktionen mehr vorkommen. Dabei ist der Gradient einer vektorwertigen Funktion $v \in \mathbb{R}^d$ als die Matrix $\nabla v \in \mathbb{R}^{d \times d}$ definiert, deren Einträge durch $(\nabla v)_{i,j} := \partial_j v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ gegeben sind.

Korollar 2.2.2 (Die stationären Stokes Gleichungen als ein System erster Ordnung)
Sei, mit der Notation aus Definition 2.1.1, $\sigma : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^{d \times d}$ definiert als der Gradient der Geschwindigkeit, $\sigma := \nabla u$. Dann lassen sich die stationären Stokes Gleichungen (2.1.1) als System von Gleichungen erster Ordnung,

$$\sigma = \nabla u \quad \text{in } \Omega, \tag{2.2.1a}$$

$$\nabla p - \mu \nabla \cdot \sigma = f \quad \text{in } \Omega, \tag{2.2.1b}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{2.2.1c}$$

$$u = g_D \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{2.2.1d}$$

schreiben.

Motivation 2.2.3 (Die Local Discontinuous Galerkin Methode)

Wie im Beweis zu Bemerkung 2.1.12 gehen wir zur Herleitung einer schwachen Formulierung davon aus, dass die Funktionen σ , u und p hinreichend glatt sind, und multiplizieren die Gleichungen (2.2.1) mit beliebigen Testfunktionen τ , v und q aus noch näher zu bestimmenden Funktionenräumen. Anschließend integrieren wir über ein Element T_t einer Triangulierung T_h und wenden partielle Integration an. Mit dem Matrixprodukt $\sigma : \tau := \sum_{i,j=1}^d \sigma_{i,j} \tau_{i,j} \in \mathbb{R}$ für zwei Matrizen $\sigma, \tau \in \mathbb{R}^{d \times d}$ erhalten wir so aus (2.2.1)

$$\int_{T_t} \sigma : \tau \, dx = - \int_{T_t} u \cdot \nabla \cdot \tau \, dx + \int_{\partial T_t} u \cdot \tau \cdot n_+^t \, ds, \tag{2.2.2a}$$

$$\begin{aligned} \mu \int_{T_t} \sigma : \nabla v \, dx - \mu \int_{\partial T_t} v \cdot \sigma \cdot n_+^t \, ds - \int_{T_t} p \nabla \cdot v \, dx + \int_{\partial T_t} p v \cdot n_+^t \, ds \\ = \int_{T_t} f \cdot v \, dx, \end{aligned} \tag{2.2.2b}$$

$$- \int_{T_t} u \nabla q \, dx + \int_{\partial T_t} q u \cdot n_+^t \, ds = 0. \tag{2.2.2c}$$

Wir haben somit eine wohldefinierte schwache Formulierung der Stokes Gleichungen erster Ordnung (2.2.1) erhalten, indem wir obige Gleichheit für alle Elemente $T_t \in \mathcal{T}_h$ einer Triangulierung und für alle Testfunktionen $(\tau, v, q) \in \Sigma \times V \times Q$ fordern. Die Funktionenräume Σ, V, Q sind dabei für eine gegebene Triangulierung \mathcal{T}_h durch

$$\begin{aligned}\Sigma &:= \left\{ \sigma \in L^2(\Omega)^{d \times d} \mid \sigma|_{T_t} \in H^1(T_t)^{d \times d}, \quad \forall T_t \in \mathcal{T}_h \right\}, \\ V &:= \left\{ v \in L^2(\Omega)^d \mid v|_{T_t} \in H^1(T_t)^d, \quad \forall T_t \in \mathcal{T}_h \right\} \text{ und} \\ Q &:= \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q(x) dx = 0, \quad q|_{T_t} \in H^1(T_t), \quad \forall T_t \in \mathcal{T}_h \right\}\end{aligned}$$

definiert. Das Ziel einer LDG Diskretisierung ist nun, die schwache Lösung $(\sigma, u, p) \in \Sigma \times V \times Q$ von (2.2.2) durch Funktionen (σ_h, u_h, p_h) in den Finite Element Räumen $\Sigma_h \times V_h \times Q_h \subset \Sigma \times V \times Q$ zu approximieren, die durch

$$\Sigma_h := \left\{ \sigma \in L^2(\Omega)^{d \times d} \mid \sigma|_{T_t} \in \Sigma_t^{d \times d}, \quad \forall T_t \in \mathcal{T}_h \right\}, \quad (2.2.4a)$$

$$V_h := \left\{ v \in L^2(\Omega)^d \mid v|_{T_t} \in V_t^d, \quad \forall T_t \in \mathcal{T}_h \right\} \text{ und} \quad (2.2.4b)$$

$$Q_h := \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q(x) dx = 0, \quad q|_{T_t} \in Q_t, \quad \forall T_t \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (2.2.4c)$$

gegeben sind. Hier haben wir den Sobolevraum $H^1(T_t)$ durch die lokalen Finite Elemente Räume $\Sigma_t = \Sigma_t(T_t)$, $V_t = V_t(T_t)$ und $Q_t = Q_t(T_t)$ ersetzt. Diese lokalen Finite Elemente Räume bestehen typischerweise aus polynomialem Funktionen auf dem Element T_t . Mit diesen Funktionenräumen lautet die schwache Formulierung für die approximative Lösung $(\sigma_h, u_h, p_h) \in \Sigma_h \times V_h \times Q_h$

$$\int_{T_t} \sigma_h : \tau^t dx = - \int_{T_t} u_h \cdot \nabla \cdot \tau^t dx + \int_{\partial T_t} \hat{u}_{\sigma} \cdot \tau^t \cdot n_+^t ds, \quad (2.2.5a)$$

$$\begin{aligned}\mu \int_{T_t} \sigma_h : \nabla v^t dx - \mu \int_{\partial T_t} v^t \cdot \hat{\sigma} \cdot n_+^t ds - \int_{T_t} p_h \nabla \cdot v^t dx + \int_{\partial T_t} \hat{p} v^t \cdot n_+^t ds \\ = \int_{T_t} f \cdot v^t dx,\end{aligned} \quad (2.2.5b)$$

$$- \int_{T_t} u_h \nabla q^t dx + \int_{\partial T_t} q^t \hat{u}_p \cdot n_+^t ds = 0, \quad (2.2.5c)$$

für alle Testfunktionen $(\tau^t, v^t, q^t) \in \Sigma_t^{d \times d} \times V_t^d \times Q_t$ auf allen Elementen $T_t \in \mathcal{T}_h$.

Im Gegensatz zur schwachen Formulierung (2.2.2) stammen die Testfunktionen in (2.2.5) aus den lokalen Finite Elementen Räumen und nicht aus Σ_h , V_h und Q_h . Außerdem haben wir in den Randintegralen in (2.2.5) die Auswertungen von σ_h , u_h und q_h durch sogenannte numerische Flussfunktionen $\hat{\sigma}$, \hat{u}_σ , \hat{u}_p und \hat{p} ersetzt. Diese stellen die Abhängigkeit zwischen den Gleichungen auf den einzelnen Elementen der Triangulierung her und bestehen üblicherweise aus einer Kombination der Funktionswerte auf den beiden benachbarten Elementen einer Kante.

Mit (2.2.5) haben wir im Prinzip die schwache Formulierung einer LDG Lösung der Stokes Gleichungen zur Hand. Um diese rigoros formulieren zu können, müssen wir zuerst präzisieren, was wir unter einem numerischen Fluss verstehen und welche Eigenschaften numerische Flussfunktionen erfüllen müssen, damit wir die Existenz einer eindeutigen LDG Lösung des Stokes Systems erwarten können.⁷

Definition 2.2.4 (Konsistente numerischer Flüsse)

Seien auf allen Kanten einer Triangulierung T_h numerische Flussfunktionen

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} : \Sigma_h \times V_h &\rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}, \\ \hat{u}_\sigma : V_h \times V_h &\rightarrow \mathbb{R}^d, \\ \hat{u}_p : V_h \times Q_h &\rightarrow \mathbb{R}^d \quad \text{und} \\ \hat{p} : Q_h &\rightarrow \mathbb{R}\end{aligned}$$

gegeben, dann heißen $\hat{\sigma}$, \hat{u}_σ , \hat{u}_p und \hat{p} genau dann konsistent mit den Stokes Gleichungen erster Ordnung (2.2.1), wenn – angewandt auf eine exakte Lösung ($\sigma = \nabla u$, u , p) – ihre Auswertung auf allen Kanten der Triangulierung mit der Auswertung der exakten Lösung (σ, u, p) übereinstimmt, also $\hat{\sigma}$ mit σ , \hat{u}_σ und \hat{u}_p mit u und \hat{p} mit p .

⁷Dabei handelt es sich bei den numerischen Flussfunktionen streng genommen um lineare Funktionale, die auf Funktionen in Σ_h , V_h und Q_h angewandt werden. Wir verwenden den Begriff des numerischen Flusses jedoch der Einfachheit halber synonym mit der Funktion, die man durch Anwendung des Funktionals erhält. In diesem Sinne sind Aussagen wie „ $\hat{\sigma} : \Sigma_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d_u}$ “ in Definition 2.2.4 zu verstehen.

Bemerkung 2.2.5 (Konsistente numerische Flüsse)

Für konsistente numerische Flüsse $\hat{\sigma}$, \hat{u}_σ , \hat{u}_p gilt für alle Funktionen $(\sigma, u, p) \in \mathcal{C}^0(\Omega)^{d \times d} \times \mathcal{C}^0(\Omega)^d \times \mathcal{C}^0(\Omega)$, die auf ganz Ω stetig sind,

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(\sigma, u) &= \sigma, \\ \hat{u}_\sigma(u) &= u, \\ \hat{u}_\sigma(u, p) &= u \quad \text{und} \\ \hat{p}(p) &= p\end{aligned}$$

auf allen inneren Kanten der Triangulierung und

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(\sigma, u) &= \sigma, \\ \hat{u}_\sigma(u) &= g_D, \\ \hat{u}_\sigma(u, p) &= g_D \quad \text{und} \\ \hat{p}(p) &= p\end{aligned}$$

auf allen Randkanten der Triangulierung.

Um konsistente numerische Flüsse angeben zu können, führen wir zuerst den Begriff der lokalen Funktion und ihrer Sprünge und Mittelwerte auf einer Kante ein.

Definition 2.2.6 (Lokale Funktion, Mittelwert, Sprung)

Für eine Funktion $\varphi_h : \Omega \mapsto \mathbb{V}$, die im Inneren eines jeden Elementes T_t einer Triangulierung \mathcal{T}_h stetig ist, jedoch nicht notwendigerweise über die Kanten der Triangulierung hinweg, definieren wir für alle $T_t \in \mathcal{T}_h$ die lokalen Funktionen $\varphi_h^t : T_t \mapsto \mathbb{V}$ durch

$$\varphi_h^t(x) := \begin{cases} \varphi_h(x), & \forall x \in \overset{\circ}{T}_t, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi_h(x - \delta n_+^t), & \forall x \in \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{E}(t). \end{cases}$$

Dabei steht \mathbb{V} für \mathbb{R} , \mathbb{R}^d oder $\mathbb{R}^{d \times d}$. Mit dem Begriff der lokalen Funktion definieren wir die Mittelwerte von $(\sigma_h, u_h, p_h) \in (\Sigma_h, V_h, Q_h)$ auf einer inneren Kante $\varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(\Omega)$ durch

$$\begin{aligned}\{\!\!\{\sigma_h\}\!\!\}_s^t &:= \frac{1}{2} (\sigma_h^t + \sigma_h^s) & \in \mathbb{R}^{d \times d} & \text{für eine matrixwertige Funktion } \sigma \in \Sigma_h, \\ \{\!\!\{u_h\}\!\!\}_s^t &:= \frac{1}{2} (u_h^t + u_h^s) & \in \mathbb{R}^d & \text{für eine vektorwertige Funktion } u_h \in V_h \text{ und} \\ \{\!\!\{p_h\}\!\!\}_s^t &:= \frac{1}{2} (p_h^t + p_h^s) & \in \mathbb{R} & \text{für eine skalare Funktion } p_h \in Q_h\end{aligned}$$

und ihre Sprünge über eine innere Kante $\varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(\Omega)$ durch

$$\begin{aligned} \llbracket \sigma_h \rrbracket_s^t &:= \sigma_h^t \cdot n_s^t + \sigma_h^s \cdot n_t^s \\ &= (\sigma_h^t - \sigma_h^s) \cdot n_s^t && \in \mathbb{R}^d \quad \text{für eine matrixwertige Funktion } \sigma_h \in \Sigma_h, \\ \llbracket u_h \rrbracket_s^t &:= u_h^t \cdot n_s^t + u_h^s \cdot n_t^s \\ &= (u_h^t - u_h^s) \cdot n_s^t && \in \mathbb{R} \quad \text{für eine vektorwertige Funktion } u_h \in V_h, \\ \underline{\llbracket u_h \rrbracket}_s^t &:= u_h^t \otimes n_s^t + u_h^s \otimes n_t^s \\ &= (u_h^t - u_h^s) \otimes n_s^t && \in \mathbb{R}^{d \times d} \quad \text{für eine vektorwertige Funktion } u_h \in V_h \text{ und} \\ \llbracket p_h \rrbracket_s^t &:= p_h^t n_s^t + p_h^s n_t^s \\ &= (p_h^t - p_h^s) n_s^t && \in \mathbb{R}^d \quad \text{für eine skalare Funktion } p_h \in Q_h. \end{aligned}$$

Dabei ist das Produkt $u \otimes n \in \mathbb{R}^{d \times d}$ durch $(v \otimes n)_{i,j} := v_i n_j$ gegeben.

Als Beispiel für numerische Flüsse, die konsistent im Sinne von Definition 2.2.4 sind, geben wir die numerischen Flüsse an, die wir auch bei der in Abschnitt 2.4 vorgestellten Implementierung und den numerischen Tests in Abschnitt 2.5 verwenden.

Beispiel 2.2.7 (Konsistente numerische Flüsse) [CKSS02, §2.1]

Seien $C_{11}, D_{11} \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ und $C_{12}, D_{12} \in \mathbb{R}^{\geq 0^d}$ gegeben. Dann sind die numerischen Flüsse $\hat{\sigma}$, \hat{u}_σ , \hat{u}_p und \hat{p} , gegeben durch

$$\hat{\sigma} : \Sigma_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d},$$

$$\hat{\sigma}(\sigma_h, u_h) := \begin{cases} \{\!\!\{\sigma_h\}\!\!\}_s^t - C_{11} \llbracket u_h \rrbracket_s^t - \llbracket \sigma_h \rrbracket_s^t \otimes C_{12} & \text{auf einer inneren Kante } \varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t), \\ \sigma_h^t - C_{11} (u_h^t - g_D) \otimes n_d^t & \text{auf einer Randkante } \varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t), \end{cases}$$

$$\hat{u}_\sigma : V_h \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

$$\hat{u}_\sigma(u_h) := \begin{cases} \{\!\!\{u_h\}\!\!\}_s^t + \llbracket u_h \rrbracket_s^t \cdot C_{12} & \text{auf einer inneren Kante } \varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t), \\ g_D & \text{auf einer Randkante } \varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t), \end{cases}$$

$$\hat{u}_p : V_h \times Q_h \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

$$\hat{u}_p(u_h, p_h) := \begin{cases} \{\!\!\{u_h\}\!\!\}_s^t + D_{11} \llbracket p_h \rrbracket_s^t + \llbracket u_h \rrbracket_s^t D_{12} & \text{auf einer inneren Kante } \varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t), \\ g_D & \text{auf einer Randkante } \varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t) \end{cases}$$

und $\hat{p} : Q_h \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\hat{p}(p_h) := \begin{cases} \{\{p_h\}\}_s^t - D_{12} \cdot [\![p_h]\!]_s^t & \text{auf einer inneren Kante } \varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t), \\ p_h^t & \text{auf einer Randkante } \varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t), \end{cases}$$

konsistent mit den Stokes Gleichungen erster Ordnung im Sinne von Definition 2.2.4.

Damit können wir endlich den Begriff der LDG Lösung einführen, wobei wir nochmals darauf hinweisen, dass die Verwendung einer konformen Triangulierung in der Praxis keine Einschränkung darstellt, da das resultierende Verfahren auch für allgemeinere Zerlegungen von Ω funktioniert.

Definition 2.2.8 (LDG Lösung der Stokes Gleichungen)

Sei, mit der Notation und den Voraussetzungen aus Korollar 2.2.2, T_h eine konforme, unstrukturierte Triangulierung von Ω und seien die LDG Funktionenräume Σ_h , V_h und Q_h durch (2.2.4) gegeben. Seien außerdem konsistente numerische Flüsse $\hat{\sigma}$, \hat{u}_σ , \hat{u}_p und \hat{p} gegeben und es gelte $f \in L^2(\Omega)^d$. Dann heißt das Tripel $(\sigma_h, u_h, p_h) \in \Sigma_h \times V_h \times Q_h$ LDG Lösung der Stokes Gleichungen erster Ordnung genau dann, wenn für alle $T_t \in \mathcal{T}_h$

$$\int_{T_t} \sigma_h : \tau^t \, dx = \int_{\partial T_t} \hat{u}_\sigma(u_h) \cdot \tau^t \cdot n_+^t \, ds - \int_{T_t} u_h \cdot (\nabla \cdot \tau^t) \, dx, \quad (2.2.6a)$$

$$\begin{aligned} \mu \int_{T_t} \sigma_h : \nabla v^t \, dx - \mu \int_{\partial T_t} v^t \cdot \hat{\sigma}(\sigma_h, u_h) \cdot n_+^t \, ds - \int_{T_t} p_h (\nabla \cdot v^t) \, dx \\ + \int_{\partial T_t} \hat{p}(p_h) v^t \cdot n_+^t \, ds = \int_{T_t} f \cdot v^t \, dx, \end{aligned} \quad (2.2.6b)$$

$$\int_{\partial T_t} q^t \hat{u}_p(u_h, p_h) \cdot n_+^t \, ds - \int_{T_t} u_h \cdot \nabla q^t \, dx = 0, \quad (2.2.6c)$$

für alle Testfunktionen $(\tau^t, v^t, q^t) \in \Sigma_t^{d \times d} \times V_t^d \times Q_t$, gilt.

Genau wie für die schwache Lösung des Stokes Systems im vorangegangenen Abschnitt können wir auch für die LDG Lösung Existenz und Eindeutigkeit zeigen.

Satz 2.2.9 (Existenz und Eindeutigkeit der LDG Lösung)

Mit der Notation und den Voraussetzungen aus Definition 2.2.8 existiert eine eindeutige LDG Lösung $(\sigma_h, u_h, p_h) \in \Sigma_h \times V_h \times Q_h$, falls die lokalen Funktionenräume folgende Bedingung für alle $u_h^t \in V_t^d$ und $p_h^t \in Q_t$ erfüllen:

$$\begin{aligned} \left(\int_{T_t} \nabla u_h^t : \tau^t \, dx = 0 \quad \forall \tau^t \in \Sigma_t^{d \times d} \right) &\Rightarrow \left(\nabla u_h^t \equiv 0 \text{ auf } T_t \right) \\ \left(\int_{T_t} v^t \cdot \nabla p_h^t \, dx = 0 \quad \forall v^t \in V_t^d \right) &\Rightarrow \left(\nabla p_h^t \equiv 0 \text{ auf } T_t \right) \end{aligned}$$

Beweis: Siehe [CKSS02, Proposition 2.1]. □

Bemerkung 2.2.10 (A-priori Abschätzung) [CKSS02, Theorem 2.2, Theorem 2.3]

Für eine Lösung $(\sigma, u, p) \in H^{r+1}(\Omega)^{d \times d} \times H^{s+1}(\Omega)^d \times H^{t+1}(\Omega)$ von (2.2.1) mit $r, t \geq 0 \in \mathbb{N}$ und $s \geq 1 \in \mathbb{N}$ und die eindeutige LDG Lösung $(\sigma_h, u_h, p_h) \in \Sigma_h \times V_h \times Q_h$ und lokalen Finite Elemente Räumen Σ_t , V_t und Q_t mit Polynomordnung größer oder gleich r, s und t kann eine Abschätzung der Form

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)^d} &\leq C (h^r + h^s + h^t), \\ \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq C (h^r + h^s + h^t) \end{aligned}$$

bewiesen werden, wobei die Konstante $C \in \mathbb{R}^{>0}$ nur von dem Gebiet Ω , von der Regularität der Triangulierung T_h , von den lokalen Finite Elemente Räumen und den numerischen Flüssen, nicht aber von der Gitterweite h abhängt.

Es handelt sich also bei der LDG Lösung um eine sinnvolle Approximation der Lösung der Stokes Gleichungen. Wir können von einer Folge von LDG Lösungen, für kleiner werdende Gitterweite h , Konvergenz gegen die eindeutige schwache Lösung der Stokes Gleichungen erwarten.

2.2.2 Die Systemmatrizen

Um aus den LDG Gleichungen (2.2.6) ein Gleichungssystem herleiten zu können, welches wir lösen können, müssen wir von den numerischen Flüssen fordern, dass sie sich in lineare Funktionale zerlegen lassen, die jeweils nur von einer der Funktionen σ_h , u_h oder p_h abhängen.

Definition 2.2.11 (Zerlegbarkeit numerischer Flüsse)

Seien, mit der Notation aus Definition 2.2.4, konsistente numerische Flüsse $\hat{\sigma}$, \hat{u}_σ , \hat{u}_p und \hat{p} gegeben. Dann heißen $\hat{\sigma}$, \hat{u}_σ , \hat{u}_p und \hat{p} zerlegbar, wenn sie sich auf jeder inneren Kante eines Elementes T_t in

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(\sigma_h, u_h) &= \hat{\sigma}_{\sigma_t}^{U_t^+}(\sigma_h^t) + \hat{\sigma}_{\sigma_t}^{U_t^-}(\sigma_h^s) + \hat{\sigma}_{U_t}^{U_t^+}(u_h^t) + \hat{\sigma}_{U_t}^{U_t^-}(u_h^s), \\ \hat{u}_\sigma(u_h) &= \hat{u}_\sigma^{U_t^+}(u_h^t) + \hat{u}_\sigma^{U_t^-}(u_h^s), \\ \hat{u}_p(u_h, p_h) &= \hat{u}_p^{U_t^+}(u_h^t) + \hat{u}_p^{U_t^-}(u_h^s) + \hat{u}_p^{P_t^+}(p_h^t) + \hat{u}_p^{P_t^-}(p_h^s) \quad \text{und} \\ \hat{p}(p_h) &= \hat{p}^{P_t^+}(p_h^t) + \hat{p}^{P_t^-}(p_h^s)\end{aligned}$$

und auf jeder Randkante eines Elementes T_t in

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(\sigma_h, u_h) &= \hat{\sigma}_{\sigma_t}^{U_t^+}(\sigma_h^t) + \hat{\sigma}_{U_t}^{U_t^+}(u_h^t) + \hat{\sigma}^{RHS_t}, \\ \hat{u}_\sigma(u_h) &= \hat{u}_\sigma^{U_t^+}(u_h^t) + \hat{u}_\sigma^{RHS_t}, \\ \hat{u}_p(u_h, p_h) &= \hat{u}_p^{U_t^+}(u_h^t) + \hat{u}_p^{P_t^+}(p_h^t) + \hat{u}_p^{RHS_t} \quad \text{und} \\ \hat{p}(p_h) &= \hat{p}^{P_t^+}(p_h^t) + \hat{p}^{RHS_t}\end{aligned}$$

zerlegen lassen. Dabei gilt für die lokalen numerischen Flüsse

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{\sigma_t}^{U_t^+}, \hat{\sigma}_{\sigma_t}^{U_t^-} : \mathbb{R}^{d \times d} &\rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}, \\ \hat{\sigma}_{U_t}^{U_t^+}, \hat{\sigma}_{U_t}^{U_t^-} : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}, \\ \hat{\sigma}^{RHS_t} &\in \mathbb{R}^{d \times d}, \\ \hat{u}_\sigma^{U_t^+}, \hat{u}_\sigma^{U_t^-}, \hat{u}_p^{U_t^+}, \hat{u}_p^{U_t^-} : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R}^d, \\ \hat{u}_p^{P_t^+}, \hat{u}_p^{P_t^-} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^d, \\ \hat{u}_\sigma^{RHS_t}, \hat{u}_p^{RHS_t} &\in \mathbb{R}^d, \\ \hat{p}^{P_t^+}, \hat{p}^{P_t^-} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \\ \hat{p}^{RHS_t} &\in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Beispiel 2.2.12 (Zerlegbare numerische Flüsse)

Die konsistenten numerischen Flüsse aus Beispiel 2.2.7 sind zerlegbar mit lokalen numerischen Flüssen

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}^{\sigma_t^+}(\sigma) &= \begin{cases} \frac{1}{2}\sigma - (\sigma \cdot n_s^t) \otimes C_{12} \\ \sigma \end{cases} && \text{auf einer inneren Kante } \varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t), \\
 \hat{\sigma}^{\sigma_t^-}(\sigma) &= \frac{1}{2}\sigma + (\sigma \cdot n_s^t) \otimes C_{12} && \text{auf einer Randkante } \varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t), \\
 \hat{\sigma}^{U_t^+}(u) &= -C_{11}u \otimes n_s^t && \text{auf einer inneren Kante } \varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t), \\
 \hat{\sigma}^{U_t^-}(u) &= C_{11}u \otimes n_s^t && \text{auf einer Kante } \varepsilon \in \mathcal{E}(t), \\
 \hat{\sigma}^{RHS_t} &= C_{11}g_D \otimes n_d^t && \text{auf einer inneren Kante } \varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t), \\
 \hat{u}_\sigma^{U_t^+}(u) &= \begin{cases} \frac{1}{2}u + (u \otimes n_s^t) \cdot C_{12} \\ 0 \end{cases} && \text{auf einer Randkante } \varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t), \\
 \hat{u}_\sigma^{U_t^-}(u) &= \frac{1}{2}u - (u \otimes n_s^t) \cdot C_{12} && \text{auf einer inneren Kante } \varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t), \\
 \hat{u}_\sigma^{RHS_t} &= g_D && \text{auf einer Randkante } \varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t), \\
 \hat{u}_p^{U_t^+}(u) &= \begin{cases} \frac{1}{2}u + (u \cdot n_s^t) D_{12} \\ 0 \end{cases} && \text{auf einer inneren Kante } \varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t), \\
 \hat{u}_p^{U_t^-}(u) &= \frac{1}{2}u - (u \cdot n_s^t) D_{12} && \text{auf einer inneren Kante } \varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t), \\
 \hat{u}_p^{P_t^+}(p) &= \begin{cases} pD_{11}n_s^t \\ 0 \end{cases} && \text{auf einer inneren Kante } \varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t), \\
 \hat{u}_p^{P_t^-}(p) &= -pD_{11}n_s^t && \text{auf einer inneren Kante } \varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t), \\
 \hat{u}_p^{RHS_t} &= g_D && \text{auf einer Randkante } \varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t), \\
 \hat{p}^{P_t^+}(p) &= \begin{cases} \frac{1}{2}p - pD_{12} \cdot n_s^t \\ p \end{cases} && \text{auf einer inneren Kante } \varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t), \\
 \hat{p}^{P_t^-}(p) &= \frac{1}{2}p + pD_{12} \cdot n_s^t && \text{auf einer inneren Kante } \varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t) \quad \text{und} \\
 \hat{u}_p^{RHS_t} &= 0 && \text{auf einer Randkante } \varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t).
 \end{aligned}$$

Wir werden im Folgenden anhand der Gleichung (2.2.6a) zeigen, wie wir aus der LDG Formulierung ein lineares Gleichungssystem erhalten. Für die beiden anderen Gleichungen in (2.2.6) werden wir die Ergebnisse angeben, jedoch nicht im Einzelnen beweisen.

Zuerst einmal können wir bei der Betrachtung von (2.2.6a) das Randintegral von T_t nach der Vorschrift

$$\partial T_t = \bigcup_{\varepsilon \in \mathcal{E}(t)} \varepsilon = \bigcup_{\varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t)} \varepsilon_s^t \cup \bigcup_{\varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t)} \varepsilon_d^t$$

in die Summe der inneren Kanten und der Randkanten von T_t aufteilen und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{T_t} \sigma_h : \tau^t \, dx &= - \int_{T_t} u_h \cdot (\nabla \cdot \tau^t) \, dx + \sum_{\varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t)} \int_{\varepsilon_s^t} \hat{u}_\sigma(u_h) \cdot \tau^t \cdot n_s^t \, ds \\ &\quad + \sum_{\varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t)} \int_{\varepsilon_d^t} \hat{u}_\sigma(u_h) \cdot \tau^t \cdot n_d^t \, ds \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

für alle $\tau^t \in \Sigma_t$ auf allen Elementen $T_t \in \mathcal{T}_h$. Da wir in obiger Gleichung nur über ein Element T_t integrieren, können wir die Funktionen σ_h und u_h durch ihre lokalen Funktionen σ_h^t und u_h^t ersetzen. Außerdem können wir die Zerlegbarkeit der numerischen Flüsse ausnutzen und erhalten aus (2.2.7)

$$\begin{aligned} \int_{T_t} \sigma_h^t : \tau^t \, dx &= - \int_{T_t} u_h^t \cdot (\nabla \cdot \tau^t) \, dx + \sum_{\varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t)} \int_{\varepsilon_s^t} \left(\hat{u}_\sigma^{U_t^+}(u_h^t) + \hat{u}_\sigma^{U_t^-}(u_h^s) \right) \cdot \tau^t \cdot n_s^t \, ds \\ &\quad + \sum_{\varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t)} \int_{\varepsilon_d^t} \left(\hat{u}_\sigma^{U_t^+}(u_h^t) + \hat{u}_\sigma^{RHS_t} \right) \cdot \tau^t \cdot n_d^t \, ds \end{aligned}$$

für alle $\tau^t \in \Sigma_t$ auf allen Elementen $T_t \in \mathcal{T}_h$. Obige Gleichung können wir wiederum nach σ_h^t , u_h^t und u_h^s sortieren und erhalten

$$\begin{aligned} &\int_{T_t} \sigma_h^t : \tau^t \, dx \\ &+ \int_{T_t} u_h^t \cdot (\nabla \cdot \tau^t) \, dx &+ \sum_{\varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t)} \int_{\varepsilon_s^t} (-1) \hat{u}_\sigma^{U_t^+}(u_h^t) \cdot \tau^t \cdot n_s^t \, ds \\ &+ \sum_{\varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t)} \int_{\varepsilon_d^t} (-1) \hat{u}_\sigma^{U_t^+}(u_h^t) \cdot \tau^t \cdot n_d^t \, ds & \quad (2.2.8) \\ (*) &+ \sum_{\varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t)} \int_{\varepsilon_s^t} (-1) \hat{u}_\sigma^{U_t^-}(u_h^s) \cdot \tau^t \cdot n_s^t \, ds \\ &= \sum_{\varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t)} \int_{\varepsilon_d^t} \hat{u}_\sigma^{RHS_t} \cdot \tau^t \cdot n_d^t \, ds \end{aligned}$$

für alle $\tau^t \in \Sigma_t$ auf allen Elementen $T_t \in \mathcal{T}_h$. Da wir obige Gleichung auf allen Elementen T_t der Triangulierung \mathcal{T}_h betrachten, kommen auf allen inneren Kanten ε_s^t je zwei

Integrale über ein Produkt von lokalen Funktionen auf den jeweils angrenzenden Elementen T_t und T_s vor. So kommt zum Beispiel in der Betrachtung über alle Elemente der Triangulierung das mit (*) markierte Integral über die Kante $\varepsilon_s^t = \varepsilon_t^s$ in (2.2.8) einmal als Randintegral von T_t in der Form

$$\int_{\varepsilon_s^t} (-1) \hat{u}_\sigma^{U_t^-}(u_h^s) \cdot \tau^t \cdot n_s^t \, ds$$

und einmal als Randintegral von T_s in der Form

$$\int_{\varepsilon_s^t} (-1) \hat{u}_\sigma^{U_s^-}(u_h^t) \cdot \tau^s \cdot n_t^s \, ds$$

vor. Aus diesem Grund können wir in der Betrachtung aller Elemente der Triangulierung die Integrale in (2.2.8) umsortieren und erhalten so, unter Beachtung von $n_s^t = -n_t^s$, aus (2.2.8)

$$\begin{aligned} & \int_{T_t} \sigma_h^t : \tau^t \, dx \\ & + \int_{T_t} u_h^t \cdot (\nabla \cdot \tau^t) \, dx \quad + \sum_{\varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t)} \int_{\varepsilon_s^t} (-1) \hat{u}_\sigma^{U_t^+}(u_h^t) \cdot \tau^t \cdot n_s^t \, ds \\ & \quad + \sum_{\varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t)} \int_{\varepsilon_d^t} (-1) \hat{u}_\sigma^{U_t^+}(u_h^t) \cdot \tau^t \cdot n_d^t \, ds \quad (2.2.9a) \\ & = \sum_{\varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t)} \int_{\varepsilon_d^t} \hat{u}_\sigma^{RHs_t} \cdot \tau^t \cdot n_d^t \, ds \end{aligned}$$

für alle $\tau^t \in \Sigma_t$ und

$$\begin{aligned} & \sum_{\varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t)} \int_{\varepsilon_s^t} \hat{u}_\sigma^{U_s^-}(u_h^t) \cdot \tau^s \cdot n_s^t \, ds \\ & = 0 \quad (2.2.9b) \end{aligned}$$

für alle $\tau^s \in \Sigma_s$ auf allen Elementen $T_t \in \mathcal{T}_h$. Da die lokalen Finite Elemente Räume

$$\Sigma_t = \langle \tau_m^t \mid m = 0, \dots, M^t - 1 \rangle, \quad (2.2.10a)$$

$$V_t = \langle v_l^t \mid l = 0, \dots, L^t - 1 \rangle \quad \text{und} \quad (2.2.10b)$$

$$Q_t = \langle q_k^t \mid k = 0, \dots, K^t - 1 \rangle, \quad (2.2.10c)$$

durch ihre jeweiligen Basen aufgespannt werden, können wir für die lokalen Funktionen in (2.2.9) ihre jeweilige Basisdarstellungen

$$\sigma_h^t = \sum_{m=0}^{M^t-1} \sigma_m^t \tau_m^t, \quad u_h^t = \sum_{l=0}^{L^t-1} u_l^t v_l^t \quad \text{und} \quad p_h^t = \sum_{k=0}^{K^t-1} p_k^t q_k^t \quad (2.2.11)$$

einsetzen. Dabei entsprechen die Koeffizienten $\sigma_m^t, u_l^t, p_k^t \in \mathbb{R}$ den Freiheitsgraden der lokalen Funktionen in den lokalen Finite Elemente Räumen. Entsprechend der Basen der lokalen Finite Elemente Räume betrachten wir die Gleichungen (2.2.9) nicht für alle $\tau^t \in \Sigma_t$, sondern für alle $\tau_{m'}^t$ mit $0 \leq m' \leq M^t - 1$ (analog für $\tau^s \in \Sigma_s$). Insgesamt erhalten wir also aus (2.2.9)

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{M^t-1} \sigma_m^t \left[\int_{T_t} \tau_m^t : \tau_{m'}^t \, dx \right] \\ & + \sum_{l=0}^{L^t-1} u_l^t \left[\int_{T_t} v_l^t \cdot (\nabla \cdot \tau_{m'}^t) \, dx + \sum_{\varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t)} \int_{\varepsilon_s^t} (-1) \hat{u}_{\sigma}^{U_t^+}(v_l^t) \cdot \tau_{m'}^t \cdot n_s^t \, ds \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t)} \int_{\varepsilon_d^t} (-1) \hat{u}_{\sigma}^{U_t^+}(v_l^t) \cdot \tau_{m'}^t \cdot n_d^t \, ds \right] \\ & = \sum_{\varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t)} \int_{\varepsilon_d^t} \hat{u}_{\sigma}^{RHS_t} \cdot \tau_{m'}^t \cdot n_d^t \, ds \end{aligned} \quad (2.2.12a)$$

für alle $0 \leq m' \leq M^t - 1$ und

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{L^t-1} u_l^t \left[\sum_{\varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t)} \int_{\varepsilon_s^t} \hat{u}_{\sigma}^{U_s^-}(v_l^t) \cdot \tau_{m''}^s \cdot n_s^t \, ds \right] \\ & = 0 \end{aligned} \quad (2.2.12b)$$

für alle $0 \leq m'' \leq M^s - 1$ auf allen $T_t \in \mathcal{T}_h$. Mit obigen Gleichungen haben wir ein Gleichungssystem für die Freiheitsgrade der lokalen Funktionen auf allen Elementen der Triangulierung gegeben. Um ein Gleichungssystem für die globalen Freiheitsgrade der Funktionen $(\sigma_h, v_h, p_h) \in \Sigma_h \times V_h \times Q_h$ und zu erhalten, betrachten wir die Basen der Funktionenräume Σ_h , V_h und Q_h ,

$$\Sigma_h = \langle \tau_m \mid m = 0, \dots, M-1 \rangle, \quad (2.2.13a)$$

$$V_h = \langle v_l \mid l = 0, \dots, L-1 \rangle \quad \text{und} \quad (2.2.13b)$$

$$Q_h = \langle q_k \mid k = 0, \dots, K-1 \rangle, \quad (2.2.13c)$$

wobei die Anzahl der globalen Freiheitsgrade M , L und K von der Anzahl der Elemente der Triangulierung und der Anzahl der jeweiligen lokalen Freiheitsgrade abhängt. Auch die auf ganz Ω definierten Funktionen σ_h , u_h und p_h können wir entsprechend ihrer Basisdarstellungen

$$\sigma_h = \sum_{m=0}^{M-1} \sigma_m \tau_m, \quad u_h = \sum_{l=0}^{L-1} u_l v_l \quad \text{und} \quad p_h = \sum_{k=0}^{K-1} p_k q_k \quad (2.2.14)$$

betrachten. Da eine eindeutige Abbildung zwischen den lokalen und den globalen Freiheitsgraden der jeweiligen Funktionenräume existiert,⁸ können wir die Gleichungen (2.2.12) als ein Gleichungssystem für die Vektoren der globalen Freiheitsgrade

$$\sigma \in \mathbb{R}^M, \quad u \in \mathbb{R}^L \quad \text{und} \quad p \in \mathbb{R}^K,$$

gegeben durch

$$(\sigma)_m := \sigma_m, \quad (u)_l := u_l \quad \text{und} \quad (p)_k := p_k \quad (2.2.15)$$

für $0 \leq m \leq M-1$, $0 \leq l \leq L-1$ und $0 \leq k \leq K-1$ auffassen. Definieren wir die lokalen Matrizen $M^{tt} \in \mathbb{R}^{M^t \times M^t}$, $W^{tt} \in \mathbb{R}^{M^t \times L^t}$ und $W^{st} \in \mathbb{R}^{M^s \times L^t}$ und die lokale rechte Seite $H_1^t \in \mathbb{R}^{M^t}$ durch

$$(M^{tt})_{ij} := \int_{T_t} \tau_j^t \cdot \tau_i^t \, dx, \quad (2.2.16a)$$

$$(W^{tt})_{ij} := \int_{T_t} v_j^t \cdot (\nabla \cdot \tau_i^t) \, dx + \sum_{\varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t)} \int_{\varepsilon_s^t} (-1) \hat{u}_\sigma^{U_t^+} (v_j^t) \cdot \tau_i^t \cdot n_s^t \, ds + \sum_{\varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t)} \int_{\varepsilon_d^t} (-1) \hat{u}_\sigma^{U_t^+} (v_j^t) \cdot \tau_i^t \cdot n_d^t \, ds, \quad (2.2.16b)$$

$$(W^{st})_{ij} := \sum_{\varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t) \cap \mathcal{E}_I(s)} \int_{\varepsilon_s^t} \hat{u}_\sigma^{U_s^-} (v_j^t) \cdot \tau_i^s \cdot n_s^t \, ds \quad (2.2.16c)$$

und

$$(H_1^t)_j := \sum_{\varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t)} \int_{\varepsilon_d^t} \hat{u}_\sigma^{RHS_t} \cdot \tau_j^t \cdot n_d^t \, ds \quad (2.2.16d)$$

⁸Ein Beispiel für eine solche Abbildung ist die Zuordnung $\{\text{Menge der lokalen Freiheitsgrade}\} \rightarrow \{\text{Menge der globalen Freiheitsgrade}\}$: $id \mapsto t \cdot id$. Dabei ist id die Nummer eines lokalen Freiheitsgrades auf dem Element T_t und $t \cdot id$ die Nummer eines globalen Freiheitsgrades, wenn man von einer konsekutiven Durchnummerierung der Elemente einer Triangulierung ausgeht.

für alle $T_t, T_s \in \mathcal{T}_h$, so können wir die Gleichungen (2.2.12) als

$$\begin{pmatrix} M & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ u \end{pmatrix} = H_1 \quad (2.2.17)$$

schreiben. Dabei sind die globalen Matrizen $M \in \mathbb{R}^{M \times M}$ und $W \in \mathbb{R}^{M \times L}$ und die globale rechte Seite $H_1 \in \mathbb{R}^M$ in (2.2.17) durch die Anwendung oben genannter Abbildung der Freiheitsgrade auf die lokalen Matrizen aus (2.2.16) gegeben.

Alle Überlegungen, die wir auf die erste Gleichung der LDG Formulierung (2.2.6) angewandt haben, lassen sich problemlos auf Gleichungen (2.2.6b) und (2.2.6c) der LDG Formulierung übertragen. So erhalten wir aus der zweiten Gleichung der LDG Formulierung (2.2.6)

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ u \\ p \end{pmatrix} = H_2$$

mit den globalen Matrizen $X \in \mathbb{R}^{L \times M}$, $Y \in \mathbb{R}^{L \times L}$ und $Z \in \mathbb{R}^{L \times K}$ und der globalen rechten Seite $H_2 \in \mathbb{R}^L$. Die entsprechenden lokalen Matrizen $X^{tt} \in \mathbb{R}^{L^t \times M^t}$, $X^{st} \in \mathbb{R}^{L^s \times M^t}$, $Y^{tt} \in \mathbb{R}^{L^t \times L^t}$, $Y^{st} \in \mathbb{R}^{L^s \times L^t}$, $Z^{tt} \in \mathbb{R}^{L^t \times K^t}$ und $Z^{st} \in \mathbb{R}^{L^s \times K^t}$ und die lokale rechte Seite $H_2^t \in \mathbb{R}^{L^t}$, die sich aus (2.2.6b) ergeben, lauten

$$\begin{aligned} (X^{tt})_{ij} := & \int_{T_t} \mu \tau_j^t : \nabla v_i^t \, dx \\ & + \sum_{\varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t)} \int_{\varepsilon_s^t} (-\mu) v_i^t \cdot \hat{\sigma}_{\tau_j^t}^{+}(\tau_j^t) \cdot n_s^t \, ds \\ & + \sum_{\varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t)} \int_{\varepsilon_d^t} (-\mu) v_i^t \cdot \hat{\sigma}_{\tau_j^t}^{+}(\tau_j^t) \cdot n_d^t \, ds, \end{aligned} \quad (2.2.18a)$$

$$(X^{st})_{ij} := \sum_{\varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t) \cap \mathcal{E}_I(s)} \int_{\varepsilon_s^t} \mu v_i^s \cdot \hat{\sigma}_{\tau_j^t}^{-}(\tau_j^t) \cdot n_s^t \, ds, \quad (2.2.18b)$$

$$\begin{aligned} (Y^{tt})_{ij} := & \sum_{\varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t)} \int_{\varepsilon_s^t} (-\mu) v_i^t \cdot \hat{\sigma}_{v_j^t}^{U_t^{+}}(v_j^t) \cdot n_s^t \, ds \\ & + \sum_{\varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t)} \int_{\varepsilon_d^t} (-\mu) v_i^t \cdot \hat{\sigma}_{v_j^t}^{U_t^{+}}(v_j^t) \cdot n_d^t \, ds, \end{aligned} \quad (2.2.18c)$$

$$(Y^{st})_{ij} := \sum_{\varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t) \cap \mathcal{E}_I(s)} \int_{\varepsilon_s^t} \mu v_i^s \cdot \hat{\sigma}^{U_s^-}(v_j^t) \cdot n_s^t \, ds, \quad (2.2.18d)$$

$$\begin{aligned} (Z^{tt})_{ij} &:= \int_{T_t} (-1) q_j^t (\nabla \cdot v_i^t) \, dx + \sum_{\varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t)} \int_{\varepsilon_s^t} \hat{p}^{P_t^+}(q_j^t) v_i^t \cdot n_s^t \, ds, \\ &\quad + \sum_{\varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t)} \int_{\varepsilon_d^t} \hat{p}^{P_t^+}(q_j^t) v_i^t \cdot n_d^t \, ds \end{aligned} \quad (2.2.18e)$$

$$(Z^{st})_{ij} := \sum_{\varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t) \cap \mathcal{E}_I(s)} \int_{\varepsilon_s^t} (-1) \hat{p}^{P_s^-}(q_j^t) v_i^s \cdot n_s^t \, ds \quad (2.2.18f)$$

und

$$\begin{aligned} (H_2^t)_{ij} &:= \int_{T_t} f \cdot v_j^t \, dx + \sum_{\varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t)} \int_{\varepsilon_d^t} \mu v_j^t \cdot \hat{\sigma}^{RHS_t} \cdot n_d^t \, ds \\ &\quad + \sum_{\varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t)} \int_{\varepsilon_d^t} (-1) \hat{p}^{RHS_t} v_j^t \cdot n_d^t \, ds \end{aligned} \quad (2.2.18g)$$

für alle $T_t, T_s \in \mathcal{T}_h$.

Aus der dritten Gleichung der LDG Formulierung (2.2.6) erhalten wir

$$\begin{pmatrix} E & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = H_3$$

mit den globalen Matrizen $E \in \mathbb{R}^{K \times L}$ und $R \in \mathbb{R}^{K \times K}$ und der globalen rechten Seite $H_3 \in \mathbb{R}^K$. Die entsprechenden lokalen Matrizen $E^{tt} \in \mathbb{R}^{K^t \times L^t}$, $E^{st} \in \mathbb{R}^{K^s \times L^t}$, $R^{tt} \in \mathbb{R}^{K^t \times K^t}$ und $R^{st} \in \mathbb{R}^{K^s \times K^t}$ und die lokale rechte Seite $H_2^t \in \mathbb{R}^{K^t}$, die sich aus (2.2.6c) ergeben, lauten

$$\begin{aligned} (E^{tt})_{ij} &:= \int_{T_t} (-1) v_j^t \cdot \nabla q_i^t \, dx + \sum_{\varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t)} \int_{\varepsilon_s^t} q_i^t \hat{u}_p^{U_t^+}(v_j^t) \cdot n_s^t \, ds \\ &\quad + \sum_{\varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t)} \int_{\varepsilon_d^t} q_i^t \hat{u}_p^{U_t^+}(v_j^t) \cdot n_d^t \, ds, \end{aligned} \quad (2.2.19a)$$

$$(E^{st})_{ij} := \sum_{\varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t) \cap \mathcal{E}_I(s)} \int_{\varepsilon_s^t} (-1) q_i^s \hat{u}_p^{U_s^-}(v_j^t) \cdot n_s^t \, ds, \quad (2.2.19b)$$

$$(R^{tt})_{ij} := \sum_{\varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t)} \int_{\varepsilon_s^t} q_i^t \hat{u}_p^{P_t^+}(q_j^t) \cdot n_s^t \, ds + \sum_{\varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t)} \int_{\varepsilon_d^t} q_i^t \hat{u}_p^{P_t^+}(q_j^t) \cdot n_d^t \, ds, \quad (2.2.19c)$$

$$(R^{st})_{ij} := \sum_{\varepsilon_s^t \in \mathcal{E}_I(t) \cap \mathcal{E}_I(s)} \int_{\varepsilon_s^t} (-1) q_i^s \hat{u}_p^{P_s^-}(q_j^t) \cdot n_s^t \, ds \quad (2.2.19d)$$

und

$$(H_3^t)_j := \sum_{\varepsilon_d^t \in \mathcal{E}_D(t)} \int_{\varepsilon_d^t} (-1) q_j^t \hat{u}_p^{RHS_t} \cdot n_d^t \, ds \quad (2.2.19e)$$

für alle $T_t, T_s \in \mathcal{T}_h$.

Damit haben wir das folgende Lemma bewiesen.

Lemma 2.2.13 (Diskrete Formulierung der Stokes Gleichungen)

Seien, mit der Notation und den Voraussetzungen aus Definition 2.2.8, die Matrizen M , W , X , Y , Z , E und R und die rechten Seiten H_1 , H_2 und H_3 durch (2.2.16), (2.2.18) und (2.2.19) und die Vektoren σ , u und p durch (2.2.15) gegeben. Dann sind die Funktionen σ_h , u_h und p_h , die wir gemäß der Basisdarstellungen (2.2.14) aus den Vektoren σ , u und p erhalten, genau dann die LDG Lösung des stationären Stokes Systems, wenn die Vektoren σ , u und p das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} M & W & 0 \\ X & Y & Z \\ 0 & E & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} \quad (2.2.20)$$

erfüllen. □

2.2.3 Die Kondensation der Matrizen

Mit (2.2.20) haben wir ein lineares Gleichungssystem gegeben, welches wir nach den Unbekannten auflösen können. Allerdings enthält das Gleichungssystem immer noch

den Gradienten der Geschwindigkeit, σ . Diesen hatten wir zur Herleitung der LDG Methode eingeführt, um die Stokes Gleichungen als ein System von Gleichungen erster Ordnung schreiben zu können. Unser Interesse gilt allerdings der Geschwindigkeit u und dem Druck p , weswegen wir (2.2.20) weiter umformulieren und so ein lineares Gleichungssystem für u und p erhalten.

Wählen wir für die lokalen Finite Elemente Räume Σ_t , V_t und Q_t orthonormale Basen, so gilt zum Beispiel für die Einträge von M^{tt} , dass

$$(M^{tt})_{ij} = 0 \quad \text{für alle } i \neq j.$$

Damit ist M eine Matrix in Diagonalgestalt und wir können ihr Inverses direkt mit

$$(M^{-1})_{ij} = \begin{cases} (M)_{ii}^{-1} & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

angeben. Somit können wir die erste Gleichung in (2.2.20) nach σ auflösen und erhalten die Gleichheit

$$\sigma = M^{-1} (H_1 - Wu),$$

die wir in die zweite Gleichung in (2.2.20) einsetzen, um

$$(Y - XM^{-1}W) u + Zp = H_2 - XM^{-1}H_1 \quad (2.2.21)$$

zu erhalten. Aus der dritten Gleichung in (2.2.20) erhalten wir

$$-Eu - Rp = -H_3. \quad (2.2.22)$$

Mit den Gleichungen (2.2.21) und (2.2.22) haben wir ein verdichtetes Gleichungssystem für u und p erhalten, in dem σ eliminiert ist. Motiviert durch (2.2.21) und (2.2.22) definieren wir die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{L \times L}$, $B \in \mathbb{R}^{L \times K}$, $B_T \in \mathbb{R}^{K \times L}$ und $C \in \mathbb{R}^{K \times K}$ und die rechten Seiten $F \in \mathbb{R}^L$ und $G \in \mathbb{R}^K$ durch

$$A := Y - XM^{-1}W, \quad (2.2.23a)$$

$$B := Z, \quad (2.2.23b)$$

$$B_T := -E, \quad (2.2.23c)$$

$$C := R, \quad (2.2.23d)$$

$$F := H_2 - XM^{-1}H_1 \quad \text{und} \quad (2.2.23e)$$

$$G := -H_3 \quad (2.2.23f)$$

und haben damit folgendes Lemma bewiesen.

Lemma 2.2.14 (Sattelpunktproblem)

Seien, mit der Notation und den Voraussetzungen aus Lemma 2.2.13, die Matrizen A , B , B_T und C und die rechten Seiten F und G durch (2.2.23) und die Vektoren u und p durch (2.2.15) gegeben. Dann sind die Funktionen u_h und p_h , die wir gemäß der Basisdarstellungen (2.2.14) aus den Vektoren u und p erhalten, genau dann die LDG Lösung des statio-nären Stokes Systems, wenn die Vektoren u und p das Sattelpunktproblem

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B_T & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \quad (2.2.24)$$

unter der Voraussetzung, dass wir orthonormale Basen der lokalen Finite Elemente Räume wählen können, lösen. \square

2.3 Iterative Lösungsverfahren

In diesem Abschnitt stellen wir ein iteratives Lösungsverfahren zur Lösung des linea- ren Gleichungssystems (2.2.24) vor. Dazu führen wir das Verfahren der Konjugierten Gradienten (im Folgenden kurz: CG Verfahren, von conjugate gradient) ein und zitieren bekannte Anforderungen an die Matrix des linearen Gleichungssystems um die Konver- genz des Verfahrens gegen die Lösung sicher zu stellen. Anschließend führen wir ein geschachteltes CG Verfahren zur Lösung des Sattelpunktproblems ein und zeigen, das die Matrix des linearen Gleichungssystems, welche aus der Diskretisierung mit Hilfe der Local Discontinuous Galerkin Methode hervorgegangen ist, alle Anforderungen für die Konvergenz des Lösungsverfahrens gegen die eindeutige LDG Lösung erfüllt.

2.3.1 Das Verfahren der Konjugierten Gradienten

In diesem Abschnitt stellen wir das Verfahren der Konjugierten Gradienten vor, mit des- sen Hilfe wir das Sattelpunktproblem lösen werden. Das Verfahren der Konjugierten Gra-dienten ist ein Verfahren aus der Klasse der Krylow-Unterraum-Verfahren zur effizienten iterativen Bestimmung einer Lösung der Gleichung $Tx = b$ für invertierbare Operatoren T .

Definition 2.3.1 (Verfahren der Konjugierten Gradienten) [Sie97, Algorithmus 3.32]

Sei Y ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_Y$, $T : Y \rightarrow Y$ ein invertierbarer selbstadjungierter Operator und $b \in Y$. Sei die Startnäherung $x^0 \in Y^0$ und der erste Krylow-Unterraum $Y^0 \subset Y$ so gewählt, dass

$$(Tx^0 - b, q)_Y = 0$$

für alle $q \in Y^0$ gilt. Dann ist das Verfahren der Konjugierten Gradienten, oder auch CG Verfahren zur iterativen Bestimmung der Lösung \hat{x} von $T\hat{x} = b$ durch den folgenden Algorithmus gegeben.

Setze

$$r^0 := Tx^0 - b,$$

$$d^0 := r^0 \text{ und}$$

$$\delta^0 := (r^0, r^0)_Y.$$

Gilt nun $\delta^0 = 0$, so ist $x^0 = \hat{x}$ die gesuchte Lösung und das Verfahren ist beendet.
Sonst wiederhole für gegebenes $m \geq 0$:

$$h^m := Td^m$$

$$\varrho^m := \frac{(r^m, r^m)_Y}{(h^m, d^m)_Y}$$

$$x^{m+1} := x^m - \varrho^m d^m$$

$$r^{m+1} := r^m - \varrho^m h^m$$

$$\delta^{m+1} := (r^{m+1}, r^{m+1})_Y$$

Gilt $\delta^{m+1} = 0$, so ist $x^{m+1} = \hat{x}$ die gesuchte Lösung und das Verfahren ist beendet. Sonst setze

$$\gamma^{m+1} := \frac{\varrho^{m+1}}{\varrho^m} \text{ und}$$

$$d^{m+1} := r^{m+1} + \gamma^m d^m.$$

Bei dem Verfahren der Konjugierten Gradienten handelt es sich um ein Verfahren, welches höchstens so viele Iterationen wie die Dimensionalität von T zur Bestimmung der Lösung benötigt. Für eine Näherungslösung x^m , die aus m Iterationen hervorgegangen ist, liefert der folgende Satz eine Fehlerabschätzung.

Satz 2.3.2 (Konvergenz des CG Verfahrens) [Sie97, Satz 3.31]

Sei, mit der Notation und den Voraussetzungen aus Definition 2.3.1, $\|\cdot\|_T$ die durch T induzierte Norm. Dann konvergieren die Näherungslösungen x^m , die jeweils durch m Iterationen aus dem CG Verfahren hervorgegangen sind, mit der Rate

$$\|x^m - \hat{x}\|_T \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa(T) - 1}{\kappa(T) + 1} \right)^m \|x^0 - \hat{x}\|_T$$

gegen die exakte Lösung \hat{x} von $T\hat{x} = b$, wobei $\kappa(T)$ die Kondition von T bezeichnet.

Beweis: Siehe [Sie97] und die Referenzen darin. □

2.3.2 Die Lösung des Sattelpunktproblems

Um das Sattelpunktproblem (2.2.24) mit einem geeigneten CG Verfahren lösen zu können, müssen wir es zuerst in die Form $Tx = b$ bringen. Um dazu die erste Gleichung in (2.2.24) nach u umzustellen und

$$u = A^{-1}(F - Bp)$$

zu erhalten, gehen wir davon aus, dass die Matrix A invertierbar ist.⁹ Setzen wir diese Darstellung für u in die zweite Gleichung von (2.2.24) ein, so erhalten wir

$$(B_T A^{-1} B + C)p = B_T A^{-1} F - G. \quad (2.3.1)$$

Der durch $(B_T A^{-1} B + C)$ in obiger Gleichung gegebenen Operator wird Schurkomplementoperator genannt. Um Gleichung (2.3.1) mit einem CG Verfahren lösen zu können, müssen wir zeigen, dass sowohl die Matrix A als auch der Schurkomplementoperator symmetrisch und positiv definit sind.

Lemma 2.3.3

Sei, mit der Notation und den Voraussetzungen aus Lemma 2.2.14, der Schurkomplementoperator $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{K \times K}$ durch $\mathcal{S} := B_T A^{-1} B + C$ definiert und die Matrix A durch $A = Y - XM^{-1}W$ gegeben. Dann sind sowohl A als auch \mathcal{S} symmetrische positiv definite Matrizen.

⁹Diese Annahme ist nach Lemma 2.3.3 auch berechtigt. In der Praxis müssen wir das Inverse von A nicht berechnen, sondern nur eine Multiplikation der Art $A^{-1}b = x$ realisieren, was wir durch die Anwendung eines CG Verfahrens erreichen können.

Beweis: Wir werden zuerst die einzelnen Komponenten von A und S untersuchen, um dann auf A und S zu schliessen. Dazu verwenden wir die numerischen Flüsse aus Beispiel 2.2.7.

A: Zuerst zeigen wir, dass Y symmetrisch und positiv definit ist. Die Symmetrie ergibt sich daraus, dass die lokalen Matrizen nach

$$(Y^{tt})_{ij} = \int_{\partial T_t} \frac{\mu}{h_t} v_i^t \cdot v_j^t \, ds = (Y^{tt})_{ji} \quad \text{und} \quad (Y^{st})_{ij} = \int_{\varepsilon_s^t} \left(\frac{\mu}{h_t} \right) v_i^s \cdot v_j^t \, ds = (Y^{ts})_{ji}$$

symmetrisch sind und nach der Wahl einer geeigneten Abbildung zwischen lokalen und globalen Freiheitsgraden (siehe oben). Für die Diagonalelemente von Y gilt

$$(Y^{tt})_{ii} = \int_{\partial T_t} \frac{\mu}{h_t} (v_i^t)^2 \, ds > 0.$$

Für die restlichen Elemente der i -ten Zeile von Y gilt, wegen der Orthonormalität der Basisfunktionen, $(Y^{tt})_{ij} = 0$ und $(Y^{st})_{ij} = 0$ für alle bis auf ein j . Für diesen Index j gilt allerdings die Abschätzung

$$\left| (Y^{ts})_{ij} \right| = \left| \int_{\varepsilon_s^t} \left(-\frac{\mu}{h_t} \right) v_i^s \cdot v_j^t \, ds \right| \leq \frac{\mu}{h_t} \int_{\varepsilon_s^t} |v_i^s \cdot v_j^t| \, ds \leq |(Y^{tt})_{ii}|,$$

womit Y das schwache Zeilensummenkriterium erfüllt. Damit ist Y symmetrisch und positiv definit.

Betrachten wir die lokalen Matrizen von X und W , so sehen wir nach partieller Integration der Einträge von einer der beiden Matrizen, dass $X = -\mu W^T$ gilt. Da es sich bei M um eine Diagonalmatrix handelt, können wir A als

$$A = Y + \mu M^{-1} W^T W$$

schreiben. Da es sich bei dem Produkt $W^T W$ um die Cholesky-Zerlegung einer symmetrischen, positiv definiten Matrix handelt, ist auch $\mu M^{-1} W^T W$ symmetrisch und positiv definit.

Als Summe zweier symmetrischen, positiv definiten Matrizen ist damit auch A symmetrisch und positiv definit.

S: Wie bei X und W sehen wir nach partieller Integration die Gleichheit $E = -Z^T$ ein und erhalten damit

$$B_T = B^T.$$

Da A symmetrisch und positiv definit ist, ist nach dem Trägheitssatz von Sylvester auch die Matrix $B^T A^{-1} B$ symmetrisch und positiv definit.

Außerdem können wir wie bei Y mit Hilfe des schwachen Zeilensummenkriterium folgern, dass $C = R$ eine symmetrische, positiv definite Matrix ist.

Damit ist \mathcal{S} eine symmetrische und positiv definite Matrix. \square

Wir können also mit $\mathcal{F} := B_T A^{-1} F - G \in \mathbb{R}^K$ ein CG Verfahren zur Lösung der Gleichung

$$\mathcal{S}p = \mathcal{F} \quad (2.3.2)$$

anwenden. Die dabei benötigte Anwendung von A^{-1} auf einen Vektor können wir wiederum durch ein inneres CG Verfahren realisieren und erhalten das Folgende geschachtelte CG Verfahren. Wir brechen die Iteration des äußeren CG Verfahrens ab, sobald eine gewünschte Genauigkeit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$ unterschritten oder eine vorher definierte Anzahl von Iterationen $m_{max} \in \mathbb{N}^{>0}$ überschritten wird.

Definition 2.3.4 (CG Verfahren zur Inversion des Schurkomplementoperators)

Sei, mit der Notation aus Definition 2.3.1 und Lemma 2.3.3, die rechte Seite \mathcal{F} wie in (2.3.2) gegeben. Sei außerdem die Lösungen $\varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$ und die Anzahl der maximalen Iterationen $\in \mathbb{N}^{>0} m_{max}$ gegeben. Dann ist das CG Verfahren zur iterativen Bestimmung einer Näherungslösung p^m von (2.3.2) durch den folgenden Algorithmus gegeben.

Wähle $p^0 \in Q^0$ für einen Unterraum $Q^0 \subset Q_h$ so, dass

$$(\mathcal{S}p^0 - \mathcal{F}) \cdot q = 0$$

für alle $q \in Q^0$ gilt. Dies ist zum Beispiel für $Q^0 = \{0\}$ und $p^0 = 0$ der Fall.

Setze $t_a := Bp^0$ und bestimme jeweils t_b und t_c durch Anwendung eines CG Verfahrens als Lösungen der Gleichungen $At_b = t_a$ und $At_c = F$. Setze damit

$$r^0 := B_T t_b + Cp^0 - B_T t_c + G,$$

$$d^0 := r^0 \text{ und}$$

$$\delta^0 := r^0 \cdot r^0.$$

Gilt nun $\delta^0 \leq \varepsilon$, so ist p^0 die gesuchte Näherungslösung und das Verfahren ist beendet. Sonst wiederhole für gegebenes $m \geq 0$:

Setze $t^m := Bd^m$ und bestimme χ^m durch Anwendung eines CG Verfahrens als Lösung von $A\chi^m = t_m$. Setze damit

$$h^m := B_T \chi^m + Cd^m,$$

$$\varrho^m := \frac{\delta^m}{h^m d^m},$$

$$p^{m+1} := p^m - \varrho^m d^m,$$

$$r^{m+1} := p^m - \varrho^m h^m \text{ und}$$

$$\delta^{m+1} := r^{m+1} \cdot r^{m+1}.$$

Gilt $\delta^{m+1} \leq \varepsilon$, so ist p^{m+1} die gesuchte Näherungslösung und das Verfahren ist beendet. Gilt hingegen $m + 1 = m_{max}$, so ist die Anzahl der maximal zulässigen Iterationen erreicht und das Verfahren ist beendet, ohne eine Näherungslösung zu berechnen. Sonst setze

$$\gamma^m := \frac{\delta^{m+1}}{\delta^m} \text{ und}$$

$$d^{m+1} := r^{m+1} + \gamma^m d^m.$$

Mit diesem geschachtelten CG Verfahren haben wir das Verfahren zur Hand, mit dem wir die LDG Lösungen u und p der stationären Stokes Gleichungen bestimmen können.

Satz 2.3.5 (Konvergenz gegen die LDG Lösung)

Seien, mit der Notation und den Voraussetzungen aus Lemma 2.2.14, \mathcal{S} und \mathcal{F} wie in Definition 2.3.4 gegeben. Sei die Näherungslösung p^m durch m Iterationen des CG Verfahren zur Inversion des Sattelpunktoperators 2.3.4 und u^m durch folgende Vorschrift gegeben:

$$\text{Setze } a^m := Bp^m.$$

Bestimme b^m durch Anwendung eines CG Verfahrens als Lösung von $Ab^m = a^m$.

Bestimme c^m durch Anwendung eines CG Verfahrens als Lösung von $Ac^m = F$.

$$\text{Setze } u^m := c^m - b^m.$$

Dann konvergiert die Folge von Näherungslösungen (u^m, p^m) für $m \rightarrow \infty$ gegen die eindeutige LDG Lösung (u_h, p_h) des stationären Stokes Systems.

Beweis: Nach Lemma 2.3.3 erfüllt A die Voraussetzungen von Satz 2.3.2 und wir können annehmen, dass jede innere Anwendung eines CG Verfahrens zur Inversion von A in Definition 2.3.4 beliebig exakt ausgeführt wird. Damit können wir, für m_{max} genügend groß und ϵ genügend klein, erwarten, dass die Folge von Lösungen p^m , die wir aus dem CG Verfahren zur Inversion des Sattelpunktoperators aus Definition 2.3.4 erhalten, nach Satz 2.3.2 gegen die Lösung p_h von $\mathcal{S}p_h = \mathcal{F}$ konvergiert, da auch \mathcal{S} nach Lemma 2.3.3 die Voraussetzungen von Satz 2.3.2 erfüllt. Analog können wir davon ausgehen, dass die CG Verfahren in obiger Vorschrift zur Bestimmung von u^m beliebig exakt ausgeführt werden können und u^m damit durch $u^m = A^{-1}(F - Bp^m)$ gegeben ist. Damit konvergiert das Paar (u^m, p^m) gegen die Lösung (u, p) des Sattelpunktproblems (2.2.24), die wiederum nach Lemma 2.2.14 mit der eindeutigen LDG Lösung (u_h, p_h) der stationären Stokes Gleichungen übereinstimmt. \square

2.4 Die Implementierung in DUNE

Zur Implementierung eines numerischen Verfahrens zur Lösung der stationären Stokes Gleichungen greifen wir auf das Framework DUNE (*Distributed and Unified Numerics Environment*) zurück.¹⁰ Bei DUNE handelt es sich um in der Programmiersprache C++ verfasste Bibliotheken, die es mit Hilfe von objektorientierter Programmierung und Template-basierten Methoden ermöglichen, bei gleicher Funktionalität, Datenstrukturen auszutauschen. Dadurch ist es dem Anwender zum Beispiel möglich, numerische Verfahren unabhängig von der Dimensionalität des Problems oder den Datenstrukturen des verwandten Gitters zu implementieren.

DUNE ist unter der LGPL 2.1¹¹ frei verfügbar und modular aufgebaut. Das Kernmodul `dune-common` stellt überwiegend Methoden zur Interprozess-Kommunikation (für eine parallele Implementierung) und einige templatierte Vektor- und Matrixtypen, sowie ein Buildsystem für DUNE-Module bereit.

Ein weiteres Kernmodul, `dune-grid`, stellt ein umfassendes Interface bereit, mit dem

¹⁰Der Beschreibung von DUNE liegt, soweit nicht anders vermerkt, die Dokumentation <http://www.dune-project.org/doc-1.1/doxygen/html/> vom 23. September 2009 zugrunde.

¹¹<http://www.gnu.org/licenses/lgpl-2.1.html>

sich viele bereits bestehende Gitter, wie zum Beispiel ALBERTA¹², ALUGrid¹³ und UG¹⁴, über eine gemeinsame Schnittstelle benutzen lassen. Außerdem stellt dune-grid diverse Geometrietypen für Gitterelemente verschiedener Codimensionen und das Dune Grid Format bereit. Über das Dune Grid Format ist es möglich, auf einfache Art und Weise zur Laufzeit eines Programms Gitter einlesen oder generieren zu lassen, wobei dabei auf bestehende Programme, wie zum Beispiel triangle¹⁵ oder tetgen¹⁶, zurückgegriffen werden kann. Auch Methoden zur Visualisierung stellt dune-grid über die Einbindung der Grape¹⁷ Bibliothek oder der Verwendung des Visualisation Toolkit Formats VTK¹⁸ bereit. Für eine detaillierte Beschreibung der Funktionalität von dune-common und dune-grid verweisen wir an dieser Stelle auf die ausführliche Dokumentation¹⁹ und [BBD⁺08b] und [BBD⁺08a].

Das an der Universität Freiburg entwickelte Dune-Modul dune-fem baut direkt auf dune-common und dune-grid auf. Das Ziel von dune-fem ist es, eine eindeutige Korrespondenz zwischen mathematischen Objekten, wie zum Beispiel Funktionenräumen, Funktionen, Operatoren oder Quadraturen und den bereitgestellten Interfaceklassen herzustellen. So stellt dune-fem eine Vielzahl von Interfaces und Implementierungen verschiedener Funktionenräume und Basisfunktionen, Systemmatrizen und Gleichungssystemlöser, sowie verschiedenste Hilfsmittel zu Integration, Adaptivität, Paralellisierung und Visualisierung bereit. Unter anderem stellt dune-fem auch das Pass-Konzept bereit, mit dessen Hilfe sich diskrete Operatoren miteinander verknüpfen lassen. Für eine detaillierte Beschreibung der Funktionalität von dune-fem verweisen wir an dieser Stelle auf die ausführliche Dokumentation²⁰ und [DKNO09].

Die Implementierung des numerischen Verfahrens zur Lösung der stationären Stokes Gleichungen haben wir durch die Bereitstellung eines eigenen DUNE-Modules, dune-stokes, realisiert, welches auf die Funktionalitäten von dune-common, dune-grid und dune-fem zugreift. In dem Modul dune-stokes stellen wir alle Klassen, die

¹²<http://www.alberta-fem.de/>

¹³<http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Research/alugrid/>

¹⁴<http://atlas.gcsc.uni-frankfurt.de/~ug/>

¹⁵<http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>

¹⁶<http://tetgen.berlios.de/>

¹⁷<http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Research/grape/GENERAL/>

¹⁸<http://www.vtk.org/>

¹⁹<http://www.dune-project.org/doc/doxygen.html>

²⁰<http://dune.mathematik.uni-freiburg.de/doc/html-current/index.html>

ein Anwender für eine Implementierung einbinden muss, in dem Verzeichnis `dune-stokes/stokes/` in verschiedenen Headerdateien zur Verfügung. Eine Beispielimplementierung, die diese Klassen benutzt, stellen wir im Verzeichnis `dune-stokes/src/` zur Verfügung.

2.4.1 Die Klassen in `dune-stokes/stokes/`

Die Headerdateien, die wir in `dune-stokes/stokes/` bereitstellen, können vom Anwender wie andere DUNE-Header über `#include<dune/stokes/beispielheader.hh>` eingebunden werden, wenn der Anwender das Modul `dune-stokes` korrekt konfiguriert hat. Im Folgenden stellen wir die einzelnen Headerdateien und die darin enthaltenen Klassen kurz vor. Der Anwender muss davon lediglich `discretestokesfunctionspacewrapper.hh`, `discretestokesmodelinterface.hh` und `stokespass.hh` direkt einbinden, die restlichen Header werden bei Bedarf von diesen automatisch eingebunden.

- `dune-stokes/stokes/cghelper.hh`

In der Klasse `Dune::MatrixA_Operator` haben wir durch die Methode

```
void mult OEM( const VECType* x, VECType* ret )const  
die Operation ret = Ax realisiert.
```

In der Klasse `Dune::SchurkomplementOperator` haben wir durch die Methode

```
void mult OEM( const VECType* x, VECType* ret )const  
die Operation ret = Sx realisiert.
```

In der Klasse `Dune::A_SolverCaller` haben wir durch die Methode

```
void apply( const DiscreteVelocityFunctionType& arg, DiscreteVelocityFunctionType&  
dest )
```

die Operation *dest* = $A^{-1}arg$ realisiert.

- `dune-stokes/stokes/discretestokesfunctionspacewrapper.hh`

Mit der Klasse `Dune::DiscreteStokesFunctionSpaceWrapper`, abgeleitet von `Dune::DiscreteFunctionSpaceDefault`, stellen wir einen diskreten Funktionenraum bereit, der zwei diskrete Funktionenräume, einen für die Geschwindigkeit und einen für den Druck, enthält. Diese Klasse erfüllt das Interface

`Dune::DiscreteFunctionSpaceInterface.`

Mit der Klasse `Dune::DiscreteStokesFunctionWrapper` stellen wir eine Klasse bereit, die zwei diskrete Funktionen, die Geschwindigkeit und den Druck, enthält. Diese Klasse erfüllt das Interface `Dune::DiscreteFunctionInterface` implizit und wird als Argument für den `Dune::StokesPass` verwendet.

- `dune-stokes/stokes/discretestokesmodelinterface.hh`

Mit der Klasse `Dune::DiscreteStokesModelInterface` stellen wir ein Interface für ein diskretes Modell bereit, mit welchem der `Dune::StokesPass` parametrisiert wird. Ein Modell, welches dieses Interface erfüllt, muss die einzelnen Flussauswertungen und die Auswertung der rechten Seite f und der Randdaten g_D bereitstellen.

Mit der Klasse `Dune::DiscreteStokesModelDefault`, abgeleitet von `Dune::DiscreteStokesModelInterface`, stellen wir ein diskretes Modell bereit, in welchem wir die numerischen Flüsse aus Beispiel 2.2.7 implementiert haben.

- `dune-stokes/stokes/saddlepoint_inverse_operator.hh`

Mit der Klasse `Dune::SaddlepointInverseOperator` stellen wir einen Operator zur Verfügung, der zuerst ein geschachteltes CG Verfahren nach Definition 2.3.4 zur Bestimmung des Drucks p ausführt und dann nach der Vorschrift in Satz 2.3.5 aus p die Geschwindigkeit u bestimmt. Dies haben wir mit der Methode

```
solve( ... , RangeType& dest, ... )
```

realisiert, wobei `dest.discreteVelocity()` u und `dest.discretePressure()` p entspricht.

- `dune-stokes/stokes/stokespass.hh`

Mit der Klasse `Dune::StokesPass`, abgeleitet von `Dune::Pass`, stellen wir für den Anwender die zentrale Klasse bereit, welche die Funktionalitäten der oben genannten Klassen vereint. Bei der Anwendung der Methode

```
virtual void apply( const DomainType& arg, RangeType& dest )const
```

werden zuerst die globalen Systemmatrizen und rechten Seiten, wie sie durch Lemma 2.2.13 definiert sind, assembliert. Danach wird das Sattelpunktproblem 2.2.24 durch Anwendung des `Dune::SaddlepointInverseOperator` nach u und p gelöst und die Lösung in `dest` (vom Typ `Dune::DiscreteStokesFunctionWrapper`) zurückgegeben.

2.4.2 Eine Beispielimplementierung in `dune-stokes/src/`

In `dune-stokes/src/` stellen wir eine Beispielimplementierung bereit, die oben genannte Klassen benutzt. Im Folgenden stellen wir diese Implementierung anhand einiger Auszüge aus der Funktion

```
RunInfo singleRun( CollectiveCommunication& mpicomm )
aus dune-stokes/src/dune_stokes.cc vor.
```

Zuerst erstellen wir das Grid und verfeinern es global (Zeilen 456-459). Anschließend extrahieren wir den Gridpart (Zeilen 460-462), worunter wir uns in diesem Fall eine Triangulierung wie in Definition 2.2.1 vorstellen können.

```
456 const int gridDim = GridType::dimensionworld;
457 Dune::GridPtr< GridType > gridPtr( Parameters().Dgffilename( gridDim ) );
458 const int refine_level = refine_level_factor * Dune::DGFFGridInfo< GridType >::
    refineStepsForHalf();
459 gridPtr->globalRefine( refine_level );
460 typedef Dune::AdaptiveLeafGridPart< GridType >
461     GridPartType;
462 GridPartType gridPart( *gridPtr );
```

Anschließend definieren wir die Typen für das diskrete Modell über eine Traitsklasse (Zeilen 485-493), wobei wir die Klassen `Force` und `DirichletData` in der Datei `dune-stokes/src/analyticaldata.hh` bereitstellen. Mit der Traitsklasse wird der Typ des diskreten Modells definiert (Zeilen 494-495) und dieses instanziert (Zeilen 524-527). Durch `stabil_coeff` werden die Koeffizienten C_{11} , C_{12} , D_{11} und D_{12} definiert, `analyticalForce` und `analyticalDirichletData` sind Instanzen von `Force` und `DirichletData` und repräsentieren f und g_D .

```
485 typedef Dune::DiscreteStokesModelDefaultTraits<
486             GridPartType,
487             Force,
488             DirichletData,
```

```

489         gridDim ,
490         polOrder ,
491         VELOCITY_POLORDER ,
492         PRESSURE_POLORDER >
493     StokesModelTraitsImp ;
494 typedef Dune::DiscreteStokesModelDefault< StokesModelTraitsImp >
495     StokesModelType ;
524 StokesModelImpType stokesModel( stabil_coeff ,
525                                     analyticalForce ,
526                                     analyticalDirichletData ,
527                                     viscosity );

```

Zuletzt wird der Typ `StokesPass` mit dem `StokesModelType` parametrisiert und ein `StokesPass` mit dem `stokesModel`, der Triangulierung `gridPart` und dem diskreten Funktionenraum `discreteStokesFunctionSpaceWrapper` angelegt (Zeilen 538-543). Der `startPass` vom Typ `StartPassType` wird dabei von `dune-fem` bereitgestellt und besitzt keine eigene Funktionalität, den diskreten Funktionenraum haben wir weiter oben in `dune-stokes/src/dune_stokes.cc` vom Typ `DiscreteStokesFunctionSpaceWrapper` angelegt. Die diskreten Funktionen, die u_h und p_h repräsentieren, werden daraufhin initialisiert (Zeilen 545-546) und mit ihnen die `apply()` Methode des Passes aufgerufen (Zeile 549). Bei `initArgToPass` handelt es sich um einen `DiscreteStokesFunctionWrapper`, der dem Pass des Interfaces aus `dune-fem` wegen übergeben werden muss und keine weitere Bedeutung hat.

```

538 typedef Dune::StokesPass< StokesModelType , StartPassType , 0 >
539     StokesPassType ;
540 StokesPassType stokesPass( startPass ,
541                             stokesModel ,
542                             gridPart ,
543                             discreteStokesFunctionSpaceWrapper );
545 computedSolutions.discretePressure().clear();
546 computedSolutions.discreteVelocity().clear();
549 stokesPass.apply( initArgToPass , computedSolutions );

```

Beim Aufruf der `apply()` Methode assembliert der `StokesPass` die Systemmatrizen und löst das Sattelpunktproblem. Dem Anwender liegen nach Aufruf dieser Methode die Lösungen in

`computedSolutions.discretePressure()` und

`computedSolutions.discreteVelocity()`

für die Nachbearbeitung, zum Beispiel zur Visualisierung oder zur Fehlerabschätzung, vor.

2.5 Numerische Experimente

In diesem Abschnitt präsentieren wir numerische Experimente, die auf der Implementierung aus Abschnitt 2.4 beruhen. Dabei reproduzieren wir die numerischen Experimente aus [CKSS02, §4]. Dazu wählen wir die rechte Seite und die Randdaten wie in Beispiel 2.1.3, da die exakten Lösungen in diesem Fall bekannt sind. Sei also \mathcal{T}_h eine Triangulierung zu einer gegebenen Gitterweite h und seien u_h und p_h die numerischen Approximationen auf \mathcal{T}_h aus Satz 2.3.5 mit einer Lösergenauigkeit von $1e - 20$ und den numerischen Flusskonstanten $C_{11} = \frac{1}{h}$, $D_{11} = h$ und $C_{12} = D_{12} = 0$ wie in [CKSS02, §4.1]. Seien u und p die L^2 -Projektionen der exakten Lösungen aus Beispiel 2.1.3 auf \mathcal{T}_h .²¹ Als Triangulierung des Gebietes $\Omega = [-1; 1]^2$ haben wir sowohl eine Triangulierung aus Dreiecken als auch eine Triangulierung aus Rechtecken gewählt. Abbildung 2.2 zeigt

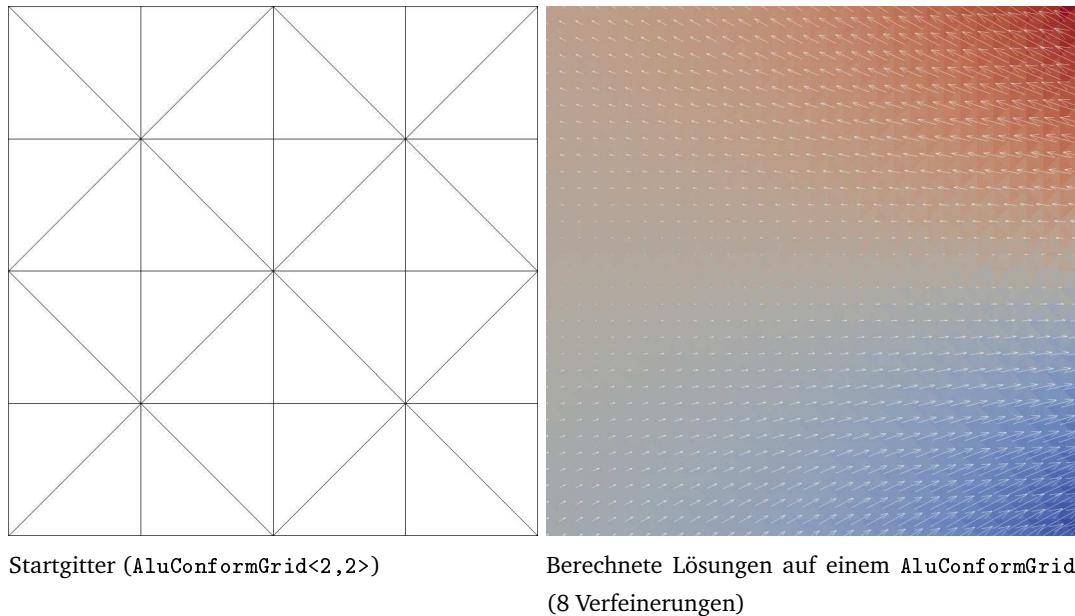


Abbildung 2.2: Beispiel einer Triangulierung mit AluConformGrid (links) und berechneter Lösungen (rechts). Der Druck ist farbig (rot $\hat{=}$ hoher Druck, blau $\hat{=}$ niedriger Druck) und die Geschwindigkeit ist durch Pfeile dargestellt (die Länge der Pfeile gibt den Betrag der Geschwindigkeit an).

eine Triangulierung von Ω aus Dreiecken und die berechneten Lösungen auf einer Triangulierung, welche durch achtfache Verfeinerung aus der Triangulierung links im Bild

²¹Die L^2 -Projektion realisieren wir durch die Klasse `Dune::L2Projection` aus `dune-fem`.

hervorgegangen ist.

Wir interessieren uns für den L^2 -Fehler der berechneten Geschwindigkeit $e_u := \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)^d}$ und den Fehler des berechneten Drucks $e_p := \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}$ gegenüber den exakten Lösungen. Außerdem interessieren wir uns für die experimentellen Konvergenzordnungen

$$eoc_u := \frac{\ln \left(\frac{e_{u_{h_v}}}{e_{u_{h_{v-1}}}} \right)}{\ln \left(\frac{h_v}{h_{v-1}} \right)} \quad \text{und} \quad eoc_p := \frac{\ln \left(\frac{e_{p_{h_v}}}{e_{p_{h_{v-1}}}} \right)}{\ln \left(\frac{h_v}{h_{v-1}} \right)}$$

(*experimental order of convergence*), wobei h_{v+1} die Gitterweite einer Triangulierung ist, die durch einmalige Verfeinerung aus einer Triangulierung mit Gitterweite h_v hervorgeht. Die experimentelle Konvergenzordnung ist ein Maß für die Güte der Konvergenz. Haben wir zum Beispiel eine Fehlerabschätzung der Form

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)^d} \leq Ch^k$$

mit einer Konstante C gegeben, so entspricht die experimentelle Konvergenzordnung eoc_u dem experimentell bestimmten Exponenten k .

Die Triangulierungen haben wir durch Benutzung der Klassen `Dune::AluConformGrid` (Dreiecke) und `Dune::UGGrid` (Rechtecke) aus dem Modul `dune-grid` realisiert. Auf der folgenden Doppelseite haben wir in den Tabellen 2.1, 2.2 und 2.3 zu gegebener Gitterweite h die Anzahl der Elemente einer Triangulierung aus Dreiecken, $|\mathcal{T}_h|$, sowie den L^2 -Fehler der berechneten Lösungen auf dieser Triangulierung und die experimentellen Konvergenzordnungen aufgetragen. In den Tabellen 2.4, 2.5 und 2.6 haben wir diese Informationen für eine Triangulierung aus Rechtecken aufgetragen.

Bemerkung 2.5.1 (Diskussion der Ergebnisse)

Haben wir eine exakte Lösung der Regularität $(u, p) \in H^2(\Omega)^2 \times H^1(\Omega)$ gegeben (wie dies bei der exakten Lösung aus Beispiel 2.1.3 der Fall ist), so können wir wegen der *a-priori* Abschätzung aus Bemerkung 2.2.10 erwarten, dass die experimentelle Konvergenzordnung der Geschwindigkeit von der Ordnung $k + 1$ und die des Drucks von der Ordnung k ist, wenn wir als Polynomordnungen für die Finite Elemente Ansatzräume k wählen. Dieser Erwartung entsprechen die Ergebnisse für die Polynomordnungen eins, zwei und drei in den Tabellen 2.1 bis 2.6. So liegt zum Beispiel die experimentelle Konvergenzordnung der Geschwindigkeit

in Tabelle 2.1 zwischen 1.94 und 2.21 und damit bei der zu erwartenden Ordnung 2. Die experimentelle Konvergenzordnung des Drucks in Tabelle 2.1 liegt mit 1.21 bis 1.36 sogar deutlich über der erwarteten Ordnung 1. Die überdurchschnittlich hohen Werte von eoc_p in den ersten Zeilen der Tabellen 2.4 bis 2.6 sind darauf zurück zu führen, dass die anfängliche Gitterweite bei der Verwendung von UGGrid mit 1 relativ groß im Vergleich zu 0.25 bei der Verwendung von AluConformGrid ist. Daher ist die Fehlerreduktion durch die ersten beiden Verfeinerungen in den Tabellen 2.4, 2.5 und 2.6 nicht repräsentativ.

Tabelle 2.1: Polynomordnungen (u_h, p_h, σ_h) : $(1, 1, 1)$, AluConformGrid<2, 2>

h	$ \mathcal{T}_h $	e_u	eoc_u	e_p	eoc_p
0.25	8	1.4891e-01	–	4.4142e-01	–
0.125	32	3.2208e-02	2.20897	1.7906e-01	1.30170
0.0625	128	7.6944e-03	2.06555	7.1015e-02	1.33424
0.03125	512	1.9790e-03	1.95901	2.7697e-02	1.35838
0.015625	2048	5.1528e-04	1.94135	1.1131e-02	1.31510
0.007812	8192	1.3273e-04	1.95682	4.7989e-03	1.21386

 Tabelle 2.2: Polynomordnungen (u_h, p_h, σ_h) : $(2, 2, 2)$, AluConformGrid<2, 2>

h	$ \mathcal{T}_h $	e_u	eoc_u	e_p	eoc_p
0.25	8	2.4364e-02	–	6.4405e-02	–
0.125	32	3.5815e-03	2.76609	1.7023e-02	1.91967
0.0625	128	4.9510e-04	2.85478	4.3761e-03	1.95976
0.03125	512	6.4653e-05	2.93693	1.0868e-03	2.00953
0.015625	2048	8.2427e-06	2.97152	2.7020e-04	2.00799
0.007812	8192	1.0399e-06	2.98666	6.7391e-05	2.00341

 Tabelle 2.3: Polynomordnungen (u_h, p_h, σ_h) : $(3, 3, 3)$, AluConformGrid<2, 2>

h	$ \mathcal{T}_h $	e_u	eoc_u	e_p	eoc_p
0.25	8	3.0593e-03	–	9.9531e-03	–
0.125	32	1.8241e-04	4.06789	1.6739e-03	2.57192
0.0625	128	1.1613e-05	3.97336	2.4645e-04	2.76382
0.03125	512	7.3075e-07	3.99027	3.2793e-05	2.90987
0.015625	2048	4.5786e-08	3.99638	4.2054e-06	2.96305
0.007812	8192	2.8673e-09	3.99714	5.3172e-07	2.98349

Tabelle 2.4: Polynomordnungen (u_h, p_h, σ_h) : $(1, 1, 1)$, UGGrid

h	$ \mathcal{T}_h $	e_u	eoc_u	e_p	eoc_p
1	4	2.48469e-01	–	8.33634e-01	–
0.5	16	7.3275e-02	1.76166	2.2179e-01	1.91017
0.25	64	1.4862e-02	2.30163	4.8216e-02	2.20163
0.125	256	3.1604e-03	2.23349	2.1136e-02	1.18981
0.0625	1024	7.5692e-04	2.06192	9.6326e-03	1.13372
0.03125	4096	1.9458e-04	1.95972	4.3002e-03	1.16351

 Tabelle 2.5: Polynomordnungen (u_h, p_h, σ_h) : $(2, 2, 2)$, UGGrid

h	$ \mathcal{T}_h $	e_u	eoc_u	e_p	eoc_p
1	4	4.0877e-02	–	0.0975286	–
0.5	16	5.5563e-03	2.87908	1.7444e-02	2.48303
0.25	64	6.0654e-04	3.19547	2.9120e-03	2.58269
0.125	256	5.7083e-05	3.40946	6.5282e-04	2.15728
0.0625	1024	5.1800e-06	3.46205	1.6656e-04	1.97057
0.03125	4096	4.7783e-07	3.43838	4.2416e-05	1.97342

 Tabelle 2.6: Polynomordnungen (u_h, p_h, σ_h) : $(3, 3, 3)$, UGGrid

h	$ \mathcal{T}_h $	e_u	eoc_u	e_p	eoc_p
1	4	5.2989e-03	–	1.6448e-02	–
0.5	16	3.0055e-04	4.13999	1.7025e-03	3.27222
0.25	64	1.7488e-05	4.10314	2.6929e-04	2.66038
0.125	256	9.0007e-07	4.28025	4.1198e-05	2.70855
0.0625	1024	4.6437e-08	4.27668	5.5149e-06	2.90118
0.03125	4096	2.5543e-09	4.18425	7.0336e-07	2.97099

3 Einphasenströmung in homogenen porösen Medien

In diesem Kapitel befassen wir uns mit der Strömung eines Fluids in einem homogenen porösen Medium und der Homogenisierung dieser Strömung. Ein homogenes poröses Medium ist ein Gebiet, in dem sich in periodischen Abständen Hindernisse befinden, durch die das Fluid nicht strömen kann. Die periodische Struktur des homogenen porösen Mediums ist von der Größe ε , wobei ε deutlich kleiner als die Größe des zu betrachtenden Gebietes ist. Unter einem porösen Medium können wir uns zum Beispiel den Erdboden oder auch das Innere einer Brennstoffzelle vorstellen.

Für jedes ε beschreiben die Stokes Gleichungen die Strömung eines Fluids in dem porösen Medium. Für kleine ε sind diese Gleichungen jedoch numerisch sehr aufwendig zu lösen, da man die feine Struktur von der Größe ε auflösen muss. Da man jedoch an der makroskopischen Strömung der Flüssigkeit durch das Gebiet und nicht so sehr an der mikroskopischen Strömung des Fluids auf der feinen Skala interessiert ist, untersucht man die Strömung des Fluids durch das periodische Medium formal für den Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$. Auf diese Weise erhält man eine Gleichung für die makroskopische Strömung des Fluids.

Anstelle der bloßen Mittelung auf der Mirkoskala oder der Betrachtung von Repräsentativen Volumen, bedient sich die Homogenisierung der Zwei-Skalen Konvergenz, um partielle Differentialgleichungen mit schnell oszillierenden Koeffizienten zu homogenisieren. Die Zwei-Skalen Konvergenz wurde von Nguetseng ([Ngu89]) und Allaire ([All92]) für periodische Probleme eingeführt und später für stochastische Probleme erweitert ([BMW94]). Neben anderen Arten der Konvergenz ist die Zwei-Skalen Konvergenz auf den periodischen Fall beschränkt, für diesen liefert sie jedoch detaillierte Aussagen über

die Form des Grenzwertes und der zu erwartenden Grenzgleichung.¹

Auf der Makroskala erhält man als homogenisierte Strömung eines Fluids durch ein homogenes poröses Medium das Darcy Gesetz. Dieses beschreibt das makroskopische Verhalten der Strömung in Abhängigkeit eines Permeabilitätstensors, in welchem die Informationen der Mikroskala kodiert sind. Schon 1856 beobachtete Darcy diese Gesetzmäßigkeit ([Dar56]), aber erst in den 1980er Jahren wurde dieses Gesetz von Keller und Tartar mathematisch fundiert ([Kel80], [Tar80]). Eine mathematische Begründung des Darcy Gesetzes mit Hilfe der asymptotischen Entwicklung lieferte Allaire 1989 ([All89]).

Dieses Kapitel ist wie folgt aufgebaut: Im ersten Abschnitt führen wir zuerst den Begriff des homogenen porösen Mediums ein und definieren die Strömung eines Fluids auf der feinen Skala (Definition 3.1.2).

Im zweiten Abschnitt führen wir den Begriff der Zwei-Skalen Konvergenz ein und motivieren die Homogenisierung der vollen Feinskalenströmung. Als Ergebnis dieser Homogenisierung erhalten wir das Zwei-Skalen homogenisierte Problem (Satz 3.2.7) mit Anteilen auf der Mikro- und auf der Makroskala.

Im dritten Abschnitt erhalten wir aus dem homogenisierten Problem durch Einführung des Einheitszellen Stokes Problems und durch Mittelung das Darcy Gesetz. Die periodische Struktur der feinen Skala geht über die gemittelten Lösungen des Einheitszellen Stokes Problems im sogenannten Permeabilitätstensor in das Darcy Gesetz ein (Satz 3.3.2). Für das Darcy Gesetz leiten wir eine elliptische Formulierung für den Druck des Fluids, sowie eine Formel für die Geschwindigkeit des Fluids her.

Im vierten Abschnitt gehen wir auf die Problematik der periodischen Randwerte der Lösungen des Einheitszellen Stokes Problems ein und definieren eine geeignete Approximation dieser Lösungen und des Permeabilitätstensors. Außerdem gehen wir auf die Implementierung des elliptischen Darcy Problems in COMSOL ein.

Im fünften Abschnitt präsentieren wir numerische Experimente, in denen wir eine Approximation des Permeabilitätstensors für ein sandiges Medium und die Lösung des Darcy Problems vorstellen. Wir zeigen, dass wir mit einer einfachen Lösung des elliptischen Darcy Problems auf der Makroskala vergleichbare Ergebnisse zur Lösung des

¹In diesem Zusammenhang sind zum Beispiel Γ -Konvergenz von Giorgi und Buttazzo ([dG75], [But89]), G -Konvergenz für symmetrische elliptische Operatoren zweiter Ordnung von Spagnolo ([Spa68]) und H -Konvergenz, einer Erweiterung der G -Konvergenz auf nicht symmetrische Operatoren zweiter Ordnung, von Murat und Tartar ([MT77]) zu nennen.

vollen Feinskalenproblems auf der Mirkoskala erhalten.

3.1 Einphasenströmung in periodischen porösen Medien

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff des homogenen porösen Mediums ein und definieren, was wir unter der Strömung eines Fluids in solch einem Medium verstehen. Unter einem porösen Medium verstehen wir ein Gebiet, in dem sich Hindernisse befinden, die nicht durchströmt werden können. Im Unterschied zu heterogenen porösen Medien sind die Hindernisse in einem homogenen porösen Medium periodisch angeordnet. Unter einem porösen Medium können wir uns zum Beispiel den Erdboden oder das Innere einer Brennstoffzelle vorstellen.

Definition 3.1.1 (Homogenes Poröses Medium)

Sei die periodische Zelle, oder Einheitszelle, $Y := (0, 1]^d \subset \mathbb{R}^d$ (für $d = 2, 3$) in einen undurchlässigen Teil $Y_s \subset\subset Y$ und einen Teil $Y_f \subset Y$, der durchströmt werden kann, unterteilt, so dass $Y_s \cap Y_f = \emptyset$ und $Y_s \cup Y_f = Y$ gilt (siehe Abbildung 3.1). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

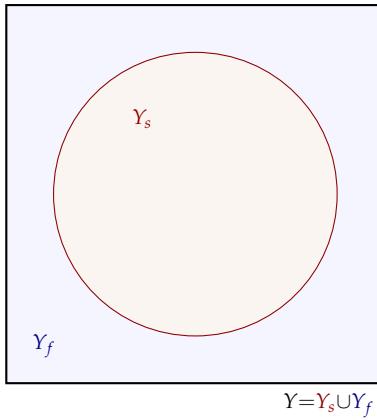


Abbildung 3.1: Die Einheitszelle Y

ein beschränktes, zusammenhängendes Gebiet mit glattem Rand, welches mit einem regelmäßigen Gitter der Größe ε überzogen ist. Durch dieses Gitter sei das Gebiet Ω in $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ Zellen unterteilt, $\Omega = \bigcup_{n \in N(\varepsilon)} Y_n^\varepsilon$. Jede dieser Zellen sei, wie die Einheitszelle Y , in einen undurchlässigen Teil und einen solchen Teil unterteilt, der durchströmt werden kann, $Y_n^\varepsilon = Y_{s,n}^\varepsilon \cup Y_{f,n}^\varepsilon$. Jede Zelle Y_n^ε ist also affin ähnlich zur Einheitszelle Y und geht durch eine

lineare Transformation aus ihr hervor. Das Gebiet Ω sei so gewählt, dass sein Rand nicht in einem undurchlässigen Teil einer skalierten Einheitszelle liegt, also

$$\partial\Omega \cap \bigcup_{n \in N(\varepsilon)} \partial Y_{s_n}^\varepsilon = \emptyset$$

gilt. Dann ist das poröse Medium als das durchströmmbare Gebiet Ω^ε , welches durch Vereinigung der durchströmmbaren Teile der skalierten Einheitszellen hervorgeht, definiert, also als

$$\Omega^\varepsilon := \Omega \setminus \bigcup_{n \in N(\varepsilon)} Y_{s_n}^\varepsilon = \Omega \cap \bigcup_{n \in N(\varepsilon)} Y_{f_n}^\varepsilon.$$

Der Rand des porösen Mediums zerfällt in einen inneren und einen äußeren Rand, $\partial\Omega^\varepsilon = \Gamma_{in}^\varepsilon \cup \Gamma_{out}$. Der innere Rand des porösen Mediums ist definiert durch $\Gamma_{in}^\varepsilon := \bigcup_{n \in N(\varepsilon)} \partial Y_{s_n}^\varepsilon$ und damit abhängig von ε . Der äußere Rand des porösen Mediums ist definiert als der Rand von Ω , $\Gamma_{out} := \partial\Omega$, und damit unabhängig von ε (für ein Beispiel eines porösen Mediums in \mathbb{R}^2 siehe Abbildung 3.2).

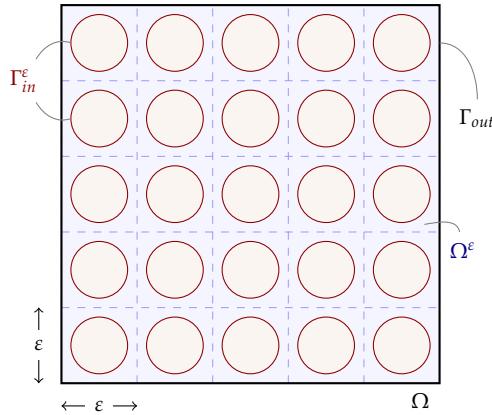


Abbildung 3.2: Ein homogenes poröses Medium Ω^ε in \mathbb{R}^2

Wie auch in nicht porösen Medien wird das Equilibrium der Strömung eines Fluids in einem porösen Medium durch die stationären Stokes Gleichungen beschrieben.

Definition 3.1.2 (Einphasenströmung in porösen Medien)

Sei, mit der Notation aus Definition 3.1.1, Ω^ε ein homogenes poröses Medium und sei eine rechte Seite $f : \Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^d$ gegeben. Dann wird die Strömung eines Fluids mit Viskosität $\mu \in \mathbb{R}^{>0}$ in einem homogenen porösen Medium durch die Geschwindigkeit $u^\varepsilon : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ des Fluids und den Druck $p^\varepsilon : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, der auf das Fluid wirkt, beschrieben, welche die stationären Stokes Gleichungen

$$\begin{aligned}\nabla p^\varepsilon - \varepsilon^2 \mu \Delta u^\varepsilon &= f && \text{in } \Omega^\varepsilon, \\ \nabla \cdot u^\varepsilon &= 0 && \text{in } \Omega^\varepsilon, \\ u^\varepsilon &= 0 && \text{auf } \partial\Omega^\varepsilon = \Gamma_{in}^\varepsilon \cup \Gamma_{out},\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

lösen.

Bemerkung 3.1.3 (Skalierung der Viskosität)

Die Skalierung der Viskosität in (3.1.1) ist mit $\varepsilon^2 \mu$ so gewählt, dass die Geschwindigkeit u^ε einen nichttrivialen Grenzwert für $\varepsilon \rightarrow 0$ besitzt.

Bemerkung 3.1.4 (Existenz und Eindeutigkeit von schwachen Lösungen)

Sei $f \in L^2(\Omega^\varepsilon)^d$. Dann existiert für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$ eine eindeutige schwache Lösung $(u^\varepsilon, p^\varepsilon) \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)^d \times L^2(\Omega^\varepsilon)/\mathbb{R}$ der stationären Stokes Gleichungen (3.1.1) (siehe Satz 2.1.13).

3.2 Zwei-Skalen Konvergenz und Homogenisierung

In diesem Abschnitt untersuchen wir die durch (3.1.1) definierte Strömung für den Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$. Dabei untersuchen wir die Existenz geeigneter Grenzwerte der Folgen $(u^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ und $(p^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ und die Differentialgleichung, die diese Grenzwerte erfüllen, falls sie existieren. Dazu benötigen wir den Begriff der Υ -periodischen Funktionen und den Begriff der Zwei-Skalen Konvergenz.

Definition 3.2.1 (Funktionenräume)

Sei $Y = (0, 1]^d \subset \mathbb{R}^d$ die Einheitszelle und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet in \mathbb{R}^d . Dann sind die Räume der Y -periodischen Funktionen, $C_{\#}^{\infty}(Y)$ und $H_{\#}^1(Y)$, durch

$$\begin{aligned} C_{\#}^{\infty}(Y) &:= \left\{ \varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d) \mid y \mapsto \varphi(y) \text{ } Y\text{-periodisch} \right\} && \text{und} \\ H_{\#}^1(Y) &:= \left\{ \varphi \in H^1(\mathbb{R}^d) \mid y \mapsto \varphi(y) \text{ } Y\text{-periodisch} \right\} \end{aligned}$$

und die Bochnerräume $\mathcal{D}(\Omega; C_{\#}^{\infty}(Y))$ und $L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y))$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\left(\Omega; C_{\#}^{\infty}(Y)\right) &:= \left\{ \varphi : \Omega \rightarrow C_{\#}^{\infty}(Y) \text{ messbar} \mid x \mapsto \|\varphi(x, \cdot)\|_{C_{\#}^{\infty}(Y)} \in \mathcal{D}(\Omega) \right\} && \text{und} \\ L^2\left(\Omega; H_{\#}^1(Y)\right) &:= \left\{ \varphi : \Omega \rightarrow H_{\#}^1(Y) \text{ messbar} \mid x \mapsto \|\varphi(x, \cdot)\|_{H_{\#}^1(Y)} \in L^2(\Omega) \right\} \end{aligned}$$

definiert.

Definition 3.2.2 (Zwei-Skalen Konvergenz) [Hor97, Definition A.3.1]

Sei eine Folge von Funktionen $(u^{\varepsilon})_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ in $L^2(\Omega)$ und eine Funktion $u_0(x, y)$ in $L^2(\Omega \times Y)$ gegeben. Dann konvergiert die Folge $(u^{\varepsilon})_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ im Zwei-Skalen Sinne genau dann gegen u_0 , wenn

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^{\varepsilon}(x) \varphi(x, \frac{y}{\varepsilon}) dx = \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \varphi(x, y) dy dx$$

für alle $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\Omega, C_{\#}^{\infty}(Y))$ gilt.

Bei der Zwei-Skalen Konvergenz handelt es sich um eine schwache Konvergenz, wobei wir uns vorstellen können, dass durch die periodischen Testfunktionen die Oszillationen der Folge „herausgefiltert“ werden, wodurch der Zwei-Skalen Grenzwert seine Form erhält. Der Begriff der Zwei-Skalen Konvergenz ist stärker als der Begriff der schwachen Konvergenz, jedoch schwächer als der der starken Konvergenz.

Bemerkung 3.2.3 (Zwei-Skalen Konvergenz) [Hor97, Seite 239-240]

- (i) Jede Folge von Funktionen $(u^{\varepsilon})_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$, die stark in $L^2(\Omega)$ gegen einen Grenzwert konvergiert, konvergiert im Zwei-Skalen Sinne gegen denselben Grenzwert.
- (ii) Für jede glatte Funktion $u_0(x, y)$, welche Y -periodisch in y ist, konvergiert die zugehörige Folge $u^{\varepsilon}(x) := u_0(x, \frac{y}{\varepsilon})$ im Zwei-Skalen Sinne gegen $u_0(x, y)$.

(iii) Jede Folge von Funktionen $(u^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$, für die eine asymptotische Entwicklung der Form

$$u^\varepsilon(x) = u_0(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon u_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 u_2(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \dots$$

mit Funktionen $u_i(x, y)$, die Y -periodisch in y sind, existiert, konvergiert im Zwei-Skalen Sinne gegen den ersten Term dieser asymptotischen Entwicklung, also $u_0(x, y)$.

Wir können dann die Existenz eines Zwei-Skalen Grenzwertes erwarten, wenn die Folge von Funktionen in einem geeigneten Funktionenraum beschränkt ist. Von diesem Funktionenraum hängt auch die Form des Grenzwertes ab.

Satz 3.2.4 (Existenz eines Zwei-Skalen Grenzwertes) [Hor97, Theorem A.3.2 und Theorem A.3.6]

- (i) Sei $(p^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ eine beschränkte Folge von Funktionen in $L^2(\Omega)$. Dann existiert ein Grenzwert $p_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$, sodass eine Teilfolge von $(p^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ im Zwei-Skalen Sinne gegen $p_0(x, y)$ konvergiert.
- (ii) Sei $(u^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ eine beschränkte Folge von Funktionen in $L^2(\Omega)$, sodass auch $(\varepsilon \nabla u^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ in $L^2(\Omega)$ beschränkt ist. Dann existiert ein Grenzwert $u_1(x, y) \in L^2(\Omega; H_\#^1(Y)/\mathbb{R})$, sodass eine Teilfolge von $(u^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ im Zwei-Skalen Sinne gegen $u_1(x, y)$ und $(\varepsilon \nabla u^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ gegen $\nabla_y u_1(x, y)$ konvergiert.²

Damit wir die Zwei-Skalen Konvergenz auf eine Folge von Lösungen $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ von (3.1.1) anwenden können, müssen alle Funktionen der Folge in einem von ε unabhängigen Funktionenraum liegen. Um dies zu erreichen, erweitern wir die Geschwindigkeit und den Druck, die im porösen Medium Ω^ε definiert sind, auf ganz Ω .

Lemma 3.2.5 (Existenz einer Erweiterung) [Hor97, Lemma 3.1.3]

Sei, mit der Notation und den Voraussetzungen aus Definition 3.1.1, Ω^ε ein homogenes poröses Medium und $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ die eindeutige schwache Lösung von (3.1.1). Sei die Erweiterung der Geschwindigkeit, $\tilde{u}^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)^d$, durch

$$\tilde{u}^\varepsilon(x) := \begin{cases} u^\varepsilon(x) & , x \in \Omega^\varepsilon, \\ 0 & , x \in \Omega \setminus \Omega^\varepsilon \end{cases}$$

²Wir bezeichnen den Grenzwert der Geschwindigkeit mit u_1 , und nicht mit u_0 , da er dem zweiten Term der asymptotischen Entwicklung von u^ε entspricht. Diese Tatsache ist der Skalierung der Viskosität geschuldet (siehe Bemerkung 3.1.3).

und die Erweiterung des Drucks, $\tilde{p}^\varepsilon \in L^2(\Omega)^d$, durch

$$\tilde{p}^\varepsilon(x) := \begin{cases} p^\varepsilon(x) & , x \in \Omega^\varepsilon, \\ \frac{1}{|Y_{f_n}^\varepsilon|} \int_{Y_{f_n}^\varepsilon} p^\varepsilon(y) dy & , \text{für alle } n \in N(\varepsilon) \end{cases}$$

gegeben. Dann existiert eine von ε unabhängige Konstante $C \in \mathbb{R}^{>0}$, sodass die a-priori Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^d} + \varepsilon \|\nabla \tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} &\leq C && \text{und} \\ \|\tilde{p}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} &\leq C \end{aligned}$$

für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$ gelten.

Beweis: Siehe [Hor97, Abschnitt 3.1.3]. □

Im Folgenden stellen wir die wesentlichen Ideen vor, um aus dem vollen Feinskalen Problem (3.1.1) ein Zwei-Skalen Problem zu erhalten, welches von den Grenzwerten der Erweiterungen erfüllt wird.

Motivation 3.2.6 (Homogenisierung) [Hor97, Abschnitt 3.1.2]

Um die stationären Stokes Gleichungen (3.1.1) zu homogenisieren, zeigen wir zuerst die Existenz und die Form eines Zwei-Skalen Grenzwertes. Daraufhin untersuchen wir die Variationsformulierung, die dieser Grenzwert erfüllt, um die Zwei-Skalen homogenisierte Formulierung von (3.1.1) zu erhalten.

(i) **Existenz und Eigenschaften des Zwei-Skalen Grenzwertes:** Wegen Lemma 3.2.5 wissen wir nach Satz 3.2.4, dass ein Zwei-Skalen Grenzwert $u_1(x, y) \in L^2(\Omega; H_\#^1(Y)^d)$ existiert, sodass die Folge $(\tilde{u}^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ im Zwei-Skalen Sinne gegen $u_1(x, y)$ und $(\varepsilon \nabla \tilde{u}^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ im Zwei-Skalen Sinne gegen $\nabla_y u_1(x, y)$ konvergiert und der Grenzwert die Bedingungen

$$\begin{aligned} \nabla_y \cdot u_1(x, y) &= 0 && \text{in } \Omega \times Y, \\ u_1(x, y) &= 0 && \text{in } \Omega \times Y_s, \\ \nabla_x \cdot \left(\int_{\Omega} u_1(x, y) dy \right) &= 0 && \text{in } \Omega \quad \text{und} \\ u_1(x, y) \cdot n_{\Omega} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

erfüllt.

Analog wissen wir, dass ein Zwei-Skalen Grenzwert $p_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$ existiert, sodass die Folge $(\tilde{p}^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ im Zwei-Skalen Sinne gegen $p_0(x, y)$ konvergiert. Außerdem kann man zeigen, dass dieser Grenzwert nicht von y abhängt, die Folge $(\tilde{p}^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ also im Zwei-Skalen Sinne gegen $p_0(x) \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ konvergiert.

- (ii) **Die Variationsformulierung für den Grenzwert:** In einem zweiten Schritt testen wir Gleichung (3.1.1) mit Testfunktionen $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}_\#^\infty(Y))$, die von derselben Form wie der Grenzwert u_1 sind (siehe oben) und integrieren über das periodische Gebiet Ω^ε . Aus der ersten Gleichung in (3.1.1) erhalten wir so nach partieller Integration

$$-\int_{\Omega^\varepsilon} p^\varepsilon(x) \nabla_x \cdot \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx + \mu \int_{\Omega^\varepsilon} \varepsilon \nabla u^\varepsilon(x) \cdot \nabla_y \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = \int_{\Omega^\varepsilon} f(x) \cdot \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

für alle $\varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}) \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)^d$. Hier können wir das Integrationsgebiet durch Ω ersetzen, da die Testfunktionen auf $\Omega \times Y_s$ verschwinden. Beim Übergang zum Zwei-Skalen Grenzwert fällt der erste Term in obiger Gleichung weg, da p_0 nicht von y abhängt und wir die Testfunktionen divergenzfrei gewählt haben. Aus den restlichen Termen erhalten wir

$$\mu \int_{\Omega} \int_Y \nabla_y u_1(x, y) \cdot \nabla_y \varphi(x, y) dy dx = \int_{\Omega} \int_Y f(x) \cdot \varphi(x, y) dy dx$$

für alle $\varphi \in V$ mit

$$V = \left\{ \varphi(x, y) \in L^2(\Omega; H_\#^1(Y)) \mid \begin{array}{l} \nabla_y \cdot \varphi(x, y) = 0 \quad \text{in } \Omega \times Y, \\ \varphi(x, y) = 0 \quad \text{in } \Omega \times Y_s, \\ \nabla_x \cdot \left(\int_Y \varphi(x, y) dy \right) = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \left(\int_Y \varphi(x, y) dy \right) \cdot n_\Omega = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{array} \right\}.$$

Aus der Theorie zur Lösung der Stationären Stokes Gleichungen wissen wir, dass, aufgrund der Divergenzfreiheit der Funktionen aus V , zu obiger Variationsformulierung ein Lagrangemultiplikator mit Funktionen aus dem orthogonalen Komplement von V

existiert.³ Mit diesem Lagrangemultiplikator lässt sich obige Variationsformulierung als

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \int_Y \left(\nabla_x p_0(x) + \nabla_y p_1(x, y) \right) \cdot \varphi(x, y) \, dy \, dx \\ & + \mu \int_{\Omega} \int_Y \nabla_y u_1(x, y) \cdot \nabla_y \varphi(x, y) \, dy \, dx = \int_{\Omega} \int_Y f(x) \cdot \varphi(x, y) \, dy \, dx \end{aligned}$$

für alle $\varphi \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y))$ schreiben. Zusammen mit den Eigenschaften der Testfunktionen erhalten wir daraus das Zwei-Skalen homogenisierte System in folgendem Satz.

Satz 3.2.7 (Das Zwei-Skalen homogenisierte Problem) [Hor97, Theorem 3.1.4]

Sei, mit der Notation und den Voraussetzungen aus Definition 3.1.1, $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ die eindeutige schwache Lösung von (3.1.1) in Ω^ε und $(\tilde{u}^\varepsilon, \tilde{p}^\varepsilon)$ ihre, durch Lemma 3.2.5 definierte, Erweiterung auf Ω . Dann existieren Funktionen $p_0 \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$, $p_1 \in L^2(\Omega \times Y)$ und $u_1 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)^d)$, sodass $(\tilde{u}^\varepsilon, \tilde{p}^\varepsilon)$ im Zwei-Skalen Sinne gegen (u_1, p_0) konvergiert und (u_1, p_0) die eindeutige schwache Lösung des Zwei-Skalen homogenisierten Problems, oder auch Stokes Problems mit zwei Drücken,

$$\begin{aligned} \nabla_x p_0(x) + \nabla_y p_1(x, y) - \mu \Delta_{yy} u_1(x, y) &= f(x) && \text{in } \Omega \times Y, \\ \nabla_y \cdot u_1(x, y) &= 0 && \text{in } \Omega \times Y, \\ u_1(x, y) &= 0 && \text{in } \Omega \times Y_s, \\ y \mapsto u_1(x, y), p_1(x, y) & \quad \text{Y-periodisch,} && (3.2.3) \\ \nabla_x \cdot \left(\int_Y u_1(x, y) \, dy \right) &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \left(\int_Y u_1(x, y) \, dy \right) \cdot n_{\Omega} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

ist.

Beweis: Siehe [Hor97, Beweis von Theorem 3.1.4, Seite 48] für einen Beweis und Motivation 3.2.6 für eine Zusammenfassung des Beweises. \square

³Siehe zum Beispiel [Tem77, Theorem I.2.2] für die Existenz des Lagrangemultiplikators und [Hor97, Lemma 3.1.5] für seine Form.

3.3 Das Darcy Gesetz

Um aus dem Zwei-Skalen homogenisierten Problem (3.2.3) das Darcy Gesetz zu erhalten, müssen wir zuerst die Mikro- und die Makroskala entkoppeln. Dies erreichen wir dadurch, dass wir sogenannte lokale, oder Einheitszellen, Stokes Probleme einführen und aus diesen und u_1 eine makroskopische Geschwindigkeit durch Mittelung erhalten.

Motivation 3.3.1 (Das Darcy Gesetz) [Hor97, Seiten 47 und 50]

- (i) **Das Einheitszellen Stokes Problem:** Mit der Notation und den Voraussetzungen aus Definition 3.1.1 sind die lokalen Geschwindigkeiten $\omega_i : Y \mapsto \mathbb{R}^d$ und die lokalen Drücke $\pi_i : Y \mapsto \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq d$ als die Lösung des lokalen, oder Einheitszellen, Stokes Problems

$$\begin{aligned} \nabla \pi_i - \Delta \omega_i &= e_i && \text{in } Y_f, \\ \nabla \cdot \omega_i &= 0 && \text{in } Y_f, \\ \omega_i &= 0 && \text{in } Y_s, \\ y \mapsto \pi_i(y), \omega_i(y) & && \text{Y-periodisch,} \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

definiert. Dabei bezeichnet $e_i \in \mathbb{R}^d$ für $1 \leq i \leq d$ den i -ten Einheitsvektor in \mathbb{R}^d .

- (ii) **Die makroskopische Geschwindigkeit:** Mit den Lösungen des Mikroproblems können wir die Geschwindigkeit des Zwei-Skalen homogenisierten Problems (3.2.3) als

$$u_1(x, y) = \frac{1}{\mu} \sum_1^d \left(f_i(x) - \frac{\partial p_0}{\partial x_i}(x) \right) \omega_i(y)$$

schreiben. Definieren wir die makroskopische Geschwindigkeit $u(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ durch $u(x) := \int_Y u_1(x, y) dy$, so erhalten wir aus obiger Gleichheit

$$u(x) = \frac{1}{\mu} A \left(f(x) - \nabla p_0(x) \right)$$

für die makroskopische Geschwindigkeit mit dem Permeabilitätstensor $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, der durch

$$(A)_{ij} := \int_{Y_s} \nabla \omega_i(y) \cdot \nabla \omega_j(y) dy \tag{3.3.2}$$

gegeben ist.

Zusammen mit der Divergenzfreiheit der Geschwindigkeit aus (3.2.3) erhalten wir damit das Darcy Gesetz.

Satz 3.3.2 (Das Darcy Gesetz) [Hor97, Theorem 3.1.1]

Sei, mit der Notation und den Voraussetzungen aus Satz 3.2.7, der Permeabilitätstensor $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ durch (3.3.2) gegeben. Dann existieren Funktionen $(u, p) \in L^2(\Omega)^d \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$, sodass die Erweiterung der Geschwindigkeit, \tilde{u}^ε , schwach gegen u und die Erweiterung des Drucks, \tilde{p}^ε , stark gegen p konvergiert, wobei (u, p) die eindeutige schwache Lösung des Darcy Gesetzes,

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\mu} A \left(f(x) - \nabla p(x) \right) && \text{in } \Omega, \\ \nabla \cdot u(x) &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u(x) \cdot n_\Omega &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

ist.

Beweis: Siehe [Hor97, Beweis von Theorem 3.1.1, Seite 50] für einen Beweis und Motivation 3.3.1 für eine Zusammenfassung des Beweises. \square

Um das Darcy Problem (3.3.3) lösen zu können, müssen wir es in ein elliptisches Problem umformulieren. Dazu setzen wir die erste Gleichung aus (3.3.3) in die zweite Gleichung ein und erhalten

$$-\nabla \cdot (A \nabla p) = -\nabla \cdot (Af) \quad \text{in } \Omega. \tag{3.3.4a}$$

Um eine Randbedingung für diese elliptische Gleichung zu erhalten, setzen wir die erste Gleichung aus (3.3.3) in die dritte Gleichung ein und erhalten

$$(A \nabla p) \cdot n_\Omega = (Af) \cdot n_\Omega \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{3.3.4b}$$

Motiviert durch (3.3.4) definieren wir

$$\mathcal{A}(x) := A, \tag{3.3.5a}$$

$$\mathcal{F}(x) := -\nabla \cdot (Af(x)) \quad \text{und} \tag{3.3.5b}$$

$$\mathcal{G}(x) := Af(x) \tag{3.3.5c}$$

und haben damit das folgende Korollar bewiesen.

Korollar 3.3.3 (Elliptische Formulierung des Darcy Gesetzes)

Seien, mit der Notation und den Voraussetzungen aus Satz 3.3.2, \mathcal{A} , \mathcal{F} und \mathcal{G} durch (3.3.5) gegeben. Dann ist (u, p) genau dann die eindeutige schwache Lösung des Darcy Gesetzes (3.3.3), wenn $p \in L^2(\Omega)$ die eindeutige schwache Lösung des elliptischen Problems

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\mathcal{A}(x) \nabla p(x)) &= \mathcal{F}(x) && \text{in } \Omega, \\ (\mathcal{A}(x) \nabla p(x)) \cdot n_\Omega &= \mathcal{G}(x) \cdot n_\Omega && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

und $u \in L^2(\Omega)^d$ durch $u = \frac{1}{\mu} A(f - \nabla p)$ gegeben ist. \square

3.4 Die Implementierung in DUNE und COMSOL

In diesem Abschnitt setzen wir die Überlegungen des vorangegangenen Abschnitts um. Dabei unterscheiden wir zwei Aufgabenstellungen. In Abschnitt 3.4.1 befassen wir uns mit der Lösung der Einheitszellen Stokes Probleme, um mit Hilfe dieser mikroskopischen Lösungen den Permeabilitätstensor A bestimmen zu können. In diesem Permeabilitätstensor ist die Information über die Geometrie der Mikroskala kodiert. Dazu können wir auf die in Abschnitt 2.4 vorgestellte Implementierung in DUNE zurückgreifen.

In Abschnitt 3.4.2 gehen wir auf die Lösung des elliptischen Darcy Problems unter Verwendung dieses Permeabilitätstensors ein, um eine Approximation des makroskopischen Verhaltens des Fluids zu erhalten. Die Implementierung des Darcy Problems haben wir mit COMSOL realisiert. Dabei beschränken wir uns in diesem Abschnitt auf zwei Raumdimensionen. Die nachfolgenden Überlegungen lassen sich jedoch problemlos auf drei Raumdimensionen erweitern.

3.4.1 Die Approximation des Permeabilitätstensors

Um den Permeabilitätstensor A nach der Vorschrift

$$(A)_{ij} := \int_{Y_s} \nabla \omega_i(y) \cdot \nabla \omega_j(y) dy$$

berechnen zu können, benötigen wir die mikroskopischen Lösungen ω_i für jede Raumrichtung. Die mikroskopischen Lösungen sollen Y -periodisch sein (siehe (3.3.1)), weswegen wir bei der Lösung des Einheitszellen Stokes Problems periodische Randwerte

von π_i und ω_i auf ∂Y fordern. Eine Implementierung von periodischen Randwerten ist jedoch nicht ohne weiteres möglich.

Bemerkung 3.4.1 (Periodische Randwerte)

Zur Realisierung von periodischen Randwerten ist man bei der Verwendung von DUNE auf ein periodisches Gitter angewiesen. Zu diesem Zweck stellt DUNE eine periodische Triangulierung durch die Klasse `Dune::PeriodicLeafGridPart` in `dune-fem` bereit. Mit den für diese Implementierung verwendeten DUNE-Modulen⁴ ist es uns jedoch nicht möglich, den inneren Rand ∂Y_s ohne Periodizität und den äußeren Rand ∂Y mit Periodizität korrekt zu identifizieren. Ziel zukünftiger Arbeit ist es daher, die in Abschnitt 2.4 vorgestellte Implementierung mit aktuellen Veröffentlichungen von DUNE kompatibel zu machen, da es in der neueren Entwicklung von DUNE Verbesserungen des Konzepts einer periodischen Triangulierung gibt.

Um die in Bemerkung 3.4.1 genannte Problematik zu umgehen, lösen wir das Einheitszellen Stokes Problem nicht auf Y , sondern auf einer periodischen Erweiterung Y' von Y in jeder Raumrichtung, $Y \subset Y' \subset \mathbb{R}^2$ (siehe Abbildung 3.3). Durch die Periodizität der Geometrie von Y' können wir erwarten, dass sich auch die lokalen Geschwindigkeiten in Y periodisch verhalten.

Definition 3.4.2 (Erweitertes Einheitszellen Stokes Problem)

Sei die erweiterte Einheitszelle Y' wie in Abbildung 3.3 gegeben. Wir bezeichnen den un-durchlässigen Teil von Y' mit Y'_s und den Teil von Y' , der durchströmt werden kann, mit Y'_f (analog zu Definition 3.1.1). Außerdem bezeichnen wir jeweils den Teil des äußeren Randes von Y' , der orthogonal zu einem der Eigenvektoren $e_i \in \mathbb{R}^2$ ist, mit Γ'_i (siehe Abbildung 3.3). Dann ist das erweiterte Einheitszellen Stokes Problem durch

$$\begin{aligned} \nabla \pi'_i - \Delta \omega'_i &= e_i && \text{in } Y'_f, \\ \nabla \cdot \omega'_i &= 0 && \text{in } Y'_f, \\ \omega'_i &= 0 && \text{auf } \partial Y'_s \cup (\partial Y' \setminus \Gamma'_i), \\ \omega'_i &= e_i && \text{auf } \Gamma'_i \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

⁴Dieser Implementierung liegen DUNE-Module der folgenden Versionen zugrunde:

```
svn co https://svn.dune-project.org/svn/dune-common/releases/1.1/ -r 5224
svn co https://svn.dune-project.org/svn/dune-grid/releases/1.1/ -r 4203
svn co https://dune.mathematik.uni-freiburg.de/svn/dune-fem/trunk/ -r 3821
```

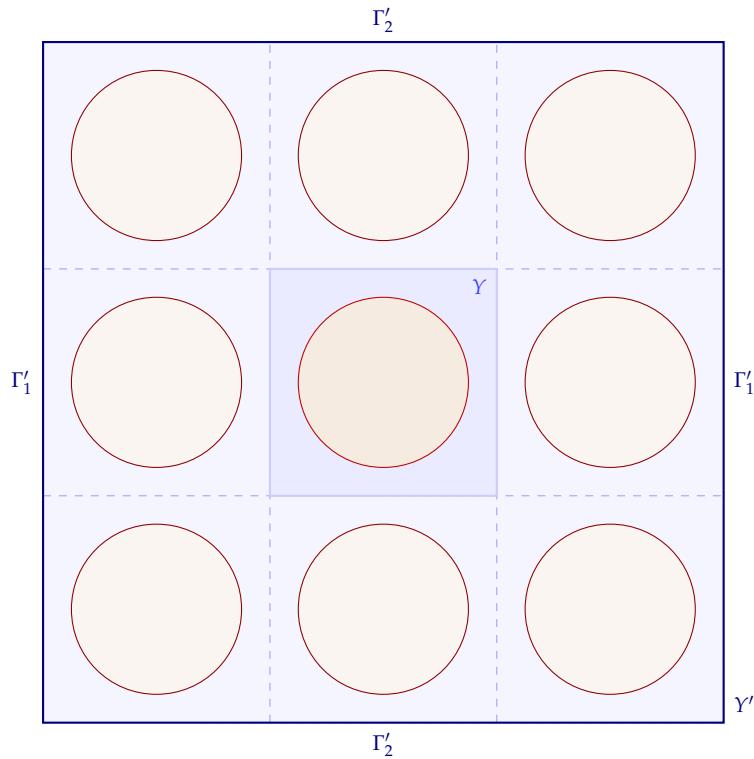


Abbildung 3.3: Die erweiterte Einheitszelle $Y' := [-1, 2]^2 \subset \mathbb{R}^2$ und ihr Rand $\partial Y' = \Gamma'_1 \cup \Gamma'_2$

für $1 \leq i \leq 2$ gegeben. Mit den Lösungen des erweiterten Einheitszellen Stokes Problems, ω'_i , definieren die Approximationen der lokalen Geschwindigkeiten wie folgt durch die Einschränkung von ω'_i auf Y :

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_i &: Y \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \tilde{\omega}_i &:= \omega'_i|_Y.\end{aligned}$$

Mit $\tilde{\omega}_i$ verfügen wir über Approximationen der Lösungen des lokalen Einheitszellen Stokes Problems (3.3.1). Mit ihnen können wir eine Approximation des Permeabilitätstensors A definieren.

Definition 3.4.3 (Approximation des Permeabilitätstensors)

Seien, mit der Notation und den Voraussetzungen aus Definition 3.4.2, die Approximationen der lokalen Geschwindigkeiten, $\tilde{\omega}_i$, für jede Raumrichtung gegeben. Dann ist die

Approximation des Permeabilitätstensors, $\tilde{A} \in \mathbb{R}^2$, durch

$$(\tilde{A})_{ij} := \int_{Y_s} \nabla \tilde{\omega}_i(y) \cdot \nabla \tilde{\omega}_j(y) dy \quad (3.4.2)$$

definiert.

Um die Approximation des Permeabilitätstensors, \tilde{A} , experimentell zu bestimmen, können wir auf die in Abschnitt 2.4 vorgestellte Implementierung zurückgreifen, sofern wir eine Realisierung der Geometrie von Y' bereitstellen können.

Bemerkung 3.4.4 (Realisierung eines homogenen porösen Mediums $\Omega^\epsilon \subset \mathbb{R}^2$)

Zur Realisierung eines rechteckigen homogenen porösen Mediums $\Omega^\epsilon \subset \mathbb{R}^2$ stellen wir das python Skript `dune-stokes/darcy/generateHomogeneousPerforatedDomain.py` bereit. Durch Definition, beziehungsweise Anpassung, der folgenden Parameter ist es möglich, auf die Geometrie des Gebietes einfluss zu nehmen.

porosity:

Porösität des homogenen porösen Mediums, worunter wir den Anteil des Porenraums am Gesamtvolumen verstehen ($\frac{|\Omega^\epsilon|}{|\Omega|}$)

domainlength_x, domainlength_y:

Maße von $\Omega^\epsilon \subset \mathbb{R}^2$

standard_cell_size_x, standard_cell_size_y:

Maße der periodischen Einheitszelle $Y \subset \mathbb{R}^2$

number_of_cells_x, number_of_cells_y:

Anzahl der skalierten Einheitszellen in x- und y-Richtung

number_of_points_per_quarter:

Anzahl der Punkte, die benutzt werden, um einen Viertelkreis eines Hindernisses zu approximieren

do_shift, shift_x, shift_y:

Ob, und, wenn ja, um welchen Wert, Ω^ϵ verschoben werden soll

Nach Definition dieser Parameter und Ausführung des Skriptes erhalten wir eine .poly Datei, in der die Geometrie von Ω^ϵ in einem triangle-kompatiblem Format vorliegt (dies schließt insbesondere mit ein, dass die Randkanten der resultierenden

den Triangulierung eine eindeutige ID aufweisen, mit deren Hilfe die Randwerte korrekt implementiert werden können, siehe Abbildung 3.4). Außerdem stellen wir mit `dune-stokes/darcy/triangle2dgf.py` ein python Skript bereit, um aus den Dateien, die `triangle` generiert, eine `.dgf` Datei zu erstellen, die `dune-grid` interpretieren kann.⁵

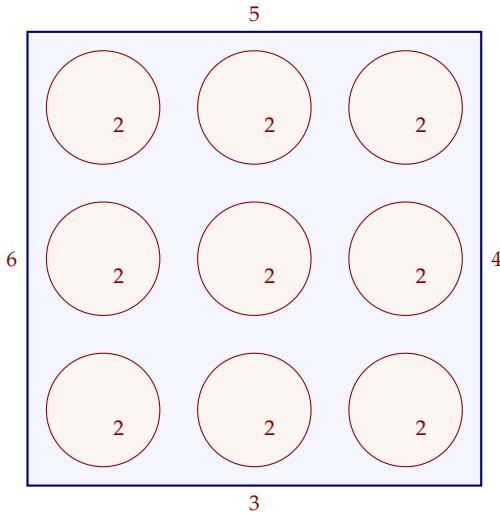


Abbildung 3.4: Verteilung der eindeutigen Rand-**Ids**

Zusammen mit der in Abschnitt 2.4 vorgestellten Implementierung sind wir somit in der Lage, die lokalen Geschwindigkeiten zu berechnen, und den Permeabilitätstensor für gegebene Porositäten bereit zu stellen.

3.4.2 Die Lösung des elliptischen Darcy Problems

Zur Lösung des elliptischen Darcy Problems (3.3.6) greifen wir auf die Software COMSOL zurück. Ziel zukünftiger Arbeit ist es, auch das elliptische Darcy Problem mit Hilfe von DUNE zu lösen.

⁵Theoretisch ist es in DUNE vorgesehen, `dune-grid` über eine `.dgf` Datei eine `.poly` Datei mit der Anweisung zu übergeben, diese mit `triangle` umwandeln zu lassen. In der Praxis sind bei der von uns verwendeten Version von `dune-grid` in dem daraus resultierenden Gitter jedoch keine unterschiedlichen Rand-Ids mehr vorhanden.

Bemerkung 3.4.5 (Realisierung in COMSOL)

Zur Lösung des elliptischen Darcy Problems (3.3.6) stellen wir mit der Datei `dune-stokes/darcy/darcy_permeabilitytensor.cc` die Möglichkeit bereit, den Permeabilitätstensor \tilde{A} aus Definition 3.4.3 zu berechnen und eine `.m` Datei zu erstellen, die von COMSOL interpretiert werden kann. In dieser `.m` Datei stellen wir in Abhängigkeit des berechneten Permeabilitätstensors die Datenfunktionen \mathcal{F} und \mathcal{G} bereit, die nach Korollar 3.3.3 nötig sind, um das Darcy Problem in der elliptischen Formulierung in COMSOL zu lösen. Ein Aufruf dieser Datei in COMSOL genügt, um das elliptische Problem vollständig zu lösen und die Lösungen darzustellen.

Motivation 3.4.6 (Realisierung in DUNE)

Ziel zukünftiger Arbeit ist es, das Darcy Problem in der elliptischen Formulierung (3.3.6) in DUNE zu implementieren. Dazu schlagen wir vor, auf die Beispielimplementierung eines elliptischen Problems der Form

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot a(\nabla p - bp) + cp &= f && \text{in } \Omega, \\ p &= g_D && \text{auf } \Gamma_{\text{Dirichlet}}, \\ (a\nabla p - bp) \cdot n_\Omega &= g_N && \text{auf } \Gamma_{\text{Neumann}}, \\ (a\nabla p - bp) \cdot n_\Omega + \alpha p &= g_R && \text{auf } \Gamma_{\text{Robin}} \end{aligned}$$

mit $\partial\Omega = \Gamma_{\text{Dirichlet}} \cup \Gamma_{\text{Neumann}} \cup \Gamma_{\text{Robin}}$ von B. Haasdonk und R. Klöfkorn⁶ zurückgreifen. Dazu muss eine Modellklasse, abgeleitet von `Dune::LinearEllipticModelDefault`, sowie elementweise Integratoren für die Systemmatrix und die Rechte Seite implementiert werden, um

$$a = \mathcal{A}, \quad f = \mathcal{F}, \quad g_N = \mathcal{G} \cdot n_\Omega$$

und

$$b = c = g_D = \alpha = g_R = 0$$

zu realisieren.

⁶Bestandteil des DUNE-Moduls `dune-femhowto`.

`svn co https://dune.mathematik.uni-freiburg.de/svn/dune-femhowto/`

3.5 Numerische Experimente

In diesem Abschnitt präsentieren wir numerische Experimente, die auf den Überlegungen des vorherigen Abschnitts sowie der Implementierung aus Abschnitt 2.4 beruhen. Wie in Abschnitt 3.4 beschränken wir uns dabei auf zwei Raumdimensionen und eine Porösität von 36%.⁷ In Abschnitt 3.5.1 stellen wir eine Triangulierung der erweiterten Einheitszelle vor, auf der wir die Approximationen der lokalen Geschwindigkeiten berechnen um einen Permeabilitätstensor für oben genannte Porösität zu erhalten. In Abschnitt 3.5.2 stellen wir die Lösung des elliptischen Darcy Problems vor und vergleichen diese mit der Lösung des vollen Feinskalen Stokes Problems.

3.5.1 Die Approximation des Permeabilitätstensors

Zur Berechnung der Lösungen des Einheitszellen Stokes Problems greifen wir auf die in Abschnitt 2.4 vorgestellte Implementierung zurück. Dazu müssen wir eine Traingulierung der erweiterten Einheitszelle bereitstellen.

Beispiel 3.5.1 (Realisierung der erweiterten Einheitzelle Y')

Mit Hilfe der in Bemerkung 3.4.4 vorgestellten Skripte können wir die Geometrie von Y' durch eine entsprechende Triangulierung realisieren. Dazu definieren wir die Parameter

```
porosity: 0.36,
domainlength_x, domainlength_y: 3, 3,
standard_cell_size_x, standard_cell_size_y: 1, 1,
number_of_cells_x, number_of_cells_y: 3, 3,
number_of_points_per_quarter: 4,
do_shift, shift_x, shift_y: True, -1, -1,
```

um nach Ausführung von

./generateHomogeneousPerforatedDomain.py

die Datei

⁷Dies entspricht der Porösität von Sand (siehe zum Beispiel <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Porosity&oldid=317796856>).

```
homogeneous_perforated_domain_2d_porosity_0.36_9_holes.poly
zu erhalten. Mit Hilfe von triangle erstellen wir durch den Aufruf
triangle -p -q30 -a0.015 homogeneous_perforated_domain_2d_porosity_0.36_9_holes.poly
eine Triangulierung, die daraufhin in den Dateien
homogeneous_perforated_domain_2d_porosity_0.36_9_holes.1.ele
homogeneous_perforated_domain_2d_porosity_0.36_9_holes.1.node
homogeneous_perforated_domain_2d_porosity_0.36_9_holes.1.poly
vorliegt und die wir durch
./triangle2dgf.py homogeneous_perforated_domain_2d_porosity_0.36_9_holes.1
in die Datei
homogeneous_perforated_domain_2d_porosity_0.36_9_holes.1.dgf
umgewandeln (siehe Abbildung 3.5).
```

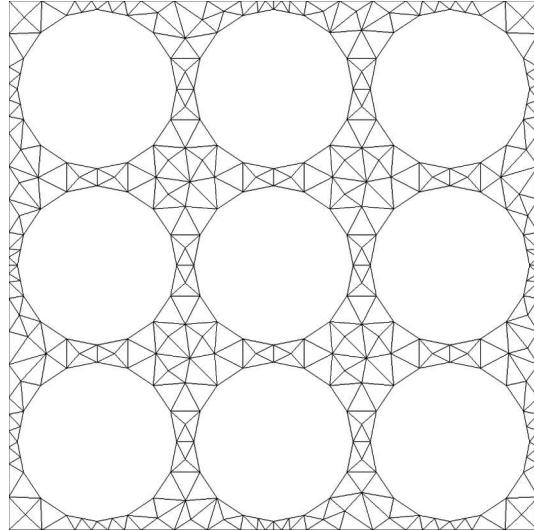
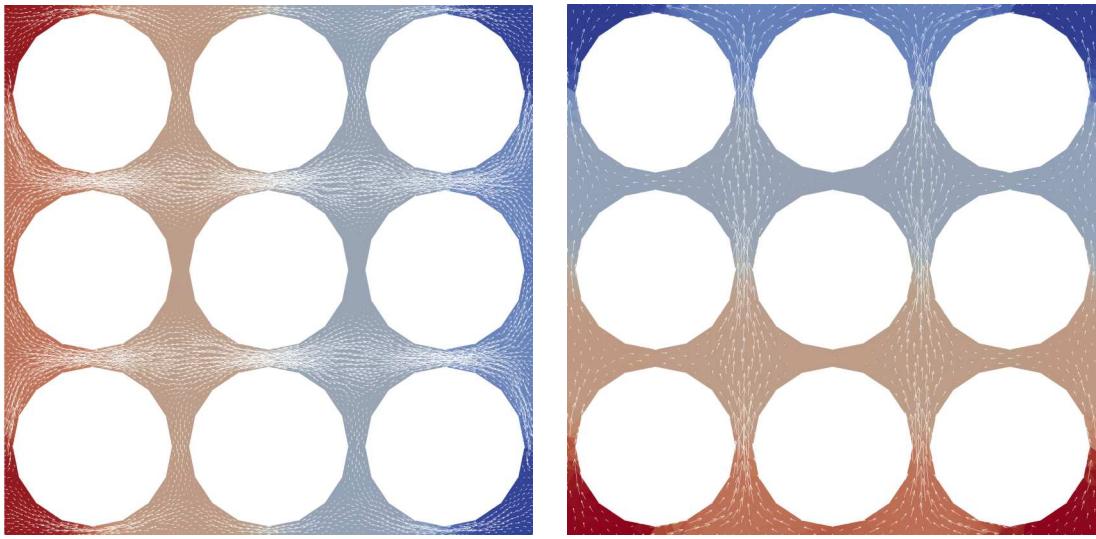


Abbildung 3.5: Beispiel einer Triangulierung von Y' .

Mit der im vorangegangenen Beispiel vorgestellten Triangulierung können wir das erweiterte Einheitszellen Stokes Problem lösen. Da für diese Problemstellung keine exakten Lösungen bekannt sind, können wir keine Konvergenzanalyse wie in Abschnitt 2.5 durchführen. Anhand von Abbildung 3.6 können wir allerdings erwarten, dass sich die lokalen Geschwindigkeiten auf dem Rand der periodischen Einheitszelle Y periodisch verhalten (vergleiche auch Abbildung 3.3 für die Position der periodischen Einheitszelle Y innerhalb der erweiterten Einheitszelle Y').



π'_1, ω'_1 (auf einer Triangulierung mit 8648 Elementen)

π'_2, ω'_2 (auf einer Triangulierung mit 2162 Elementen)

Abbildung 3.6: Beispiel berechneter Lösungen des erweiterten Einheitszellen Stokes Problems. Die Drücke sind farbig (rot $\hat{=}$ hoher Druck, blau $\hat{=}$ niedriger Druck) und die Geschwindigkeiten sind durch Pfeile dargestellt (die Länge der Pfeile gibt den Betrag der Geschwindigkeit an).

Mit Hilfe der in Bemerkung 3.4.5 vorgestellten Implementierung in der Datei `dune-stokes/darcy/darcy_permeabilitytensor.cc` können wir mit den Lösungen des erweiterten Einheitszellen Stokes Problems aus Abbildung 3.6 einen Permeabilitätstensor für eine Porosität von 0,36 bestimmen.

Beispiel 3.5.2 (Approximation des Permeabilitätstensors)

Mit den in Abbildung 3.6 dargestellten Lösungen des erweiterten Einheitszellen Stokes Problem, ω'_1 und ω'_2 , erhalten wir nach Definition 3.4.2 die Approximationen der lokalen Geschwindigkeiten, $\tilde{\omega}_1$ und $\tilde{\omega}_2$.⁸ Für eine Porosität von 0,36 erhalten wir damit als Approximation des Permeabilitätstensors nach Definition 3.4.3

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4117.49 & -0.002464 \\ -0.002464 & 4117.49 \end{pmatrix}.$$

⁸Für die Berechnung des Permeabilitätstensors haben wir sowohl ω'_1 als auch ω'_2 auf einer Triangulierung mit 8648 Elementen berechnet.

3.5.2 Die Lösung des elliptischen Darcy Problems

Für die Bestimmung des makroskopischen Verhaltens eines Fluids mit Viskosität 1 in einem homogenen porösen Medium mit Porösität 0,36 lösen wir das elliptische Darcy Problem in COMSOL mit dem in Beispiel 3.5.2 berechneten Permeabilitätstensor (siehe Abbildung 3.8, rechst unten). Da die makroskopische Strömung eines Fluids in einem homogenen porösen Medium nach Abschnitt 3.3 der Strömung eines Fluids in einem homogenen porösen Medium für kleiner werdendes ε entspricht, haben wir, in Anlehnung an Abbildung 1.2, in Abbildung 3.8 die Lösung des vollen Feinskalen Stokes Problems (3.1.1) für verschiedene Werte von ε der Lösung des elliptischen Darcy Problems (3.3.6) gegenübergestellt. Außerdem vergleichen wir in Abbildung 3.7 Niveaulinien der Lösung des vollen Feinskalen Stokes Problems für $\varepsilon = 0.033$ mit denen des elliptischen Darcy Problems. Dazu ist die Approximation des Drucks als Lösung des Feinskalen Stokes Problems im Hintergrund durch einen farbigem Verlauf dargestellt. Zusätzlich ist eine ausgewählte Niveaulinie dieses Drucks $p_{0.033}$ in grün und eine vergleichbare Niveaulinie des Drucks p_0 als Lösung des Darcy Problems in schwarz eingezeichnet.⁹

Bemerkung 3.5.3 (Diskussion der Ergebnisse)

Nach den Überlegungen der ersten drei Abschnitte dieses Kapitels können wir erwarten, dass die Lösung des vollen Feinskalen Stokes Problems für kleiner werdendes ε gegen die Lösung des elliptischen Darcy Problems konvergiert, die mit erheblich geringerem Rechenaufwand berechnet werden kann. Diesen Erwartungen entsprechen die in Abbildung 3.8 dargestellten Lösungen. Auch der Vergleich der Niveaulinien der Drücke in Abbildung 3.7 zeigt, dass sich das makroskopische Verhalten eines Fluids erfolgreich durch Lösen des Darcy Problems bestimmen lässt. Die Unterschiede der Niveaulinien in Abbildung 3.7 erklären wir dadurch, dass wir die Funktion $p_{0.033}$ auf einer Triangulierung mit Hindernissen der Funktion p_0 auf einer Triangulierung ohne Hindernisse, also auf einem anderen Definitionsbereich, gegenüberstellen. Für eine Fortsetzung der Funktion $p_{0.033}$ auf eine Triangulierung ohne Hindernisse nach Lemma 3.2.5 erwarten wir eine bessere Übereinstimmung der Niveaulinien. Den Unterschied im Wertebereich der beiden Funktion (siehe Fußnote 9) erklären wir dadurch,

⁹Da sich der Wertebereich von $p_{0.033}$ mit $[-0.087; 0.087]$ vom Wertebereich von p_0 mit $[-0.143; 0.149]$ unterscheidet, vergleichen wir die Niveaus
 $\{x \in Y | 0.65 * (\max p_{0.033}(x) - \min p_{0.033}(x)) + \min p_{0.033}(x) = 0.026\}$ und
 $\{x \in Y | 0.65 * (\max p_0(x) - \min p_0(x)) + \min p_0(x) = 0.048\}.$

dass wir die Approximationen des Einheitszellen Stokes Problems mit Hilfe der erweiterten Einheitszelle Y' und nicht mit periodischen Randwerten auf Y bestimmen.

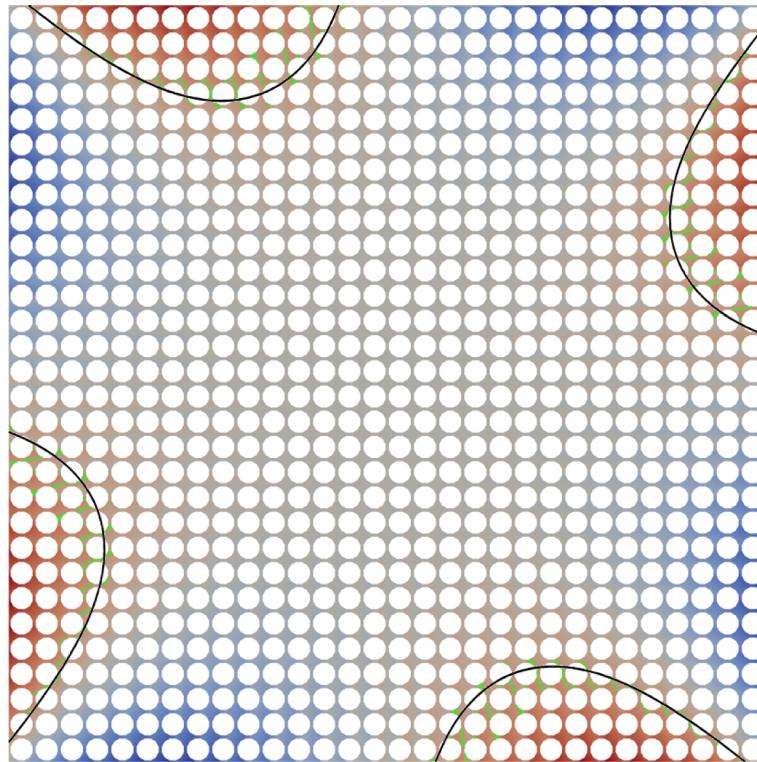


Abbildung 3.7: Vergleich der Lösung des feinskalen Stokes Problems für $\varepsilon = 0.033$ (grün)
mit der Lösung des Darcy Problems (schwarz).

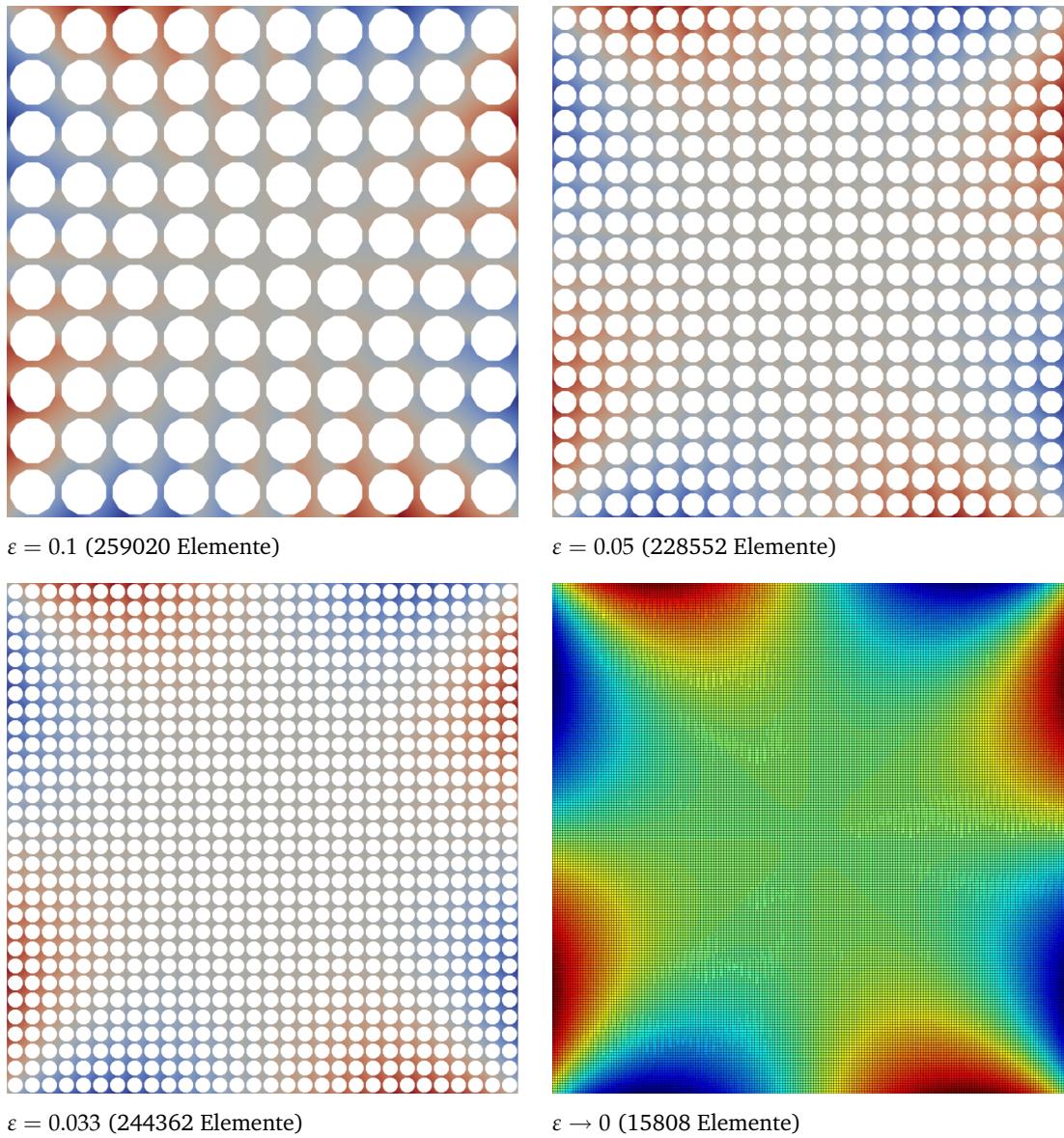


Abbildung 3.8: Beispiel der Lösung des feinskalen Stokes Problems für verschiedene Werte von ε gegenüber der Lösung des Darcy Problems (rechts unten). Der Druck ist farbig (rot $\hat{=}$ hoher Druck, blau $\hat{=}$ niedriger Druck) dargestellt.

Literaturverzeichnis

- [All89] G. Allaire. Homogenization of the Stokes Flow in a connected Porous Medium. *Asymptot Anal*, 2:203–222, 1989.
- [All92] G. Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.*, 23.6:1482–1518, 1992.
- [BBD⁺08a] P. Bastian, M. Blatt, A. Dedner, C. Engwer, R. Klöfkorn, R. Kornhuber, M. Ohlberger, and O. Sander. A generic grid interface for parallel and adaptive scientific computing. Part II: Implementation and tests in DUNE. *Computing*, 82:121–138, 2008.
- [BBD⁺08b] P. Bastian, M. Blatt, A. Dedner, C. Engwer, R. Klöfkorn, M. Ohlberger, and O. Sander. A generic grid interface for parallel and adaptive scientific computing. Part I: Abstract framework. *Computing*, 82:103–119, 2008.
- [BF91] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag New York, Inc., 1991.
- [BMW94] A. Bourgeat, A. Mikelić, and S. Wright. Stochastic two-scale convergence in the mean and applications. *J. reine angew. Math.*, 456:19–51, 1994.
- [BR97] F. Bassi and S. Rebay. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 131:267–279, 1997.
- [But89] G. Buttazzo. *Semicontinuity, relaxation and integral representation in the calculus of variations*. Pitman, London, 1989.
- [Cia78] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978.

- [CKSS02] B. Cockburn, G. Kanschat, D. Schötzau, and C. Schwab. Local Discontinuous Galerkin Methods for the Stokes System. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(1):319–343, 2002.
- [CS98a] B. Cockburn and C. W. Shu. The local discontinuous Galerkin finite element method for convection-diffusion systems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35:2440–2463, 1998.
- [CS98b] B. Cockburn and C. W. Shu. The local discontinuous Galerkin Method for time-dependent convection-diffusion systems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35:2440–2463, 1998.
- [Dar56] H. Darcy. *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*. Dalmont, Paris, 1856.
- [dG75] E. de Giorgi. Sulla convergenza di alcune successioni di integrali del tipo dell'area. *Rendi Conti di Mat.*, 8:277–294, 1975.
- [DKNO09] A. Dedner, R. Klöfkorn, M. Nolte, and M. Ohlberger. A generic interface for parallel and adaptive scientific computing: Abstraction principles and the DUNE-FEM module. Technical report, FB 10 ,Universität Münster Num. 05/09 - N Preprint, 2009.
- [Eva98] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.
- [FHS93] L. P. Franca, T. Hughes, and R. Stenberg. Stabilized finite element Methods. *Incompressible Computational Fluid Dynamics: Trend and Advances, Cambridge University Press*, pages 87–107, 1993.
- [For93] M. Fortin. Finite element solution of the Navier-Stokes equations. *Acta Numerica*, 5:239–284, 1993.
- [HF87] T. Hughes and L. P. Franca. A new finite element formulation for computational fluid dynamics, VII. The Stokes Problem with various well-posed boundary conditions: Symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 65:85–96, 1987.
- [HFB86] T. Hughes, L. P. Franca, and M. Balestra. A new finite element formulation for computational fluid dynamics, V. Circumventing the Babuška-Brezzi

- Condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 59:85–99, 1986.
- [Hor97] U. Hornung. *Homogenization and Porous Media*. Springer-Verlag New York, Inc., 1997.
- [KB05] R. Krahl and E. Bänsch. Computational comparison between the Taylor-Hood and the conforming Crouzeix-Raviart element. *Proceedings of Algoritmij*, pages 369–379, 2005.
- [Kel80] J. B. Keller. Darcy’s law for flow in porous media and the two-space method. In R. L. Sternberg, editor; *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering and Applied Sciences*, Dekker, New York, pages 429–443, 1980.
- [KK00] O. Karakashian and T. Katsaounis. A discontinuous Galerkin method for the incompressible Navier-Stokes equations. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, 11:157–166, 2000.
- [KrÃ97] D. Kröner. *Numerical Schemes for Conservation Laws*. B. G. Teubner Verlag, 1997.
- [KrÃ08] M. Kränkel. Local Discontinuous Galerkin Methoden für elliptische Differentialgleichungen und das Stokes System. Master’s thesis, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg i. B., 2008.
- [MT77] F. Murat and L. Tartar. H-Convergence. In R. V. Kohn, editor; *Séminaire d’Analyse Fonctionnelle et Numérique de l’Université d’Alger (1977)*, 1977.
- [Ngu89] G. Nguetseng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM J. Math. Anal.*, 20:608–629, 1989.
- [QV94] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer-Verlag New York, Inc., 1994.
- [RH73] W. H. Reed and T. R. Hill. Triangular Mesh Methods for the Neutron Transport Equation. Technical Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, NM, 1973.
- [Sie97] K.G. Siebert. Einführung in die numerische Behandlung der Navier-Stokes-

Gleichungen, 1997. Ausarbeitung einer Vorlesung zum Praktikum 'Numerik Partieller Differentialgleichungen 3' im Wintersemester 1997/98.

- [Spa68] S. Spagnolo. Sulla convergenza delle soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3)*, 22:571–597, 1968.
- [Tar80] L. Tartar. Incompressible fluid flow in a porous medium - convergence of the homogenization process. In E. Sanchez-Palencia, *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, volume 127 of *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1980, pages 368–377, 1980.
- [Tem77] R. Temam. *Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1977.

Erklärung der Eigenständigkeit

Hiermit versichere ich, Felix Albrecht, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Ort, Datum und Unterschrift