

## Inverse Probleme

Inverses Problem: Schließe von Wirkung auf Ursache mit Hilfe eines mathematischen Modells

echtes inverses Problem: Wirkung wird beobachtet/gemessen

Eindeutigkeit der Ursache wünschenswert

Bsp: medizinische Bildrekonstruktion: Ermittle aus Röntgen-CT-Messung die Röntgendifticheverteilung (d.h. ein Bild des anatomischen Aufbaus) des Patientenkörpers

Optimalsteuerung: Man versucht, gewünschte Wirkung durch Steuerung der Ursache zu erzielen (ggfs. kombiniert mit Optimierung weiterer Zielfunktionen)

hohe Regularität der Ursache wünschenswert

Bsp: Konstruiere um eine Kugel herum eine Materialverteilung eines optischen Materials so, dass die Kugel erreichende Lichtwellenfronten hinter der Kugel ungestört aussehen (d.h. die Kugel ist unsichtbar)

zugehöriges Vorwärtsproblem: Mathematisches Modell, das zu gegebener Ursache die Wirkung liefert, bzw. Ermittlung der Wirkung aus der Ursache

Typischerweise kann ein Vorwärtsproblem beschrieben werden durch eine (evtl. nichtlineare) Abbildung

$$A: X \rightarrow Y$$

für X die Menge/den Raum der Ursachen und Y der Wirkungen; das inverse Problem ist folglich:

Finde zu gegebenem  $y \in Y$  ein  $x \in X$  mit  $Ax = y$

Experimentaldesign: Wähle & designe für eine gesuchte, nicht direkt messbare Größe von Interesse ein Vorwärtsproblem und zugehörige Messungen, sodass die gesuchte Größe sich durch das zugehörige inverse Problem möglichst einfach finden lässt.

Bsp: Wähle Röntgenrichtungen in CT so aus, dass diese möglichst wenig sind (Reduktion der Strahlenbelastung), aber dennoch sehr gute Bildrekonstruktion erlauben

Def: (Wohlgestelltheit nach Hadamard) Ein inverses Problem  $x \in \tilde{A}^T y$  heißt wohlgestellt, falls

- es eine Lösung  $x$  besitzt,
- diese eindeutig ist und
- stetig von  $y$  abhängt.

Bem: Rolle von a), b) ist klar. c) ist nötig, da die Messungen  $y$  niemals exakt sind, sondern immer kleine Fehler, sog. Rauschen, enthalten. Diese Fehler sollen nicht zu völlig anderen Lösungen  $x$  führen.

Bem: Inverse Probleme aus Anwendungen sind typischerweise schlecht gestellt, d.h. eine der Bedingungen ist nicht erfüllt (oft alle).

Regularisierung: Verfahren, eine wohlgestellte Näherung eines inversen Problems zu bilden, d.h.  $x = A^T y$  wird ersetzt durch  $x = B y$ .

Bsp: (Tikhonov-Regularisierung) Das inverse Problem wird ersetzt durch

$$x_a = \operatorname{armin}_Y \|\mathbf{A}x - y\|_Y^2 + \alpha \|x\|_X^2$$

Def: - Ein Banachraum  $X$  ist ein vollständiger normierter Vektorraum (z.B.  $L^2((0,1))$ ).

- Ein Hilbertraum ist ein Banachraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .
- Der Dualraum  $X^*$  zu einem Banachraum  $X$  ist der Raum aller linearen stetigen Abbildungen  $\ell: X \rightarrow \mathbb{R}$  mit Norm  $\|\ell\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\ell(x)|$ . Man schreibt auch  $\ell(x) = \langle \ell, x \rangle_{X^*, X}$ .
- $x_n \in X$  konvergiert schwach gegen  $x \in X$ ,  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ , wenn  $\ell(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell(x) \quad \forall \ell \in X^*$ .
- $\ell_n \in X^*$  konvergiert schwach-\* gegen  $\ell \in X^*$ , wenn  $\ell_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell(x) \quad \forall x \in X$ .
- Sei  $A: X \rightarrow Y$  linear & stetig, dann ist der adjungierte Operator  $A^*: Y^* \rightarrow X^*$  definiert durch  $\langle A^* y^*, x \rangle = \overline{\langle y^*, Ax \rangle} \quad \forall x \in X, y^* \in Y^*$ .
- Ein Funktional  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt schwach unterhalbstetig, wenn  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$  für alle  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ .

Thm: - (Riesz) Ist  $X$  Hilbertraum, dann ist  $X^*$  isometrisch isomorph zu  $X$  via  $\ell(\cdot) = (x_{\ell}, \cdot)$ .

- (Banach-Alaoglu) Sei  $X$  separabler oder reflexiver Banachraum. Die Einheitskugel von  $X^*$  ist schwach-\* folgenkompakt.
- $\|\cdot\|_X$  ist schwach unterhalbstetig,  $\|\cdot\|_{X^*}$  ist schwach-\* unterhalbstetig.

Thm: Seien  $X, Y$  Hilberträume,  $A: X \rightarrow Y$  linear & stetig, dann ist die Tikhonov-Regularisierung wohlgestellt.

Bew: Sei  $E_y = \|A\mathbf{x} - y\|_Y^2 + \alpha \|\mathbf{x}\|_X^2$

a) direkte Methode:  $E_y \geq 0, E_y(0) < \infty$

- Betrachte Minimallfolge  $x_n$  mit  $E_y(x_n) \leq E_y(x_{n-1}) \leq E_y(x_1) < \infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} E_y(x_n) = \inf E_y$
- $\|\mathbf{x}_n\|_X^2 \leq E_y(x_n)/\alpha \leq E_y(x_1)/\alpha < \infty$

Banach-Alaoglu  $\mathbf{x}_n \xrightarrow{\text{Teilfolge}} x \in X$  für  $\|\mathbf{x}_n\|_X \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \inf E_y$

$$\Rightarrow \langle \ell, A\mathbf{x}_n \rangle = \langle A^*\ell, x_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle A^*\ell, x \rangle = \langle \ell, Ax \rangle \quad \forall \ell \in Y^*$$

also  $A\mathbf{x}_n \rightarrow Ax$ .

$\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$  schw. unterhalbstetig

$$\inf_{n \rightarrow \infty} E_y = \lim_{n \rightarrow \infty} E_y(x_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} E_y(x_n) \geq E_y(x)$$

$\Rightarrow x$  ist Minimierer

b) strikte Konvexität: Seien  $x_1 \neq x_2$  Minimierer, dann  $E_y\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2} (E_y(x_1) + E_y(x_2)) - \left\| A \frac{x_1 - x_2}{2} \right\|_Y^2 - \alpha \left\| \frac{x_1 - x_2}{2} \right\|_X^2 < E_y(x_1) = E_y(x_2)$$

c) Optimalitätsbedingung: Minimiert erfüllt

$$0 = \frac{d}{dt} E_y(x + t\varphi) \Big|_{t=0} = 2(Ax - y, A\varphi) + 2\alpha(x, \varphi) \quad \forall \varphi \in X$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(Ax, A\varphi) + \alpha(x, \varphi)}_{=: B(x, \varphi)} = \underbrace{(y, A\varphi)}_{=: l(\varphi)} \quad \forall \varphi \in X$$

$$\begin{aligned} \cdot |B(x, \varphi)| &\leq (\alpha + \|A\|^2) \|x\|_X^2 \|\varphi\|_X^2 \\ \cdot B(x, x) &\geq \alpha \|x\|_X^2 \\ \cdot |l(\varphi)| &\leq \|y\|_Y \|A\| \|\varphi\|_X \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \Rightarrow \exists! \text{Lsg. } x, \text{ die stetig von } y \\ \text{abhängig.} \end{aligned} \right\} \text{Lax-Milgram} \quad \square$$

### Illustration anhand der Integration/Differentiation

Vorwärtsproblem:  $X = L^2((0,1))$ ,  $Y = \{y \in W^{1,2}((0,1)) \mid y(0) = 0\}$ ,  $Ax \mapsto \int_0^s x(t) dt$  (linear)

Bem: In Anwendungen evtl. noch wichtiger:  $X = \text{Radonmaße auf } (0,1)$ ,  $Y = \{y \in BV((0,1)) \mid y(0) = 0\}$

Bsp: Viele Photonen/Elektronen werden mit bestimmter Energie (normiert auf 1) in ein Medium (Gaswolke) geschickt. Man möchte Wechselwirkung wissen, d.h. wie viele Elektronen/Photonen jeweils um wie viel Energie verlangsamt werden, d.h.  $x \in X$  ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Energieverlustes  $\in [0,1]$ . Man kann eine Schranke konstruieren, die nur Photonen/Elektronen mit einer vorgegebenen Mindestenergie  $s$  durchlässt, und man kann die Photonen/Elektronen dahinter zählen, d.h.

$$y(s) = \int_0^{1-s} x(t) dt$$



Die Messung  $y^s$  ist mit Fehlern behaftet, z.B. additives weißes Gaußsches Rauschen der Standardabweichung  $\sigma > 0$ , d.h.

$$y^s = y + n^s$$

mit  $n^s$  der Realisierung einer Zufallsvariablen, sodass  $n^s(t)$  für alle  $t$  unabhängig normalverteilt ist mit Mittelwert 0 & Varianz  $\sigma^2$ .  $n^s$  liegt fast sicher in  $L^2((0,1))$  mit

$$\int_0^s |n^s(t)|^2 dt \approx \sigma^2$$

nach dem Gesetz der großen Zahlen, aber nicht in  $W^{1,2}$ .

$\Rightarrow$  Wir müssen  $A$  auffassen als Operator  $L^2((0,1)) \rightarrow L^2((0,1))$ .

Thm: Das inverse Problem  $Ax = y$  für  $A: L^2((0,1)) \rightarrow L^2((0,1))$ ,  $Ax(s) = \int_0^s x(t) dt$

- besitzt i.A. keine Lsg.,
- falls eine Lsg. existiert, ist sie eindeutig,
- aber nicht stetig in  $Y$ .

Bew: b) Fundamentalsatz der Integral- & Differentialrechnung  $\Rightarrow x(s) = y'(s)$ , und die schwache Ableitung ist eindeutig.

- Wenn  $y \notin W^{1,2}((0,1))$ , besitzt es keine schwache Ableitung in  $L^2((0,1))$ .
- Setze  $dy(t) = \sin(nt)$ , dann ist  $\|dy\|_{L^2} \leq 1$ , aber

$$\|A^{-1}(y + dy) - A^{-1}y\|_{L^2} = \|t \mapsto n \cos nt\|_{L^2} \geq C_n \text{ (rel. groß für } n \rightarrow \infty\text{)} \quad \square$$

Tikhonov-Regularisierung:  $x_\alpha = \underset{x \in L^2((0,1))}{\operatorname{argmin}} \int_0^1 | \int_0^s x(t) dt - y^\delta(s) |^2 ds + \alpha \int_0^1 |x(t)|^2 dt$

Setze  $y = Ax$ , dann  $y_\alpha = \underset{y \in W^{1,2}((0,1)), y(0)=0}{\operatorname{argmin}} \int_0^1 |y - y^\delta|^2 ds + \alpha \int_0^1 |y'|^2 ds$   
 $\Leftrightarrow y_\alpha$  löst  $\begin{cases} -\alpha y'' + y_\alpha - y^\delta = 0 & \text{auf } (0,1) \\ y_\alpha(0) = 0, \quad y_\alpha'(1) = 0 \end{cases}$

d.h.  $y_\alpha$  = Ergebnis eines impliziten Euler-Zeitschrittes mit Schrittweite  $\alpha$  der Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Dirichlet- / Neumann Randbedingungen

$\Rightarrow y^\delta$  wird erst zu  $y_\alpha$  geglättet!

Fehlerabschätzung: Opt.-Bed.  $\Rightarrow$  für alle  $\varphi \in W^{1,2}((0,1))$  mit  $\varphi(0)=0$  gilt

$$\alpha(y_\alpha', \varphi') + (y_\alpha, \varphi) = (y^\delta, \varphi)$$

$$\alpha(y', \varphi') + (y, \varphi) = (y - \alpha y'', \varphi)$$

Differenz:  $\alpha(y_\alpha' - y', \varphi') + (y_\alpha - y, \varphi) = (y^\delta - y + \alpha y'', \varphi)$

$\varphi = y_\alpha - y$   
 $\Rightarrow \alpha \|y_\alpha' - y'\|_{L^2}^2 + \|y_\alpha - y\|_{L^2}^2 = (y^\delta - y + \alpha y'', y_\alpha - y) \leq \|y^\delta - y\|_{L^2}^2 + \alpha^2 \|y''\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|y_\alpha - y\|_{L^2}^2$   
 $\Rightarrow \|x_\alpha - x\|_{L^2} \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \|y^\delta - y\|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \|y''\|_{L^2}$  Young-Ungl.  
 $\Rightarrow$  Ist  $\|y^\delta - y\|_{L^2} = \delta$ , so erhält man mit der optimalen Wahl  $\alpha = \frac{\delta}{\|y''\|_{L^2}}$   
 $\|x_\alpha - x\|_{L^2} \leq 2 \sqrt{\|y''\|_{L^2} \delta}$

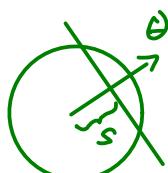
$\Rightarrow$  selbst mit Regularisierung ist Rekonstruktionsfehler  $\gg$  Messfehler.

Einige klassische (inverse) Vorwärtsprobleme

1. Differentiation/Integration

2. Def: Die Radontransformation auf  $B_r(0) \subset \mathbb{R}^d$  ist eine lineare Abbildung

$$R: L^1(B_r(0)) \rightarrow L^1(S^{d-1} \times (-1,1)), \quad R u(\theta, s) = \int_{\{x \in B_r(0) \mid x \cdot \theta = s\}} u(x) d\sigma^{d-1}(x)$$



Bem: Definition für andere Räume analog auch möglich, z.B. Radonmaße auf  $B_r(0)$  oder  $\mathbb{R}^d$

Bsp: Positronen-Emissions-Tomographie (PET);  $u \in L^1(B_r(0))$  ist Verteilung eines injizierten radioaktiven Materials (oft Fluorodeoxy-Glukose mit  $^{18}\text{F}$ ) im Körper. Bei jedem Zerfall entsteht ein Positron, das sich mit einem Elektron annihiliert und dabei zwei Photonen in zufällige entgegengesetzte Richtungen emittiert, die in einem Detektorpaar (parametrisiert durch  $\theta, s$ ); der Körper ist von Detektoren umgeben) registriert werden.  
 $\Rightarrow$  Man erhält Verteilung von Detektionen auf  $S^2 \times (-1,1)$ , diese ist genau  $Ru / |S^2|$ .

Thm:  $R: L^1(B_1(0)) \rightarrow L^1(S^1 \times (-1,1))$  ist stetig.

Bew:  $\int_{S^{d-1} \times (-1,1)} |R_u| d(\theta, s) \leq \int_{S^{d-1}} \int_{-1}^1 \int_{\{x \in B_1(0) | x \cdot \theta = s\}} |u(x)| d\mathcal{L}^{d-1}(x) d(s, \theta)$

Für  $\theta \in S^{d-1}$   $\int_{-1}^1 \|u\|_{L^2(B_1(0))} d\theta = |S^{d-1}| \|u\|_{L^2}$   $\square$

Bem: ähnlich in  $L^1$  ( $\text{H}A$ , mit Finsenscher Ungl.)

3. Def: Die X-Ray-Transformation auf  $B_1(0) \subset \mathbb{R}^d$  ist eine lineare Abbildung

$$P: L^1(B_1(0)) \rightarrow L^1(S^1 \times \mathbb{R}^{d-1}), P_u(\theta, s) = \int_{\theta^\perp} \int_{\{x \in B_1(0) | x = s + t\theta \text{ für ein } t \in \mathbb{R}\}} u(x) d\mathcal{L}^d(x)$$


Bem. & Thm. wie bei 2. ( $\text{H}A$ )

Bsp: Computer-Tomographie (CT); ein Röntgenbild wird aus jeder Richtung  $\theta \in S^1$  gemacht; die Schwächung des Strahls an Position  $s + t\theta$  ist proportional zur Strahlintensität  $I$  und zum Schwächungskoeffizienten  $u$  an jeder Stelle, also

$$\frac{d}{dt} I(s + t\theta) \approx -u(s + t\theta) I(s + t\theta) \Rightarrow I(s + \theta) = I(s - \theta) e^{-\int_{s-\theta}^s u(s + t\theta) dt};$$

gemessener relativer Intensitätsabfall  $\frac{I(s-\theta) - I(s+\theta)}{I(s-\theta)} \Rightarrow \exp P_u(\theta, s)$

$$\Rightarrow P_u(\theta, s) = \log \frac{I(s-\theta)}{I(s+\theta)}.$$

4. Parameteridentifikation: Bestimme Koeffizienten eines PDgl-Problems (z.B. in PDgl oder AB/RB) anhand Beobachtung der Lösung in einem Teilgebiet (z.B. am Rand) für verschiedene rechte Seiten (der PDgl oder AB/RB)

Bsp: Permeabilitätsmessung von Gesteinen (z.B. für Ölförderung);  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  mit glattem Rand,  $X = C^0(\bar{\Omega})$ ,  $x \in X$  mit  $x \in \Omega$ ,  $x \in \partial\Omega$  ist Permeabilität des Gesteins,  $Y = W^{1,p}(\Omega)$ ,  $y \in Y$  ist gemessener Flüssigkeitsdruck im Gestein,  $A: X \rightarrow Y$  mit  $Ax = y$  der Lösung von

$$-\operatorname{div}(x(z) \nabla y(z)) = f(z) \quad \text{in } \Omega \quad + \text{RB} \quad (\text{Darcy-Fluss}),$$

wobei  $f \in L^2(\Omega)$  eine feste Quelle ist.

Bem: Parameteridentifikationsprobleme sind typischerweise nichtlinear, z.B. ist für obiges Beispiel  $A(2x) \neq 2A(x)$

Bem: In 1D reicht eine rechte Seite  $f$ , und wir können leicht eine Lösungsformel herleiten: Sei  $\Omega = (0,1)$  mit homogenen Neumann-RB am linken Rand, dann gilt

$$x(z) y'(z) = - \int_0^z f(s) ds.$$

Ist  $f > 0$  oder  $f < 0$ , so ist  $\int_0^z f(s) ds \neq 0 \Rightarrow y'(z) \neq 0 \Rightarrow x(z) = \frac{- \int_0^z f(s) ds}{y'(z)}$ .

Für  $f=0$  jedoch lässt sich  $x$  nicht identifizieren. Das Problem ist schlechtgestellt wegen der Differenzierung, zusätzlich gibt es Fehlerverstärkung für kleines  $y'$ .

Def: Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  mit glattem Rand,  $\in C^1(\bar{\Omega})$  mit  $c > 0$ .

Die lineare Abbildung

$\Lambda_\alpha : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega), \quad f \mapsto \alpha \frac{\partial u}{\partial n} \quad \text{für } u \text{ Lsg. von } \begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha \nabla u) = 0 \text{ in } \Omega \\ u = f \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$   
heißt Dirichlet-zu-Neumann-Abbildung.

( $H^{1/2}$  &  $H^{-1/2}$  sind spezielle Hilberträume, sozusagen die Spur von  $H^1$  &  $L^2$ -Funktionen)

Bsp: Elektrische Impedanztomographie (EIT):  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  Patientenkörper,  $X = \mathbb{C}^d$ ,  $\in X$  mit  $c > 0$  ist elektrische Leitfähigkeit,  $Y = L(H^{1/2}(\partial\Omega), H^{-1/2}(\partial\Omega))$ ,  $Ax \in Y$  wird ermittelt, indem verschiedene Spannungen  $f$  angelegt werden und die resultierenden Stromflüsse gemessen werden.

Bem: Für  $\Omega = (a, b)$  ist  $Y = L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Eine Messung  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  kann nicht ausreichen, um eine Funktion  $\in C(\bar{\Omega})$  zu rekonstruieren. Für höherdimensionale Gebiete stellt sich heraus, dass eine Rekonstruktion möglich ist.

5. Inverse Streuung: Bestimme ein Objekt anhand von (z.B. akustischen oder elektromagnetischen) Wellen, die hiervon gestreut werden  
~> Spezialfall der Parameteridentifikation für Wellengl., Maxwellgl., Schrödingerl. oder andere hyperbolische PDgl

Bsp: Dichte/Druck einer Schallwelle wird beschrieben durch

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{n^2} \Delta u, \quad \frac{1}{n(z)} = \text{Schallgeschw.} (=1 \text{ außerhalb des Objekts})$$

Für zeitharmonische (d.h. periodische) Wellen  $u(z, t) = e^{ikt} u(z)$  wird dies zur Helmholtz-Gl.

$$\Delta u + k^2 n^2 u = 0$$

für die beobachtete Welle  $u$ .

Die einfallende Welle (diese wird gesendet) erfüllt  $\Delta u^i + k^2 u^i = 0$ , die gestreute Welle ist  $u^s = u - u^i$  und erfüllt

$$\Delta u^s + k^2 u^s = k^2 (1 - n^2) (u^i + u^s)$$

Es ist  $1 - n^2 = c$  für  $0 \in B(0)$  das gesuchte Streu-Objekt; die Messung ist typischerweise die Fernfeldwelle  $u|_{\partial B_R(0)}$  mit  $R > > 1$ , d.h.

$x = 0, y = \{u|_{\partial B_R(0)}\}$  für eine Anzahl einfallender Wellen  $n^i$  versch. Frequenzen,  $A: x \mapsto y$

Variation: Schall wird an  $\partial\Omega$  absorbiert ( $u|_{\partial\Omega} = 0$ ) oder reflektiert ( $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$ ) oder Mischung ( $\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = 0$  auf  $\partial\Omega$ ).

6. Optimalsteuerung:- Kontrolltheorie fragt, ob ein gewünschter Zustand  $y$  erreicht werden kann  
- optimale Kontrolle: - Falls eine Lsg.  $x$  mit  $Ax=y$  existiert, aber nicht eindeutig ist, sucht sie nach der besten Lsg. bzgl. eines Kostenfunktionalen  $F$ , d.h.

$$\min_{x \in X, Ax=y} F(x)$$

- Falls (ggfs.) keine Lsg. existiert, löst sie eine Regularisierung von  $Ax=y$ , z.B. die Tikhonov-Reg. oder eine allgemeinere Variante

$$\min_{x \in X} D(Ax, y) + F(x)$$

Diskretisierung      Regularisierung/Einfachheit der Lsg.  
Dies geschieht manchmal auch, wenn eine Lsg. existiert, aber nicht genau erreicht werden muss; ein noch allgemeinerer Fall ist der, wo kein  $y$  vorgegeben ist, sondern  $Ax$  nur möglichst gut sei.

Bsp: (Luenberger) Höhe  $h$  einer Rakete erfüllt  $\dot{h}(t) = x(t) - g$  mit  $x$ =aktive Beschleunigung,  $g$ =Gravitation. Wir möchten  $h(T)=y$  mit möglichst wenig Treibstoff erreichen, d.h.

$$\begin{aligned} \min_{x \in L^\infty(0, T)} & F(x) \quad \text{für} \quad F(x) = \int_0^T |x| dt \\ & h(0) = 0, h(T) = y \\ & \dot{h}(t) = x(t) - g \\ & x \leq x_{\max} \end{aligned}$$

$$X = \{x \in L^\infty(0, T) \mid x \leq x_{\max}\}, \quad Y = \mathbb{R}, \quad A: x \mapsto y$$

$$\text{Es stellt sich heraus, dass } x_{\text{opt}} = \begin{cases} x_{\max}, & t \leq T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{bang-bang-Kontrolle})$$

Bem: Bei optimaler Kontrolle von PDgl unterscheidet man verteilte Kontrolle überall im Gebiet (z.B. rechte Seite der PDgl) und Randkontrolle (nur in RB).

7. Bildverarbeitung: typische Daten aus Digitalkamera oder (Fluoreszenz/Elektronen-)Mikroskopie

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

kontinuierliches Graustufenbild:

kontinuierliches Farbbild:

$$y: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{oder } y: \Omega \rightarrow [0, 1])$$

$$y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (\text{oder } y: \Omega \rightarrow [0, 1]^n)$$

Sei  $G = \{0, h_1, 2h_1, \dots, N_1 h_1\} \times \dots \times \{0, h_d, \dots, N_d h_d\}$  Gitter  
diskretes Bild:

Pixel (in höheren Dimensionen Voxel):  $y: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  (oder  $y: G \rightarrow \{0, 1, \dots, 255\}^n$ )

Ein diskretes Bild  $y$  ist typischerweise nur eine Diskretisierung eines kontinuierlichen  $y$

$$\text{mit } \hat{y}_{ij} = \int_{[ih_1, (i+1)h_1] \times [jh_2, (j+1)h_2]} y(x) dx$$

Typische Aufgaben:

Entrauschen: Rekonstruiere  $y$  aus Rauschbehafteter Messung, z.B.

$$y^\delta = y + n^\delta$$

(additives Rauschen, z.B. normalverteilt)

$$y^\delta = y \cdot n^\delta$$

(multiplikatives Rauschen, z.B. Gammaverteilt)

$$y^\delta = n^\delta(y)$$

(z.B. Poissonrauschen)

Entfaltung:  $x = \text{Ursprungsbild}, Ax(z) = \int_{\mathbb{R}^d} k(z, \hat{z}) x(\hat{z}) d\hat{z}$   
 $k = \text{Integral-}/\text{Faltungskern}, z.B. \text{Gaußkern } k(a, b) = c \exp\left(-\frac{|a-b|^2}{\sigma^2}\right)$

Bei sog. blind deconvolution ist auch  $k$  unbekannt und muss gefunden werden.

Thm: Der Operator  $A: L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d), Ax = G * x = \int_{\mathbb{R}^d} x(z) g(-z) dz$  mit  $g(z) = e^{-\frac{|z|^2}{\sigma^2}}$

ist linear und stetig. Das inverse Problem  $Ax = y$

- a) besitzt i.A. keine Lsg.,
- b) wenn eine Lsg. existiert, ist sie eindeutig,
- c) aber nicht stetig in  $y$ .

$$\text{Bew: } |Ax(s)| = \int_{\mathbb{R}^d} x(s-z) \overline{g(z)} \overline{g(z)} dz \leq \|x(s-\cdot) \overline{g}\|_{L^2} \|\overline{g}\|_{L^2}$$

$$\Rightarrow \|Ax\|_{L^2}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} x(s-z)^2 G(z) dz \|G\|_{L^1} ds$$

$$= \|G\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} x(s-z)^2 ds G(z) dz$$

$$= \|x\|_{L^2}^2 \|G\|_{L^1}^2 \quad (\text{Youngsche Faltungssatz})$$

a)  $Ax$  ist unendlich oft differenzierbar ( $D^n(G * x) = (D^n G) * x$ )  
 $\Rightarrow$  ist  $y$  nicht differenzierbar, hat  $Ax = y$  keine Lsg.

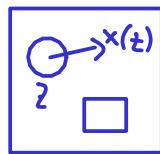
b) Faltungssatz:  $y = Ax \Leftrightarrow \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{G} \Leftrightarrow x = (\hat{y}/\hat{G})^\vee$

c) Plancherel:  $\|x\|_{L^2} = \|\hat{x}\|_{L^2} = \|\hat{y}/\hat{G}\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  trotz  $\|y\|_{L^2} = \|\hat{y}\|_{L^2} = 1$   
 für  $\hat{y} = \chi_{n e_1 + [0,1]^d}$ , da  $\hat{G}(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$   $\square$

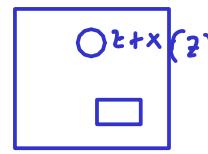
Bewegungsschätzung: Gegeben zwei Bilder, suche Verschiebungsvektorfeld zwischen beiden

Brightness-Constancy-Assumption:  $y_1(z) = y_2(z + x(z))$

Verschiebungsfeld  $x$  ist gesucht



$y_1$



$y_2$

$$y_2(z + x(z)) \approx y_2(z) + \nabla y_2(z) \cdot x(z)$$

$\Rightarrow$  lineares nicht-eindeutiges invertiertes Problem

$$\nabla y_2 \cdot x = y_1 - y_2$$

# Lineare Integralgleichungen & kompakte Operatoren

Def: Seien  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n, \Omega \subset \mathbb{R}^d$  messbar und  $\Sigma \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  messbar. Der lineare Integraloperator mit Integralkern  $k$  ist definiert für messbare Funktionen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{als } Ku : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}, \quad (Ku)(x) = \int_{\Omega} k(x, y) u(y) dy$$

Bsp: Sei  $\Sigma = \Omega = [0, 1]$ ,  $k(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$$\text{Dann ist } (Ku)(x) = \int_0^x k(x, y) u(y) dy = \int_0^x u(y) dy.$$

Bsp: Sei  $\Sigma = \Omega = \mathbb{R}^d$ ,  $k(x, y) = G(x-y)$  für eine messbare Funktion  $G : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dann ist  $Ku = G*u$ .

Thm: Seien  $\Sigma, \Omega$  offen & beschränkt und  $k \in L^q(\Sigma \times \Omega)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ .

Dann ist  $K : L^p(\Omega) \rightarrow L^r(\Sigma)$ ,  $(Ku)(x) = \int_{\Sigma} k(x, y) u(y) dy$  wohldefiniert und stetig  $\|Ku\|_{L^r} \leq C \|k\|_{L^q} \|u\|_{L^p}$

$$\begin{aligned} \|Ku\|_{L^r}^r &= \int_{\Sigma} \left| \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} k(x, y) u(y) dy \right|^r dx \leq |\Sigma|^{r-1} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} |k(x, y)|^r |u(y)|^r dy dx \\ &\leq |\Sigma|^{r-1} \left( \int_{\Sigma \times \Sigma} |k(x, y)|^r dy dx \right)^{r/4} \left( \int_{\Sigma \times \Sigma} |u(y)|^{r/p} dy dx \right)^{r/p} \\ &= |\Sigma|^{r-1} |\Sigma|^{r/p} \|k\|_{L^q}^r \|u\|_{L^p}^r \end{aligned}$$

□

Thm: (Young) Sei  $\Sigma = \Omega = \mathbb{R}^d$ ,  $k(x, y) = G(x-y)$  für ein  $\in L^q(\mathbb{R}^d)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ .

Dann ist  $K : L^p(\Omega) \rightarrow L^r(\Sigma)$ ,  $(Ku)(x) = \int_{\Sigma} k(x, y) u(y) dy$  wohldefiniert und stetig  $\|Ku\|_{L^r} \leq \|G\|_{L^q} \|u\|_{L^p}$

$$\begin{aligned} |u * g(x)| &\leq \int_{\Sigma} (|u(x-y)|^r |G(y)|^q)^{1/r} |u(x-y)|^{1-p/r} |G(y)|^{1-q/r} dy \\ &\leq \underbrace{\left\| (|u(x-\cdot)|^p |G|^q)^{1/r} \right\|_{L^r}}_{= \left( \int_{\Sigma} |u(x-y)|^p |G(y)|^q dy \right)^{1/r}} \|u\|_{L^p}^{1-p/r} \underbrace{\|G\|_{L^q}^{1-q/r}}_{= \|G\|_{L^q}^{1-q/r}} \\ &= \|u * g\|_{L^r}^r = \int_{\Sigma} |u * g|^r dx \leq \|u\|_{L^p}^{r-p} \|g\|_{L^q}^{r-q} \underbrace{\int_{\Sigma} \int_{\Sigma} |u(x-y)|^p |G(y)|^q dy dx}_{= \iint |u(x-y)|^p |G(y)|^q dy dx} \\ &= \|u\|_{L^p}^r \|g\|_{L^q}^q \end{aligned}$$

□

Def: Seien  $X, Y$  Banachräume. Ein linearer Operator  $K: X \rightarrow Y$  heißt kompakt, wenn für jede beschränkte Menge  $B \subset X$  das Bild  $K(B)$  präkompakt in  $Y$  ist (d.h.  $K(B)$  ist kompakt).

Kor:  $K$  kompakt  $\Leftrightarrow$  für jede beschränkte Folge  $x_n \in X$  besitzt  $Kx_n$  eine konvergente Teilfolge.

Bew:  $\Rightarrow$  wähle  $B = \{x_1, x_2, \dots\} \Rightarrow \overline{\{Kx_1, Kx_2, \dots\}}$  ist kompakt  $\stackrel{\text{metrischer Raum}}{\Rightarrow}$  folgenkompakt  
 $\Leftarrow$  jede Folge  $x_n \in B$  ist beschränkt  $\Rightarrow$   $\exists$  konvergente Teilfolge von  $Kx_n$   
 $\Rightarrow \overline{K(B)}$  ist folgenkompakt und somit kompakt.  $\square$

Kor: Sei  $X$  reflexiv (d.h.  $X^{**} = X$ ).  $K$  kompakt  $\Leftrightarrow$  aus  $x \rightarrow x$  folgt  $Kx \rightarrow Kx$ .

Bew:  $\Rightarrow x_n$  ist beschränkt  $\Rightarrow Kx_n \rightarrow y \in Y$  (und somit auch  $Kx_n \rightarrow y$ ) für Teilfolge  
außerdem  $Kx_n \rightarrow Kx$ , also  $y = Kx$ .  
Sei nun  $x_n$  Teilfolge mit  $\|Kx_n - y\|_Y > c > 0$ , dann hat  $Kx_n$  wieder  
konvergente Teilfolge  $Kx_n \rightarrow z \neq y$  und  $z = Kx$   $\Rightarrow$  ganze Folge konvergiert  
 $\Leftarrow$  Banach-Alaoglu: jede beschränkte Folge  $x_n$  hat schwach kono. Teilfolge  
 $\leadsto$  nutze voriges Korollar.  $\square$

Kor: Sei  $K$  ein linearer stetiger Operator mit endlichdimensionalem Bild, dann ist  $K$  kompakt.

Bew: Für beschränktes  $B$  ist  $KB$  beschränkt und endlich-dimensional und somit präkompakt nach dem Satz von Heine-Borel.  $\square$

Thm: Seien  $X, Y, Z$  Banachräume,  $K$  und  $L$  lineare Operatoren.

- $K, L: X \rightarrow Y$  kompakt  $\Rightarrow K+L$  kompakt
- $K: X \rightarrow Y$  kompakt,  $a$  reell  $\Rightarrow aK$  kompakt
- $K: X \rightarrow Y$  oder  $L: Y \rightarrow Z$  kompakt  $\Rightarrow LK: X \rightarrow Z$  kompakt

Bew: a) Sei  $x_n$  beschränkt  $\Rightarrow Kx_{n_k} \rightarrow y \in Y$  für Teilfolge  $x_{n_k}$ ;  
 $x_{n_k}$  beschränkt  $\Rightarrow Lx_{n_k} \rightarrow \tilde{y} \in Y$  für Teilfolge  $x_{n_k}$   
 $\Rightarrow (K+L)x_{n_k} \rightarrow y + \tilde{y}$   
b) trivial  
c) Fall  $K$  kompakt: Sei  $x_n$  beschränkt  $\Rightarrow Kx_n \rightarrow y \in Y$  für Teilfolge  
 $\Rightarrow LKx_n \rightarrow Ly$  für gleiche Teilfolge  
Fall  $L$  kompakt: Sei  $x_n$  beschränkt  $\Rightarrow Kx_n$  beschränkt  
 $\Rightarrow LKx_n$  hat konvergente Teilfolge  $\square$

Kor: Die Menge der kompakten Operatoren  $K: X \rightarrow X$  auf einem Banachraum  $X$  bildet ein Ideal im Ring der beschränkten linearen Operatoren  $X \rightarrow X$ .

Kompaktheit kann man durch Approximation mit kompakten Operatoren nachweisen (Fredholm hat kompakte Operatoren als Grenzwerte von Operatoren mit endlichem Rang betrachtet, 1900 die Nutzung und Untersuchung der Kompaktheitsbedingung stammt von Frigyes Riesz, 1918).

Thm: Seien  $X, Y$  Banachräume und  $K_n : X \rightarrow Y$  eine Folge kompakter Operatoren mit  $K_n \rightarrow K$ . Dann ist  $K$  kompakt.

Bew:

- Sei  $x_k \in X$  beschränkt,  $\|x_k\|_X \leq c < \infty \quad \forall k$
- Sei  $I_1 \subset \{x_1, x_2, \dots\}$  eine Teilfolge mit  $\lim_{k \rightarrow \infty, x_k \in I_1} K_n x_k$  existiert,
- $I_2 \subset I_1$  eine mit  $\lim_{k \rightarrow \infty, x_k \in I_2} K_n x_k$  existiert,
- $I_n \subset I_{n-1}$  eine mit  $\lim_{k \rightarrow \infty, x_k \in I_n} K_n x_k$  existiert
- Sei  $z_k$  das  $k$ -te Element von  $I_n$ , dann existiert  $\lim_{k \rightarrow \infty} K_n z_k \quad \forall n$
- $K z_k$  ist Cauchy, denn sei  $\varepsilon > 0$ ,
- dann wähle  $n$  so, dass  $\|K_n - K\| \leq \frac{\varepsilon}{3c}$ ,
- und  $N \in \mathbb{N}$ , dass  $\|K_n z_l - K_n z_m\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall m, l > N$
- $\Rightarrow \|K z_l - K z_m\|_Y \leq \underbrace{\|K z_l - K_n z_l\|_Y + \|K_n z_l - K_n z_m\|_Y + \|K_n z_m - K z_m\|_Y}_{\leq \|K - K_n\| \|z_l\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{3}} \leq \frac{\varepsilon}{3} \leq \frac{\varepsilon}{3}$   $\square$

Thm: Seien  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen & beschränkt und  $k \in L^q(\Sigma \times \Omega)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ ,  $q < \infty$ .

Dann ist  $K : L^p(\Omega) \rightarrow L^r(\Sigma)$ ,  $(K_n)(x) = \int_{\Omega} k(x, y) u(y) dy$  kompakt.

Bew:

- OBdA dürfen wir annehmen  $k$  sei Lipschitz mit  $|k(x_1, y_1) - k(x_2, y_2)| \leq L \left| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right|$
- $C^{0,1}(\mathbb{R}^{n+d})$  ist dicht in  $L^q(\Sigma \times \Omega) \subset L^q(\mathbb{R}^{n+d})$
- Sei  $k_n \in C^{0,1}(\mathbb{R}^{n+d})$  mit  $k_n \xrightarrow{L^q} k$ ,  $K_n u(x) = \int_{\Omega} k_n(x, y) u(y) dy$
- $\|k_n - k\| \leq C \|k_n - k\|_{L^q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
- Falls  $K_n$  kompakt, dann somit auch  $K$
- approximiere  $K$  durch  $K_n$  mit endlich-dim. Bild
- Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $(\Omega_i^n)$  endliche Zerlegung von  $\Omega$  mit  $\text{diam}(\Omega_i^n) \leq \frac{1}{n}$
- setze  $\varphi_i^n(x) = \int_{\Omega_i^n} k(x, y) dy / |\Omega_i^n|$  (Durchschnitt)
- $\varphi_i^n(y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } y \in \Omega_i^n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
- $k_n(x, y) = \sum_i \varphi_i^n(x) \varphi_i^n(y)$
- $|k_n(x, y) - k(x, y)| = |\varphi_i^n(x) - k(x, y)| = \left| \int_{\Omega_i^n} \frac{k(x, z) - k(x, y)}{|\Omega_i^n|} dz \right| \leq \frac{1}{n} \text{ für } y \in \Omega_i^n$
- $\Rightarrow k_n \xrightarrow{L^q} k$ ,  $K_n \rightarrow K$  mit  $K_n u(x) = \int_{\Omega} k_n(x, y) u(y) dy$
- $K_n u = \sum_i \varphi_i^n \int_{\Omega_i^n} u(y) dy \in \text{span}\{\varphi_1^n, \varphi_2^n, \dots\} \Rightarrow K_n \text{ kompakt} \Rightarrow K \text{ kompakt} \square$

Die Beschränktheit der Gebiete ist wichtig für die Kompaktheit.

Thm: Sei  $\Sigma = \Omega = \mathbb{R}^d$ ,  $k(x, y) = G(x-y)$  für ein  $GL^q(\mathbb{R}^d)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ .

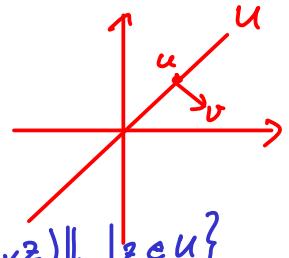
Dann ist  $K: L^p(\Omega) \rightarrow L^r(\Sigma)$ ,  $(Ku)(x) = \int_{\Omega} k(x, y) u(y) dy$  nicht kompakt.

Bew: HA (konstruiere eine Folge  $u_n \in L^p(\Omega)$  durch Translation einer festen Funktion und zeige, dass  $Ku_n$  keine konvergente Teilfolge enthält)  $\square$

Wir zeigen nun, dass kompakte Operatoren keine stetige Inverse besitzen.

Thm: (Fast orthogonales Element/Riezsches Lemma) Sei  $X$  ein Banachraum und  $U \subsetneq X$  ein abgeschlossener Teilraum. Dann gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $x \in X$  mit  $\|x\|_X = 1$  und  $\text{dist}(x, U) = \inf\{\|x - u\|_X \mid u \in U\} > 1 - \varepsilon$ .

Bew: • wähle  $v \in X \setminus U$  und  $u \in U$  mit  $\|v - u\|_X < \frac{\text{dist}(v, U)}{1 - \varepsilon}$



• setze  $x = \frac{v - u}{\|v - u\|_X}$ , dann ist  $\|x\|_X = 1$  und

$$\begin{aligned} \text{dist}(x, U) &= \inf \left\{ \left\| \frac{v - u}{\|v - u\|_X} - z \right\|_X \mid z \in U \right\} = \frac{1}{\|v - u\|_X} \inf \left\{ \|v - (u + \|v - u\|_X z)\|_X \mid z \in U \right\} \\ &= \frac{1}{\|v - u\|_X} \text{dist}(v, U) > 1 - \varepsilon \end{aligned} \quad \square$$

Kor: Sei  $X$  ein unendlich-dimensionaler Banachraum, dann existiert eine Folge  $x_n \in X$  mit  $\|x_n\|_X = 1$  und  $\|x_m - x_n\|_X \geq \frac{1}{2}$  für alle  $m \neq n$  (die Folge besitzt also keinen Häufungspunkt).

Insbesondere ist die abgeschlossene Einheitskugel in  $X$  nicht kompakt, und die Identität auf  $X$  ist kein kompakter Operator.

Bew: • wähle  $x_n \in X$  mit  $\|x_n\|_X = 1$

• wähle  $x_n \in X \setminus \text{span}\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$  mit  $\|x_n\|_X = 1$  &  $\text{dist}(x_n, \text{span}\{x_1, \dots, x_{n-1}\}) > \frac{1}{2}$   $\square$

Thm: Sei  $X$  ein unendlich-dimensionaler Banachraum,  $Y$  Banachraum und  $K: X \rightarrow Y$  kompakt. Dann besitzt  $K$  keine stetige Inverse, insbesondere ist das inverse Problem  $Kx = y$  schlechtgestellt.

Bew: • Sei  $x_n$  die vorige Folge &  $y_n = Kx_n$

•  $K$  kompakt  $\Rightarrow \exists$  konvergente Teilfolge  $y_{n_k} \rightarrow y \in Y$

•  $x_{n_k} = K^{-1}y_{n_k}$  konvergiert jedoch nicht  $\square$

Bem: Manchmal hat man auf bestimmten Teilräumen des Bildes eine stetige Inverse (man spricht von bedingter Stabilität): Seien  $X, Y$  Hilberträume,  $K: X \rightarrow Y$  stetig,  $x = Kw$ ,  $y = Ky$ ,  $i=1, 2$ , dann gilt

$\|x_1 - x_2\|_X^2 = (x_1 - x_2, x_1 - x_2) = (x_1 - x_2, K^*(w_1 - w_2)) = (y_1 - y_2, w_1 - w_2) \leq \|y_1 - y_2\|_Y (\|w_1\|_Y + \|w_2\|_Y)$

$\Rightarrow$  Für  $W_C = \{x \in X \mid x = K^*w, \|w\|_Y < C\}$  hat  $K: W_C \rightarrow KW_C$  eine Hölder-stetige Inverse.

Im Folgenden betrachten wir das Spektrum von kompakten Operatoren  $K: X \rightarrow X$  und ihre Singulärwertzerlegung. Ähnlich wie bei Matrizen sagen die Größenunterschiede der Singulärwerte etwas über die Stabilität der Invertierung aus.

Def: Sei  $X$  normierter  $\mathbb{C}$ -Vektorraum,  $K: X \rightarrow X$  linear und beschränkt.

Das Spektrum von  $K$  ist die Menge  $\sigma(K) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - K \text{ hat keine stetige Inverse}\}$ . Ein Eigenwert von  $K$  ist ein  $\lambda \in \sigma(K)$ , sodass ein zugehöriger Eigenvektor  $x \in X$  existiert mit  $Kx = \lambda x$ .

Thm: (1. Rieszscher Satz) Sei  $X$  normierter Vektorraum,  $K: X \rightarrow X$  linear und kompakt.

Dann ist der Kern von  $I - K$  endlichdimensional.

Bew: - Annahme:  $\ker(I - K)$  sei unendlichdimensional

- sei  $x_n \in \ker(I - K)$  beschränkte Folge, die keine konvergente Teilfolge besitzt (Riesz-Lemma)
- $x_n = Kx_n$  besitzt jedoch konvergente Teilfolge  $\downarrow$

□

Thm: (2. Rieszscher Satz) Sei  $X$  normierter Vektorraum,  $K: X \rightarrow X$  linear und kompakt.

Dann ist  $\text{Bild}(I - K)$  abgeschlossen.

Bew: - sei  $y \in X$  mit  $(I - K)x_n \rightarrow y$

- setze  $x_n = \underset{x \in X}{\operatorname{argmin}} \{ \|x\|^2 \mid x \in \ker(I - K) \}$ , dann gilt auch  $(I - K)x_n \rightarrow y$
- $x_n$  ist wohldefiniert: es minimiert ein strikt konkav, koerzives Funktional auf einem endlich-dimensionalen Teilraum (1. Riesz-Satz)
- $x_n$  ist beschränkt: Andernfalls

$$\begin{aligned} & (I - K)x_n / \|x_n\| \rightarrow 0 \\ & Kx_n / \|x_n\| \rightarrow z \text{ für Teilfolge} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x_n}{\|x_n\|} \rightarrow z \text{ & } (I - K)z = 0 \\ & \Rightarrow 1 = \frac{\text{dist}(x_n, \ker(I - K))}{\|x_n\|} \leq \frac{\|x_n - \|x_n\|z\|}{\|x_n\|} = \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - z \right\| \rightarrow 0 \downarrow \end{aligned}$$

- entlang einer Teilfolge gilt  $Kx_n \rightarrow z$ , folglich  $\|x_n - y - z\| \leq \|x_n - Kx_n - y\| + \|Kx_n - z\| \rightarrow 0$
- Stetigkeit von  $(I - K) \Rightarrow y = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - K)x_n = (I - K)(y + z)$

□

Thm: (3. Rieszscher Satz) Sei  $X$  normierter Vektorraum,  $K: X \rightarrow X$  linear und kompakt.

Dann existiert ein  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , sodass

$$\ker((I - K)^\ell) \subsetneq \ker((I - K)^{\ell+1}), \quad \text{Bild}((I - K)^\ell) \supsetneq \text{Bild}((I - K)^{\ell+1}), \quad \ell < r$$

$$\ker((I - K)^\ell) = \ker((I - K)^{\ell+1}), \quad \text{Bild}((I - K)^\ell) = \text{Bild}((I - K)^{\ell+1}), \quad \ell \geq r$$

$$\text{Außerdem } X = \ker((I - K)^r) \oplus \text{Bild}((I - K)^r)$$

Bew: - setze  $V_\ell = \text{Bild}((I - K)^\ell)$

- $V_\ell \supset V_{\ell+1}$  per definitionem
- $V_\ell = V_{\ell+1} \Rightarrow V_\ell = V_m \text{ für alle } m > \ell$
- Annahme:  $V_\ell \neq V_m \text{ für alle } \ell$

- sei  $x_\ell \in V_\ell$  mit  $\|x_\ell\| = 1$  und  $\text{dist}(x_\ell, V_{\ell+1}) \geq 1$  (Riesz-Lemma)

$$- \|Kx_\ell - Kx_m\| = \|x_\ell - x_m - (I - K)(x_\ell - x_m)\| = \underbrace{\|x_\ell - x_m\|}_{\in V_{\ell+1}} + \underbrace{\|(I - K)(x_\ell - x_m)\|}_{\leq 1} \quad \text{für alle } m \geq \ell$$

$\Rightarrow Kx_\ell$  hat keine konvergente Teilfolge  $\downarrow$

- HA: zeige Eigenschaft für  $\gamma = \ker((I - K)^r)$  auf gleiche Art

- $\dim(\ker(I-K)^\ell) = \dim(\text{coker}(I-K)^\ell)$  für alle  $\ell$ 
  - es reicht, dies für  $\ell=1$  zu zeigen (denn  $(I-K)^\ell = I-L$  für einen kompakten Operator  $L$ )
  - es reicht, dies für  $I-K$  injektiv zu zeigen, denn sei  $\dim(\ker(I-T)) = \dim(\text{coker}(I-T))$  für jedes kompakte  $T$  mit  $I-T$  injektiv, dann:
    - $Y = \ker((I-K)^\ell) = \ker((I-K)^{\ell+1})$  erfüllt  $(I-K)Y \subseteq Y$ , also  $KY \subseteq Y$
    - setze  $Z = X/Y$  mit Norm  $\|z\|_Z = \inf\{\|x\|_X \mid x \in z+Y\}$
    - $K$  induziert einen kompakten Operator  $T: Z \rightarrow Z$
    - $I-T$  ist injektiv, sonst gäbe es  $y \in Y$  mit  $(I-K)y \in Y$ , also  $y \in \ker((I-K)^{\ell+1}) = Y$
    - setze  $L: Y \rightarrow Y$ ,  $L = (I-K)|_Y$ , dann  $\ker(I-K) = \ker L$
    - $\dim(\ker(I-K)) = \dim(\ker L) = \dim(\text{coker } L)$ , da  $Y$  endlich-dimensional (1. Riesz-Satz)
      - =  $\dim(\text{coker}(I-K))$ , da  $\dim(\text{coker}(I-T)) = \dim(\ker(I-T)) = 0$
  - noch z.z. (für  $I-K$  injektiv):  $\text{coker}(I-K) = \{0\}$ , d.h.  $I-K$  surjektiv.
    - Annahme:  $\text{Bild}(I-K) \neq X$ , dann auch  $\text{Bild}((I-K)^\ell) \neq \text{Bild}((I-K)^{\ell+1})$  für alle  $\ell$ 
      - denn sonst gäbe es für jedes  $y \in X$  ein  $x \in X$  mit  $(I-K)^\ell y = (I-K)^\ell x$ 
 $\Rightarrow (I-K)^\ell y = (I-K)^{\ell+1} x \Rightarrow \dots \Rightarrow (I-K)y = x$
- entweder  $\ker(I-K) = \ker(I-K)^{\ell+1}$  &  $\text{Bild}(I-K) = \text{Bild}(I-K)^{\ell+1}$  oder  $\ker(I-K) \neq \ker(I-K)^{\ell+1}$  &  $\text{Bild}(I-K) \neq \text{Bild}(I-K)^{\ell+1}$  (sonst Widerspruch zu vorigem Punkt)
 $\Rightarrow$  kritischer Exponent  $r$  ist derselbe für Kern und Bild
- Sei  $0 = \alpha + \beta$  mit  $\alpha \in \ker(I-K)^r$ ,  $\beta \in (I-K)^r$   $\Rightarrow 0 = (I-K)^\ell \alpha + (I-K)^\ell \beta = (I-K)^{2r}$ 
 $\Rightarrow \beta \in \ker((I-K)^{2r}) = \ker((I-K)^r) \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ 
 $\dim \ker((I-K)^r) = \dim \text{coker}((I-K)^r) \quad X = \ker((I-K)^r) \oplus \text{Bild}((I-K)^r)$   $\square$

Thm: (Schauders Satz) Seien  $X, Y$  Banachräume,  $K: X \rightarrow Y$  linear.  $K$  kompakt  $\Leftrightarrow K^*$  kompakt.

Bew:  $\Rightarrow$ : Sei  $B_{Y^*}$  der abgesch. Einheitsball in  $Y^*$ ,  $B_X$  der in  $X$ .

- $B_{Y^*}$  ist gleichmäßig stetig, da  $|\langle Ky, y \rangle - \langle y, \tilde{y} \rangle| \leq \|y\| \|y - \tilde{y}\| \leq \|y - \tilde{y}\| \forall y, \tilde{y} \in B_{Y^*}$
- Sei  $E = \overline{K B_X}$  und  $B = \{y' \mid y \in B_X\}$  & bemerke, dass  $E$  kompakt
- Sei  $y'_n \in B_{Y^*}$  Folge  $\xrightarrow{\text{Arzela-Ascoli}}$   $\exists$  gleichmäßig konvergente Teilfolge  $y'_n \xrightarrow{E} y' \in E$
- $\Rightarrow K^* y'_n$  ist Cauchy (und somit  $K^*$  kompakt), denn

$$\|K^* y'_n - K^* y'_m\| = \sup_{x \in B_X} |\langle K^* y'_n, x \rangle - \langle K^* y'_m, x \rangle| = \sup_{z \in E} |\langle y'_n, z \rangle - \langle y'_m, z \rangle| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

$\Leftarrow$ : Sei  $i: X \rightarrow X^{**}$ ,  $j: Y \rightarrow Y^{**}$  die Inklusion

- Es gilt  $K^{**}$  kompakt (nach  $\Rightarrow$ ) und  $K^{**} \circ i = j \circ K$
- $j K B_X = K^{**} i B_X \subset K^{**} B_{X^{**}}$ , letzter ist präkompakt in  $Y^{**}$
- $\Rightarrow K B_X$  ist präkompakt in  $Y$

Thm: (Satz von der beschränkten Inversen) Seien  $X, Y$  Banachräume.

Ein bijektiver, linearer, stetiger Operator  $L: X \rightarrow Y$  hat eine stetige Inverse.

Bew:  $L$  ist surjektiv und somit nach dem Satz der offenen Abbildung offen.

Somit sind die Urbilder  $L^{-1}$  offener Mengen  $U \subset Y$  wieder offen.  $\square$

Thm: Sei  $X$  unendlichdimensionaler Banachraum und  $K: X \rightarrow X$  kompakt.

1)  $0 \notin \beta(K)$

2)  $\lambda \in \beta(K) \setminus \{0\} \Rightarrow \lambda$  ist Eigenwert von  $K$  mit endlicher geom. Vielfachheit  $\dim(\ker(I - \lambda K))$

3)  $\beta(K)$  ist abzählbar mit 0 als einzigm Häufungspunkt

Bew: 1) bereits gezeigt

3. Riesz-Satz

Satz beschr. Inverser

2) Sei  $\lambda$  kein Eigenwert, d.h.  $\ker(I - \lambda K) = \{0\}$   $\Rightarrow$  Bild  $(I - \lambda K) = X$   $\Rightarrow$   $(I - \lambda K)^{-1}$  ist stetig  
 $\dim(\ker(I - \lambda K)) = \dim(\ker(I - \lambda K)) = 0$  bereits gezeigt. 1. Riesz-Satz

3) Sei  $\lambda_n \in \beta(K)$  paarweise verscl. mit  $\lambda_n \rightarrow \lambda \neq 0$  und Eigenvektoren  $x_n \in X$ .

Sei  $X_n = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$  und wähle  $z_n \in X_n$  mit  $\|z_n\|=1$ ,  $\text{dist}(z_n, X_{n-1}) > \frac{1}{2}$ . Riesz-Lemma

Dann enthält  $Kz_n$  keine konverg. Teilfolge ( $\Rightarrow$   $\emptyset$ ), denn

$$\text{se: } z_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \Rightarrow Kz_n - \lambda_n z_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_n) x_i \in X_{n-1}$$

$$\|Kz_n - Kz_m\| = \|\lambda_n z_n - \underbrace{(Kz_m - (\lambda_n z_n))}_{\in X_{n-1}}\| \geq \text{dist}(\lambda_n z_n, X_{n-1}) > \frac{\lambda_n}{2} \quad \forall m < n.$$

-  $\beta(K) \subset \overline{B_{\|K\|}(0)} \subset \mathbb{C}$  & 0 ist einziger Häufungspunkt

$\Rightarrow \beta(K) \setminus \overline{B_{\frac{\lambda}{2}}(0)}$  ist endlich  $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$  alle Elemente können durchnummiert werden  $\square$

Von nun an seien  $X, Y$  Hilberträume, sodass  $X^* = X$  und  $Y^* = Y$ . Dann können wir  $K^*K$  und  $KK^*$  bilden. Wie bei Matrizen auch werden die Singulärwerte sein  $\beta_i = \sqrt{\lambda_i}$  für  $\lambda_i$  die Eigenwerte des positiv semidefiniten symmetrischen Operators  $K^*K: X \rightarrow X$ . Der größte Singulärwert ist dabei  $\|K\|$ .

Thm: Seien  $X, Y$  Hilberträume,  $K: X \rightarrow Y$  linear und kompakt. Es gibt  $x \in X$  mit  $\|x\|=1$  und  $\|Kx\|=\|K\|$

Bew: - Sei  $y \in Y$  mit  $\|y\|=1$  und  $\|K^*y\| \rightarrow \|K^*\| = \|K\|$

-  $K^*y_n \rightarrow z \in X$  entlang einer Teilfolge (da  $K^*$  kompakt), und  $\|z\| = \lim \|K^*y_n\| = \|K\|$

-  $\|K^*y_n\|^2 = (y_n, KK^*y_n) \leq \|KK^*y_n\| \leq \|K\|^2$ , folglich  $\|KK^*y_n\| \rightarrow \|K\|^2$

- setze  $x = z/\|z\|$ , dann  $\|Kx\| = \|Kz\|/\|z\| = \lim \|KK^*y_n\|/\|K\| = \|K\|$   $\square$

Def: Seien  $X, Y$  Hilberträume,  $K: X \rightarrow Y$  linear und kompakt. Die Singulärwerte von  $K$  sind

$$\beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3 \geq \dots \geq 0$$

wobei  $(\beta_n)$  die Eigenwerte von  $K^*K$  sind, gezählt mit geom. Vielfachheit. Die rechten Singulärvektoren von  $K$  sind die zugehörigen normierten Eigenvektoren  $u_n \in X$ , die linken Singulärvektoren sind  $v_n = K u_n / \|K u_n\|$  (für  $\beta_n > 0$ ).

Thm: (Singulärwertzerlegung) Seien  $X, Y$  Hilberträume,  $K: X \rightarrow Y$  linear und kompakt.

1)  $v_n$  ist Eigenvektor zu Eigenwert  $\sigma_n^2$  für  $KK^*$ .

2)  $b_n(K^*K) = b_n(KK^*)$ , und die Eigenräume zu  $b_n^2$  für  $KK^*$  und  $KK^*$  haben dieselbe Dimension.

3)  $Ku_n = \sigma_n v_n$  und  $K^*v_n = \sigma_n u_n$  für alle  $n$ .

4)  $\{u_n\}$  bzw.  $\{v_n\}$  sind vollständige Orthonormalsysteme in

$\overline{\text{Bild}(K^*K)} = \overline{\text{Bild}(K^*)} = \ker(K)$  bzw.  $\overline{\text{Bild}(KK^*)} = \overline{\text{Bild}(K)}$

(sofern Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert orthogonal gewählt wurden).

Bew: 1)  $KK^*v_n = K(K^*Ku_n) / \|Ku_n\| = \sigma_n^2 Ku_n / \|Ku_n\| = \sigma_n^2 v_n$

2) nach 1) existiert zu jedem Eigenvektor zum Eigenwert  $\sigma_n^2$  von  $KK^*$  einer von  $KK^*$  mit gleichem Eigenwert.

Auf gleiche Art erhält man zu jedem Eigenvektor  $v$  von  $KK^*$  einen Eigenvektor  $K^*v / \|K^*v\|$  von  $K^*K$  mit gleichem Eigenwert.

Außerdem sind  $K$  bzw.  $K^*$  injektiv auf den Eigenräumen von  $KK^*$  bzw.  $KK^*$ .

3)  $\|Ku_n\|^2 = (Ku_n, Ku_n) = (u_n, K^*Ku_n) = \sigma_n^2 (u_n, u_n) = \sigma_n^2$

4)  $u$  und  $v$  sind normiert per definitionem

Orthogonalität für  $b_n \neq b_m$  folgt aus  $b_n^2 (u_n, u_m) = (K^*Ku_n, u_m) = (u_n, K^*Ku_m) = b_m^2 (u_n, u_m)$  (analog für  $v$ )

Sei  $U = \text{span}(u_1, u_2, \dots)$ , dann ist  $K^*K(\overline{U} \cap U^\perp)$ , denn sei  $(u_n, K^*Ku_n) \neq 0$  für ein  $u \in U^\perp$ ,

dann folgt  $0 \neq (K^*Ku_n, u) = b_n^2 (u_n, u) \neq 0$

$\Rightarrow K^*: \overline{KU^\perp} \rightarrow U^\perp$

$\Rightarrow$  Wir können  $K$  auffassen als kompakten Operator  $L: U^\perp \rightarrow \overline{KU^\perp}$  mit adjungiertem Operator  $L^*: \overline{KU^\perp} \rightarrow U^\perp$

$\Rightarrow \exists u \in U^\perp$  mit  $\|u\|=1$ ,  $\|Lu\| = \|L\|$

$\Rightarrow \|L\|^2 = \|Lu\|^2 = (Lu, Lu) = (u, L^*Lu) \stackrel{(1)}{\leq} \|L^*Lu\| \leq \|L\|^2$ , und

(1) ist nur Gleichung, falls  $L^*Lu = \alpha u \Rightarrow u$  ist Eigenvektor zu Eigenwert  $\alpha = \|L\|^2$  von  $L^*L$  und somit  $K^*K$  ↴  $\square$

Kor:  $Kx = K \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle b_n v_n \quad \& K^*y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, v_n \rangle b_n u_n$

Kor: (Picard-Kriterium) Seien  $X, Y$  Hilberträume,  $K: X \rightarrow Y$  linear und kompakt,  $f \in \overline{\text{Bild}(K)} = \ker(K^*)^\perp$ .  
 $Ku=f$  hat genau dann eine Lösung, wenn  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\langle f, v_n \rangle)^2}{b_n^2} < \infty$ .

Bew:  $\Rightarrow$  Sei  $Ku=f$ , dann ist  $(f, v_n) = (Ku, v_n) = (u, K^*v_n) = b_n (u, u_n)$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\langle f, v_n \rangle)^2}{b_n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (u, u_n)^2 \leq \|u\|^2$

$\Leftarrow$ : Setze  $u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\langle f, v_n \rangle)}{b_n} u_n$ , dann ist  $Ku = \sum_{n=1}^{\infty} (\langle f, v_n \rangle) u_n = f$   $\square$

Def: Das inverse Problem  $Ku=f$  heißt

mildly ill-posed, wenn  $b_n = O(n^{-\alpha})$  für ein  $\alpha > 0$

severely ill-posed, wenn  $b_n = o(n^{-\alpha})$  für alle  $\alpha > 0$ .

Bsp: (Integration/Differentiation ist mildly ill-posed)

$$K : L^2([0,1]) \rightarrow L^2([0,1]), (Ku)(x) = \int_0^x u(s) ds$$

$$\Rightarrow (K^*v)(y) = \int_y^1 v(s) ds \Rightarrow ((K^*K)v)(x) = \int_x^1 \int_y^1 v(s) ds dy$$

Sei  $\beta^2$  Eigenwert von  $K^*K$  mit Eigenvektor  $u$ , d.h.  $w \equiv K^*Ku = \beta^2 u$ , dann ist

$$w''(s) = -w(s) = -\frac{w(s)}{\beta^2} \text{ mit } w'(0) = 0, w(1) = 0$$

$$\Rightarrow w(s) = \alpha \cos\left(\frac{s}{\beta}\right) \text{ mit } w(1) = 0 \Rightarrow \beta = \frac{2}{(2n-1)\pi} / u(s) = \frac{\alpha}{\beta^2} \cos\left(\frac{s}{\beta}\right)$$

$$\Rightarrow \beta_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Mit Hilfe der Singulärwerte können wir die Wirkung des Rauschens besser verstehen.

Sei  $K: X \rightarrow Y$  kompakt,  $Ku = f$ ,  $Ku^\delta = f^\delta$  rauschbehaftete Messung von  $f$ .

Es ist

$$\|u^\delta - u\|_X^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u^\delta - u, u_n \rangle^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f^\delta - f, u_n \rangle^2}{\beta_n^2}.$$

$\Rightarrow$  Messstörungen bei höheren, Frequenzen  $\frac{1}{\beta_n}$  (also Rauschanteile in  $\text{span}(u_n)$ ) werden stärker verstärkt.

## Verallgemeinerte Inverse

Die besondere Schwierigkeit bei kompakten Operatoren lag in der Instabilität (d.h. die Inverse war nicht stetig, dritte Bedingung der Wohlgestelltheit). Liegt das Problem hingegen in den ersten beiden Bedingungen der Wohlgestelltheit (Surjektivität und Injektivität), so kann man damit einfacher umgehen.

Def: Sei  $X$  Hilbertraum,  $M \subset X$  abgeschlossener Unterraum. Die orthogonale Projektion  $P_M: X \rightarrow M$  ist definiert durch  $(P_M x, v) = (x, v) \quad \forall v \in M$

Thm:  $P_M$  ist wohldefiniert, linear und stetig mit  $\|P_M\| \leq 1$ .

Bew: HA (Lax-Milgram)

□

Def: Seien  $X, Y$  Hilberträume,  $A: X \rightarrow Y$  linear und stetig,  $b \in Y$ .

- $x \in X$  heißt kleinste-Quadrat-Lösung von  $Ax = b$ , wenn  $\|Ax - b\|_Y \leq \|Az - b\|_Y \quad \forall z \in X$
- eine kleinste-Quadrat-Lösung  $x \in X$  heißt Minimum-Norm-Lösung von  $Ax = b$ , wenn  $\|x\| \leq \|z\|$  für alle kleinste-Quadrat-Lösungen  $z$ .

Thm: Es sind äquivalent:

- 1)  $x$  ist kleinste-Quadrat-Lösung
- 2)  $A^*Ax = A^*b$
- 3)  $Ax = P_{\text{Bild}(A)} b$

(wirkt  $A^*$  auf  $Ax = b$  an)  
( $b$  auf  $\text{Bild}(A)$ )

Bew: 1)  $\Rightarrow$  2): Optimalitätsbedingung:  $0 \frac{d}{dt} \|A(x+tz) - b\|^2 = (Ax - b, Az) = (A^*Ax - b, z) \quad \forall z \in X$

2)  $\Rightarrow$  3):  $2) \Rightarrow (Ax - b, Az) = 0 \text{ für alle } z \in X \Rightarrow (Ax - b, v) = 0 \text{ für alle } v \in \text{Bild}(A) \Rightarrow Ax = P_{\text{Bild}(A)} b$

3)  $\Rightarrow$  1):  $\|Az - b\|^2 = \|(Ax - b) + A(z - x)\|^2 = \|Ax - b\|^2 + \|A(z - x)\|^2, \text{ da } Ax \in \text{Bild}(A) \text{ und } A(z - x) \in \text{Bild}(A)$   
 $\geq \|Ax - b\|^2$   $\square$

Thm: Sei  $b \in \text{Bild}(A) \oplus \text{Bild}(A)^\perp$

- 1) Es existiert eine kleinste-Quadrat-Lösung.
- 2) Die Minimum-Norm-Lösung ist wohldefiniert.

(nicht auf ganz  $X$ !)

Bew: 1) Sei  $b = Ax + w$  mit  $w \in \text{Bild}(A)^\perp = \ker(A^*)$ ,

dann ist  $x$  eine kleinste-Quadrat-Lösung wegen  $A^*Ax = A^*(Ax + w) = A^*b$ .

2)  $x$  minimiert das strikt konvexe schwach unterhalbstetige Funktional  $\| \cdot \|^2$  auf der konvexen schwach abgeschlossenen nichtleeren Menge der kleinste-Quadrat-Lsgn.  $\square$

Def: Seien  $X, Y$  Hilberträume,  $A: X \rightarrow Y$  linear und stetig,  $B: \ker(A)^\perp \rightarrow \text{Bild}(A)$ ,  $Bx = Ax$ .

Die Moore-Penrose verallgemeinerte Inverse ist

$A^\dagger: \text{Bild}(A) \oplus \text{Bild}(A)^\perp \rightarrow \ker(A)^\perp$ ,

die eindeutige lineare Erweiterung von  $B^\dagger$  mit  $\ker(A^\dagger) = \text{Bild}(A)^\perp$ .

Thm: Die Moore-Penrose verallgemeinerte Inverse ist charakterisiert durch

- (a)  $AA^\dagger A = A$
- (b)  $A^\dagger A A^\dagger = A^\dagger$
- (c)  $A^\dagger A = I - P_{\ker(A)^\perp}$
- (d)  $A^\dagger A = P_{\text{Bild}(A)} \Big|_{\text{Bild}(A) \oplus \text{Bild}(A)^\perp}$

Bew: - (a) und (b) folgen aus (c) bzw. (d); (c) und (d) folgen direkt aus Definition von  $A^\dagger$ .

- Def.-bereich von  $A^\dagger$  folgt aus (d), Bildbereich aus (b) & (c),  $\ker(A^\dagger) = \text{Bild}(A)^\perp$  aus (b) & (d),  $A^\dagger = B^{-1}$  auf  $\ker(A)^\perp = \text{Bild}(A)$  aus (c)  $\Rightarrow \ker(A^\dagger) = \text{Bild}(A)^\perp$   $\square$

Thm: Sei  $b \in \text{Bild}(A) \oplus \text{Bild}(A)^\perp$ . Die Minimum-Norm-Lösung von  $Ax = b$  ist  $x^* = A^\dagger b$ , und die kleinste-Quadrat-Lösungen sind  $x^* + \ker(A)$ .

Bew: HA  $\square$

Bem: Ist  $K: X \rightarrow Y$  linear und kompakt mit Singulärwertzerlegung  $b_n, u_n, v_n$ , dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 (K^* b_n, u_n) u_n = K^* K K^* b_n = K^* P_{\ker(K^*)^\perp} b_n = K^* b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (b_n, v_n) v_n$$

und somit  $K^* b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (K^* b_n, u_n) u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b_n, v_n)}{\sigma_n} u_n$

## Lineare Regularisierung

Die Moore-Penrose verallgemeinerte Inverse  $K^*$  löst das inverse Problem  $Kx=y$  für  $y \in D(K^*) = \text{Bild}(K) \oplus \text{Bild}(K)^\perp$  und adressiert damit die Existenz- und Eindeutigkeitsprobleme eines schlecht gestellten inversen Problems. Jedoch ist  $K^*$  im Allgemeinen nicht stetig (nur, wenn 0 kein Häufungspunkt der Singulärwerte von  $K$  ist), sodass Messfehler in  $y$  die Lösung von  $Kx=y$  immer noch verhindern. Hierzu ist zusätzliche Regularisierung nötig.

Def: Eine Familie stetiger linearer Operatoren  $R_\alpha: Y \rightarrow X$ ,  $\alpha > 0$ , zusammen mit einer Vorschrift  $\alpha: (0, \infty) \times Y \rightarrow (0, \infty)$ ,  $(\delta, y^\delta) \mapsto \alpha(\delta, y^\delta)$

für die Wahl des Regularisierungsparameters heißt eine Regularisierung von  $K^*$ , wenn für jede Folge  $y^\delta$  mit  $\|y^\delta - y\| \leq \delta$  gilt

$$R_{\alpha(\delta, y^\delta)} y^\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} K^* y.$$

Die Parameterwahl heißt a-priori, wenn  $\alpha(\delta, y^\delta) = \alpha(\delta)$ , und sonst a-posteriori.

Regularisierungsoperatoren  $R_\alpha$  für  $K^*$  zu einem kompakten Operator  $K$  können mit Hilfe der Singulärwertzerlegung von  $K$  gewonnen werden, indem

$$K^* y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle y, v_n \rangle}{\sigma_n} u_n \quad \text{durch} \quad R_\alpha y = \sum_{n=1}^{\infty} g_\alpha(\sigma_n) \langle y, v_n \rangle u_n$$

für ein  $g_\alpha: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  approximiert wird. Um mit  $R_\alpha$  eine zulässige Regularisierung von  $K^*$  zu erhalten, sollte  $g_\alpha(t) \rightarrow 1/t$  für  $\alpha \rightarrow 0$ . Um die Konvergenz zu prüfen, wird der Fehler abgeschätzt

$$\|R_\alpha y^\delta - K^* y\| \leq \underbrace{\|R_\alpha y^\delta - R_\alpha y\|}_{\text{"fortgepflanzter Datenfehler"}} + \underbrace{\|R_\alpha y - K^* y\|}_{\text{"Approximationfehler"}}$$

Thm:  $g_\alpha: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  erfülle

- (1)  $\sup\{g_\alpha(t) \mid t \in (0, \infty)\} = \infty$  für alle  $\alpha > 0$ ,
- (2)  $\sup\{g_\alpha(t) \mid t > 0\} > 0$  für  $\alpha > 0$ ,
- (3)  $g_\alpha(t) \rightarrow 1/t$  für  $\alpha \rightarrow 0$  punktweise.

Dann ist für  $y \in D(K^*)$  und  $R_\alpha: Y \rightarrow X$ ,  $R_\alpha y = \sum_{n=1}^{\infty} g_\alpha(\sigma_n) \langle y, v_n \rangle u_n$   $R_\alpha$  stetig mit

$$\|R_\alpha\| \leq C_\alpha, \quad R_\alpha y \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} K^* y.$$

$$\text{Bew: } \cdot \|R_\alpha y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |g_\alpha(\sigma_n)|^2 |\langle y, v_n \rangle|^2 \leq C_\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, v_n \rangle|^2 = C_\alpha^2 \|y\|^2$$

$$\cdot \|R_\alpha y - K^* y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |g_\alpha(\sigma_n) - \frac{1}{\sigma_n}|^2 |\langle y, v_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |2g_\alpha(\sigma_n) - 1|^2 \left| \frac{\langle y, v_n \rangle}{\sigma_n} \right|^2$$

$$\cdot \text{Picard-Kriterium} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\langle y, v_n \rangle}{\sigma_n} \right|^2 < \infty$$

$$\cdot \text{Für } \varepsilon > 0 \text{ wähle } N \in \mathbb{N} \text{ mit } \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{\langle y, v_n \rangle}{\sigma_n} \right|^2 < \frac{\varepsilon}{2(1+\gamma)^2}$$

$$\text{und } \alpha_0 > 0 \text{ mit } \sum_{n=1}^N |2g_\alpha(\sigma_n) - 1|^2 \left| \frac{\langle y, v_n \rangle}{\sigma_n} \right|^2 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall \alpha < \alpha_0.$$

$$\cdot \|R_\alpha y - K^* y\|^2 = \underbrace{\sum_{n=1}^N |2g_\alpha(\sigma_n) - 1|^2 \left| \frac{\langle y, v_n \rangle}{\sigma_n} \right|^2}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} |2g_\alpha(\sigma_n) - 1|^2 \left| \frac{\langle y, v_n \rangle}{\sigma_n} \right|^2}_{\leq (1+\gamma)^2} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \square$$

Bem: Da  $\|R_\alpha v_n - K^+ v_n\| = |g_\alpha(s_n) - 1| s_n > 1$  für  $n$  groß genug (in Abhängigkeit von  $\alpha$ ), kann die Konvergenz  $R_\alpha y \rightarrow K^+ y$  beliebig langsam sein (wähle einfach  $y = v_n$  mit  $n$  groß genug).

Bsp: 1) Abgeschnittene Singulärwertzerlegung (truncated singular value decomposition, TSVD):

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & t \leq \alpha \\ \frac{1}{t}, & t > \alpha \end{cases} \Rightarrow C_\alpha = \frac{1}{\alpha}, \gamma = 1$$

2) Lavrentiev-Regularisierung:

$$g_\alpha(t) = \frac{1}{t + \alpha} \Rightarrow C_\alpha = \frac{1}{\alpha}, \gamma = 1$$

3) Tikhonov-Regularisierung:

$$g_\alpha(t) = \frac{t}{t^2 + \alpha} \Rightarrow C_\alpha = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, \gamma = 1$$

Zur praktischen Implementierung muss man für die TSVD nur die ersten Singulärwerte & -vektoren ermitteln; für Lavrentiev- & Tikhonov-Regularisierung kann man folgendes nutzen.

Thm: - Sei  $R_\alpha$  der Tikhonov-Regularisierungsoperator. Dann gilt  $R_\alpha y = \arg\min \|Kx - y\|^2 + \alpha \|x\|^2$ .

- Sei  $R_\alpha$  der Lavrentiev-Regularisierungsoperator und  $U: X \rightarrow Y$ ,  $Uu = \sqrt{\alpha} u$  für  $u \in \mathbb{R}^n$  ist eine Isometrie; ist  $K = K^*: X \rightarrow Y = X$  mit  $\text{Bild}(K)$  dicht in  $X$ , ist  $U = I$ . Dann gilt  $R_\alpha = (K^* + \alpha I)^{-1}$ .

Bew: HA

Kor: Sei  $g_\alpha$  wie oben, und  $\alpha(\delta, y^\sigma) \rightarrow 0$  so, dass  $\|g_\alpha(\delta, y^\sigma)\|^\delta \rightarrow 0$  für  $\delta \rightarrow 0$ , dann gilt

$$R_\alpha(\delta, y^\sigma) y^\sigma \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{} K^+ y.$$

Bew:  $\|R_\alpha y^\sigma - K^+ y\| \leq \underbrace{\|R_\alpha\| \|y^\sigma - y\|}_{\leq C_\alpha \delta \rightarrow 0} + \underbrace{\|R_\alpha y - K^+ y\|}_{\rightarrow 0}$  □

Unter zusätzlichen Glattheitsannahmen an  $y$  bzw  $K^+ y$  kann eine Konvergenzrate erhalten werden

Def: Eine Quellbedingung (source condition) ist eine Glattheitsbedingung an  $x = K^+ y$  der Form  $x = (K^* K)^* w$  für ein  $\alpha > 0$  und ein  $w \in X$

Bem: Die Quellbedingung hängt von  $K$  ab, d.h. die Glattheit wird abhängig von  $K$  gemessen. Je größer  $\alpha$ , desto glatter sind  $y$  und  $x$ .

Thm: Es gelte die Quellbedingung  $x = K^+ y = (K^* K)^* w$ . Dann gilt

$$\|R_\alpha y - K^+ y\| \leq \varphi_m(\alpha) \|w\| \quad \text{für } \varphi_m(\alpha) = \max_{\delta \in (0, \|K\|)} |g_\alpha(\delta)| \frac{2^{m+1} - 2^m}{2^{m+1}}$$

Bew:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle y, v_n \rangle}{b_n} u_n = K^+ y = x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{2m} \langle w, u_n \rangle u_n \Rightarrow \langle w, u_n \rangle = \frac{\langle y, v_n \rangle}{b_n^{2m+1}}$

$$\begin{aligned} \cdot \|R_\alpha y - K^+ y\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( g_\alpha(b_n) - \frac{1}{b_n} \right) b_n^{2m+1} \right]^2 \frac{\langle y, v_n \rangle^2}{(b_n^{2m+1})^2} \leq \varphi_m(\alpha)^2 \|w\|^2 \quad \square \\ &\leq \varphi_m(\alpha)^2 \end{aligned}$$

Bem: Unter der Quellbedingung gilt folglich  $\|R_\alpha y - K^+ y\| \leq \varphi_m(\alpha) \|w\|$ ; die rechte Seite kann nun nach  $\alpha$  minimiert werden, um eine optimale Konvergenzrate (und die zugehörige Regularisierungs-Parameterwahl  $\alpha(\delta)$ ) zu erhalten.

Bsp: 1) TSVD:

$$\varphi_m(\alpha) = \sup_{b>0} \left| b^{2m+1} \cdot \begin{cases} 0, & b \leq \alpha \\ \frac{1}{b}, & b > \alpha \end{cases} - b^{2m} \right| = \sup_{b>0} b^{2m} \cdot \begin{cases} 1, & b \leq \alpha \\ 0, & b > \alpha \end{cases} = \alpha^{2m}, \quad C_\alpha = \frac{1}{\alpha}$$

$$C_\alpha \delta + \varphi_m(\alpha) \|w\| \rightarrow \min! \Rightarrow \alpha = \left( \frac{\delta}{2m \|w\|} \right)^{\frac{1}{2m+1}}$$

$$\Rightarrow \|R_{\alpha(\delta)} y^\delta - K^* y\| \leq C_\alpha \|w\|^{\frac{1}{2m+1}} \delta^{\frac{2m}{2m+1}}$$

2) Lavrentiev:

$$\varphi_m(\alpha) = \sup_{b \leq \|K\|} \left| b^{2m+1} \frac{1}{b+\alpha} - b^{2m} \right| = \sup_{b \leq \|K\|} \frac{b^{2m} \alpha}{b+\alpha} = \begin{cases} \frac{\|K\|^{2m} \alpha}{\|K\| + \alpha} & 1/m > \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha^{2m}}{2(1-m)(1-2m)^{2m-1}} & 1/m \leq \frac{1}{2} \end{cases}, \quad C_\alpha = \frac{1}{\alpha}$$

$$C_\alpha \delta + \varphi_m(\alpha) \|w\| \rightarrow \min! \Rightarrow \alpha = \text{const.} \cdot \begin{cases} \sqrt{\delta} & 1/m > \frac{1}{2} \\ \delta^{1/(2m+1)} & 1/m \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|R_{\alpha(\delta)} y^\delta - K^* y\| \leq \text{const.} \begin{cases} \sqrt{\delta} & 1/m > \frac{1}{2} \\ \delta^{2m/(2m+1)} & 1/m \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

3) Tikhonov:

$$\varphi_m(\alpha) = \sup_{b \leq \|K\|} \left| b^{2m+1} \frac{b}{b^2 + \alpha} - b^{2m} \right| = \sup_{b \leq \|K\|} \frac{\alpha b^{2m}}{b^2 + \alpha} = \begin{cases} \frac{\|K\|^{2m} \alpha}{\|K\|^2 + \alpha} & 1/m > 1 \\ \frac{\alpha^{2m}}{(1-m)^{1-m} \mu^m \alpha^m} & 1/m \leq 1 \end{cases}, \quad C_\alpha = \frac{1}{2\alpha}$$

$$C_\alpha \delta + \varphi_m(\alpha) \|w\| \rightarrow \min! \Rightarrow \alpha = \text{const.} \begin{cases} \delta & 1/m > 1 \\ \delta^{\frac{2}{1+2m}} & 1/m \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|R_{\alpha(\delta)} y^\delta - K^* y\| \leq \text{const.} \begin{cases} \delta^{2/3} & 1/m > 1 \\ \delta^{\frac{2}{1+2m}} & 1/m \leq 1 \end{cases}$$

Bem: Je kleiner  $\alpha$ , desto schlechter die Konvergenzrate. Unabhängig davon, wie groß  $\alpha$  ist, ist die Konvergenzrate wegen der Schlechtgestelltheit immer strikt schlechter als  $\delta$ .

Def: Die Qualifikation einer Regularisierungsmethode ist das größte  $\delta = \delta_{\text{Qu}}$ , sodass die Quellbedingung für  $\delta > \delta_{\text{Qu}}$  eine langsamere Konvergenzrate liefert.

Bsp: Qualifikation für TSVD:  $\infty$ ; Lavrentiev: 1; Tikhonov: 2

Bem: Die Diskrepanz zwischen korrekten Daten  $y$  und Ergebnis  $K(R_\alpha y)$  des Vorwärtsproblems ist

$$\begin{aligned} \|y - K R_\alpha y\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \beta_n g_\alpha(\beta_n))^2 \langle y, v_n \rangle^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \beta_n^{2m+1} - \beta_n^{2m+2} g_\alpha(\beta_n) \right)^2 \left( \frac{\langle y, v_n \rangle}{\beta_n^{2m+1}} \right)^2 \\ &\leq \varphi_{m+\frac{1}{2}}(\alpha)^2 \|w\|^2. \end{aligned}$$

Für obige Beispiele ist  $\varphi_{m+\frac{1}{2}}(\alpha(\delta)) = \text{const.} \delta$ , somit  $\|y - K(R_\alpha y)\| \leq \text{const.} \delta$

Hieraus leitet sich das Diskrepanzprinzip von Mozorow ab: Wähle  $\alpha$  so, dass  $\|K R_\alpha y^\delta - y^\delta\| \sim \delta$

## Iterative Regularisierung für lineare Probleme

Sei  $K: X \rightarrow Y$  linear und kompakt mit Singulärwertzerlegung  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Sei  $y = Kz$  für ein  $z \in X$ . Die kleinste-Quadrat-Lösung  $x^*$  des inversen Problems  $Kx = y$  erfüllt  $K^*(Kx^* - y) = 0$ .

Def: Die Fixpunktiteration  $\tilde{x} = 0, \tilde{x}^{k+1} = \tilde{x}^k - K^*(K\tilde{x}^k - y)$  für ein  $\tau > 0$  heißt Landweber-Iteration. Offensichtlich definiert  $R_k y = \tilde{x}^k$  einen linearen Operator.

Die Landweberiteration  $R_k$  kann aufgefasst werden als Regularisierungsoperator mit Regularisierungsparameter  $\alpha = 1/k$ .

Thm: Es gilt  $R_k y = \sum_{n=1}^{\infty} g_{\alpha}(z_n)(y, v_n) u_n$  mit  $\alpha = \frac{1}{k}$  und  $g_{\alpha}(z) = \frac{1 - (1 - \tau z^2)^k}{z}$ .

$$\sum_n (x^{k+1}, u_n) u_n = x^{k+1} = (I - \tau K^* K) x^k + \tau K^* y = \sum_n [(1 - \tau z_n^2)(x^k, u_n) + \tau z_n (y, v_n)] u_n$$

$$\Rightarrow (x^{k+1}, u_n) = (1 - \tau z_n^2)(x^k, u_n) + \tau z_n (y, v_n) = \sum_{i=0}^k (1 - \tau z_n^2)^i \tau z_n (y, v_n)$$

$$= \frac{1 - (1 - \tau z_n^2)^{k+1}}{1 - (1 - \tau z_n^2)} \tau z_n (y, v_n) = [1 - (1 - \tau z_n^2)^{k+1}] \frac{(y, v_n)}{z_n}$$

Sogar 2 würde reichen

Kor: Sei  $\tau ||K||^2 < 1$ ,  $y, y^* \in Y$  mit  $||y - y^*|| \leq \delta$

$$1) R_k y \rightarrow K^* y \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

$$2) \text{Für } k(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \infty \text{ mit } k(\delta) \delta \rightarrow 0 \text{ gilt } \|R_{k(\delta)} y^* - K^* y\| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

$$3) x = K^* y \text{ erfülle eine Quellbedingung mit } \|R_k y - K^* y\| \leq k^{-m}.$$

$$4) x = K^* y \text{ erfülle eine Quellbedingung mit } \text{Für } k(\delta) \sim \delta^{-\frac{1}{m+1}} \text{ gilt dann } \|R_{k(\delta)} y^* - K^* y\| \leq \delta^{\frac{1}{m+1}}$$

Bew: Setze  $\alpha = \frac{1}{k}$ . Es ist  $|g_{\alpha}(z)| = \left| \sum_{i=0}^k (1 - \tau z^2)^i \tau z \right| \leq \sum_{i=0}^k |1 - \tau z^2|^i \tau z \leq (k+1) \tau z$ .

$$\cdot C_{\alpha} = \|R_k\| = \max_n |g_{\alpha}(z_n)| \leq (k+1) \tau \|K\|$$

$$\cdot \sup_{\alpha, y} g_{\alpha}(z_n) z_n = 1 - (1 - \tau z_n^2)^k \leq 1 + |1 - \tau z_n^2|^k < 2 = \gamma$$

$$\cdot \left| g_{\alpha}(z_n) - \frac{1}{z_n} \right| = |1 - \tau z_n^2|^k / z_n \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$1) \Rightarrow R_k y \rightarrow K^* y$$

$$2) C_{\alpha(\delta)} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \quad \Rightarrow \quad R_{k(\delta)} y^* \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} K^* y.$$

$$\cdot \varphi_m(\alpha) = \max_{\delta \in (0, \|K\|]} \left| g_{\alpha}(\delta) \delta^{2m+1} - \delta^{2m} \right| = \max_{\delta \in (0, \|K\|]} \delta^{2m} |1 - \tau \delta^2|^k$$

$$\Rightarrow \tau \delta_{\text{opt}}^2 = \frac{m}{m+k} \quad \Rightarrow \varphi_m(\alpha) = \left( \frac{k}{m+k} \right)^k \left( \frac{m}{m+k} \right)^m \leq \frac{1}{2^m} \left( \frac{m}{m+k} \right)^m$$

$$3) \text{Für } x = (K^* K)^m w \text{ ist } \|R_k y - K^* y\| \leq \varphi_m(\alpha) \|w\| \leq \text{const. } k^{-m}$$

$$4) \|R_{k(\delta)} y^* - K^* y\| \leq C_{\alpha(\delta)} \delta + \varphi_m(\alpha(\delta)) \|w\| \leq \text{const. } \delta^{\frac{1}{m+1}}$$

Kor: Sei  $\tau \|K\|^2 < 1$ ,  $y, y^\delta \in Y$  mit  $\|y^\delta - y\| \leq \delta$ .  
 1)  $\|Kx^{k+1} - y\| \geq \|Kx^k - y\|^2$  für  $x^k = R_k y$ .

2) Sei  $x^k = R_k y^\delta$ . Sei  $k^*(\delta, y^\delta) = \inf \{k > 0 \mid \|Kx^k - y^\delta\| < \delta\}$  für  $\gamma \geq \frac{2}{2 - \tau \|K\|^2}$   
 die Iterationsanzahl, bei der das Mozorov-Diskrepanzprinzip erstmals verletzt wird.  
 Für alle  $k < k^*(\delta, y^\delta)$  gilt  $\|x^{k+1} - K^+ y\| \leq \|x^k - K^+ y\|$ .

$$\begin{aligned} \text{Bew: 1)} \|Kx^{k+1} - y\|^2 &= \|Kx^k - y\|^2 - 2\tau (Kx^k - y, K K^*(Kx^k - y)) + \|\tau K K^*(Kx^k - y)\|^2 \\ &= \|Kx^k - y\|^2 - 2\tau \|K^*(Kx^k - y)\|^2 + \tau^2 \|K K^*(Kx^k - y)\|^2 \\ &\leq \|Kx^k - y\|^2 + \tau \underbrace{(\tau \|K\|^2 - 2)}_{\leq 0} \|K^*(Kx^k - y)\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \|x^{k+1} - K^+ y\|^2 - \|x^k - K^+ y\|^2 &= \|\tau K^*(Kx^k - y^\delta)\|^2 - 2(\tau K^*(Kx^k - y^\delta), x^k - K^+ y) \\ &= \|\tau K^*(Kx^k - y^\delta)\|^2 - 2\tau (Kx^k - y^\delta, Kx^k - y) \\ &= \|\tau K^*(Kx^k - y^\delta)\|^2 - 2\tau \|Kx^k - y^\delta\|^2 + 2\tau (Kx^k - y^\delta, y - y^\delta) \\ &\leq \tau^2 \|K\|^2 \|Kx^k - y^\delta\|^2 - 2\tau \|Kx^k - y^\delta\|^2 + 2\tau \|Kx^k - y^\delta\| \delta \\ &= \frac{\tau}{\gamma} \|Kx^k - y^\delta\| \underbrace{\left( \gamma \frac{\tau \|K\|^2 - 2}{2} \|Kx^k - y^\delta\| + \delta \right)}_{\leq -1} \leq 0 \quad \square \end{aligned}$$

Für einen nichtlinearen Operator  $F: X \rightarrow Y$  kann keine Singulärwertzerlegung oder Adjungierte definiert werden. Die Minimierungs-Interpretation der Tikhonov-Regularisierung erlaubt jedoch eine Übertragung auf nichtlineare inverse Probleme  $F(x)=y$ .

Def: Sei  $F: X \rightarrow Y$ ,  $x^* \in X$ .

- $x \in X$  heißt kleinste-Quadrat-Lösung von  $F(x)=y$ , wenn  $\|F(x)-y\| \leq \|F(z)-y\|$  für alle  $z \in X$ .
- $x^* \in \operatorname{argmin}\{\|x-x^*\| \mid x \text{ kleinste-Quadrat-Lösung von } F(x)=y\}$  heißt  $x^*$ -Minimum-Norm-Lsg.
- Der zugehörige Tikhonov-Regularisierungsoperator ist  $x^* \in \operatorname{argmin}\{\|F(x)-y\|^2 + \lambda \|x-x^*\|^2\}$

Bem: - Für nichtlineares  $F$  kann keine Eindeutigkeit der  $x^*$ -Minimum-Norm-Lösung oder Tikhonov-Regularisierung erwartet werden. Außerdem kann es lokale und globale Minimierer geben - wir betrachten nur globale.  
- Für lin. inverse Probleme war  $x^*=0$ , für nichtlineare spielt 0 aber keine besondere Rolle.

Wir arbeiten nun das Standardprogramm für nichtlineare regularisierte inverse Probleme ab:

1) Existenz von Minimierern, 2) Stabilität von Minimierern, 3) Konvergenz der Regularisierung

Def: - Der Operator  $F: X \rightarrow Y$  heißt schwach folgenabgeschlossen, wenn  $F(x)=y$  für  $x \rightarrow x$ ,  $F(x) \rightarrow y$ .  
-  $X$  heißt reflexiv, wenn  $X''=X$ .

Thm: Der abgeschlossene Einheitsball im reflexiven Banachraum  $X$  ist schwach folgenkompakt.

Thm: (Existenz) Seien  $X, Y$  reflexive Banachräume und  $F: X \rightarrow Y$  stetig & schwach folgenabgeschlossen, dann hat  $\mathcal{J}$  einen Minimierer.

Bew: direkte Methode

- 0)  $\mathcal{J}(x^*) = \|F(x^*)-y\| \leq 0$
- 1) betrachte Minimalfolge  $x_n$  mit  $\mathcal{J}(x_n) \rightarrow \inf \mathcal{J}$  monoton
- 2)  $\|x_n - x^*\| \leq \mathcal{J}(x_n) \leq \mathcal{J}(x^*) \Rightarrow$  es gibt konvergente Teilfolge  $x_n \rightarrow x$
- 3)  $\|F(x_n) - y\| \leq \mathcal{J}(x_n) \leq \mathcal{J}(x^*) \Rightarrow$  für (weitere) Teilfolge ist  $F(x_n) \rightarrow z$  und somit  $z = F(x)$   
Wegen schwacher Unterhalbstetigkeit der Norm ist  $\mathcal{J}(x) = \|z - y\|^2 \leq \|x - x^*\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(x_n)$   $\square$

Im linearen Fall ist  $\|R_\alpha y - R_\alpha y\| \leq C \|y - y\|$ , d.h. die regularisierte Lösung konvergiert stark und linear im Messfehler. Im Nichtlinearen erhalten wir nur schwache Konvergenz von Teilstichen.

Thm: (Stabilität) Zusätzlich zu Existenz-Bedingungen sei  $y \rightarrow y$  in  $Y$  und  $x_n \in \operatorname{argmin} \mathcal{J}$ . Dann hat  $x_n$  eine schwach konvergente Teilfolge, und jeder schwache Häufungspunkt minimiert  $\mathcal{J}$ .

Bew: 1)  $\|x_n - x^*\| \leq \mathcal{J}(x_n) \leq \mathcal{J}(x^*) = \|F(x^*) - y\|^2 \leq C \Rightarrow x_n$  hat konvergente Teilfolge  
2) Sei  $x_n \rightarrow x$ , dann ist  $\|F(x_n) - y\|^2 \leq \mathcal{J}(x_n) \leq \mathcal{J}(x^*) = \|F(x^*) - y\|^2 \leq C \Rightarrow F(x_n)$  hat konv.  
3) Wegen schwacher Unterhalbstetigkeit der Norm ist  
 $\mathcal{J}(x_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(x_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(z) \leq \mathcal{J}(z)$  für alle  $z \in X$ .  $\square$

Bisher haben wir Existenz und (schwache Teilstichen-) Stetigkeit der Tikhonov-Regularisierung (Eindeutigkeit ist nicht möglich), d.h. die Wohlgestelltheit soweit wie möglich. Nun betrachten wir Konvergenz.

Thm: Zusätzlich zu oben sei  $X$  Hilbertraum,  $x^*$  eine  $x^*$ -Minimum-Norm-Lösung mit  $F(x^*)=y$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit  $\|y^\alpha - y\| \leq \delta$  sowie  $x_\alpha \in \operatorname{argmin}_x \|x\|^2$ . Gilt  $\alpha > 0$  und  $\alpha \rightarrow 0$  für  $\alpha \in \mathcal{J}(y^*)$  und  $\alpha > 0$ , so hat  $x_\alpha$  eine stark konvergente Teilfolge, und jeder Häufungspunkt ist  $x^*$ -Min-Norm-Lsg.

im linearen Fall:  $C_\alpha \delta = \delta/2\alpha \rightarrow 0$

Bew: 1)  $x_\alpha^\alpha$  hat schwach konv. Teilfolge:

hier wird  $F(x^*)=y$  gebraucht!

$$\alpha \|x_\alpha^\alpha - x^*\|^2 \leq g_\alpha^\alpha(x_\alpha^\alpha) \leq f_\alpha^\alpha(x^*) = \|F(x^*) - y^\alpha\|^2 + \alpha \|x^* - x^*\|^2 \leq \delta^2 + \alpha \|x^* - x^*\|^2$$

$\Rightarrow x_\alpha^\alpha$  beschränkt  $\Rightarrow \exists$  schwach konv. Teilfolge  $x_{\alpha_n}^\alpha \rightarrow x$

2)  $x$  ist  $x^*$ -Minimum-Norm-Lösung:

$$\cdot \|x - x^*\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_{\alpha_n}^{\alpha_n} - x^*\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n} + \|x^* - x^*\|^2 = \|x^* - x^*\|^2$$

$$\cdot \|F(x_{\alpha_n}^{\alpha_n}) - y\| \leq \alpha_n + \|F(x_{\alpha_n}^{\alpha_n}) - y^\alpha\| \leq \alpha_n + \sqrt{f_{\alpha_n}^\alpha(x_{\alpha_n}^{\alpha_n})} \leq \alpha_n + \sqrt{\delta_n^2 + \alpha_n \|x^* - x^*\|^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow F(x_{\alpha_n}^{\alpha_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \Rightarrow F(x) = y$$

3)  $x_{\alpha_n}^\alpha \rightarrow x$  stark: analog wie im Hilbertraum  $\{x_n \rightarrow x\} \Rightarrow \|x_n\| \rightarrow \|x\|$   $\Rightarrow x_n \rightarrow x$  gezeigt wird

$$\begin{aligned} \|x_{\alpha_n}^\alpha - x\|^2 &= \underbrace{\|x_{\alpha_n}^{\alpha_n} - x^*\|^2}_{\leq \frac{\delta_n^2}{\alpha_n} + \|x^* - x^*\|^2} - 2 \underbrace{\langle x_{\alpha_n}^{\alpha_n} - x^*, x - x^* \rangle}_{\rightarrow \|x - x^*\|^2} + \|x - x^*\|^2 \rightarrow 0 \\ &\leq \frac{\delta_n^2}{\alpha_n} + \|x^* - x^*\|^2 = \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n} + \|x - x^*\|^2 \end{aligned}$$

$x^*$  &  $x$  sind  $x^*$ -Min-Nrm.-Lsg.

Bem: Die starke Konvergenz ist eine Besonderheit für Hilberträume (wo aus Normkonvergenz & schwacher Konvergenz die starke Konvergenz folgt) und kann i.A. nicht erwartet werden

Noch zu betrachten: Konvergenzraten unter zusätzlichen Glattheitsbedingungen.

Def: Eine Abbildung  $F: X \rightarrow Y$  heißt Fréchet-differenzierbar in  $x \in X$  mit Fréchet-Ableitung  $F'(x)$ , wenn  $F'(x): X \rightarrow Y$  linear & stetig ist mit  $\|F(y) - F(x) - F'(x)(y-x)\| / \|y-x\| \rightarrow 0$  für  $\|y-x\| \rightarrow 0$ .  $F$  heißt Fréchet-differenzierbar, wenn es überall Fréchet-differenzierbar ist.

Thm: Sind  $X, Y$  Hilberträume und  $F: X \rightarrow Y$  Fréchet-differenzierbar, so auch  $\mathcal{J}(y)$  mit  $(\mathcal{J}(y))'(x) = 2F'(x)^*(F(x)-y) + (x-x^*)$ .

Bew: HA

□

Für Konvergenzraten brauchen wir eine Quellbedingung. Wir betrachten die Quellbedingung für  $\mu = 1/2$ .  $x^* = (K^*K)^{-1}y$  für ein  $y \in Y$  ist äquivalent zu  $x = K^*p$  mit  $p = \sum_{n=1}^{\infty} (w_n, u_n) v_n$ . Dies lässt sich interpretieren als Existenz eines Lagrange-Multiplikators für das Minimum-Norm-Lösungsproblem  $\min_x \|x\|^2/2$  s.d.  $Kx = y$ , denn

$$\text{Lagrangeian} \quad L(x, p) = \frac{1}{2} \|x\|^2 - \langle Kx - y, p \rangle$$

$$\text{Opt.-Bed.} \quad 0 = \frac{\partial L}{\partial p} = y - Kx \quad \& \quad 0 = \frac{\partial L}{\partial x} = x - K^*p$$

Analog wird für einen nichtlinearen Operator vorgegangen:

$$\text{Lagrangeian} \quad L(x, p) = \frac{1}{2} \|x - x^*\|^2 - \langle F(x) - y, p \rangle$$

$$\text{Opt.-Bed.} \quad 0 = \frac{\partial L}{\partial p} = y - F(x) \quad \& \quad 0 = \frac{\partial L}{\partial x} = x - x^* - (F'(x))^*p$$

Def: Die Quellbedingung für eine  $x^*$ -Minimum-Norm-Lsg.  $x^+$  des inversen Problems  $F(x)=y$  lautet

$$x^+ - x^* = \left[ F'(x^*)^* F'(x^*) \right]^{-1} w \quad \text{für ein } w \in X$$

Thm: (Konvergenzrate unter Quellbedingung) Zusätzlich zu oben sei  $x^* = F'(x^*)^{-1} p$  für ein  $p \in Y$ , und  $F'$  habe Lipschitz-Konstante  $L$  mit  $L\|p\| < 1$ . Wird  $\alpha \in (0, \frac{1}{L})$  gewählt, dann gibt es  $D > 0$  mit  $\|x_\alpha^\delta - x^*\| < \text{const. } \sqrt{\delta}$   $\forall \delta < D$ .   
  $L=0$  im Linearen war optimal im Linearen für  $\sum$

Bew:  $\|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|^2 + \alpha \|x_\alpha^\delta - x^*\|^2 \leq \|F(x^+) - y^\delta\|^2 + \alpha \|x^+ - x^*\|^2 \leq \delta^2 + \alpha \|x^+ - x^*\|^2$   
 $\Leftrightarrow \|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|^2 + \alpha \|x_\alpha^\delta - x^+\|^2 \leq \delta^2 + 2\alpha (x^+ - x^*, x^+ - x_\alpha^\delta)$   
 $= \delta^2 + 2\alpha (p, F'(x^+)(x^+ - x_\alpha^\delta))$

• setze  $f(t) = F(x^+ + t(x_\alpha^\delta - x^+))$

$$\Rightarrow f'(t) = F'(x^+ + t(x_\alpha^\delta - x^+))(x_\alpha^\delta - x^+) \text{ hat Lipschitz-Konstante } L\|x_\alpha^\delta - x^+\|^2$$

$$\Rightarrow \|F(x_\alpha^\delta) - F(x^+) - F'(x^+)(x_\alpha^\delta - x^+)\| = \|f(1) - f(0) - f'(0) \cdot 1\| = \left\| \int_0^1 f''(t) dt \right\| \leq \frac{L}{2} \|x_\alpha^\delta - x^+\|^2$$

$$\Rightarrow \|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|^2 + \alpha \|x_\alpha^\delta - x^+\|^2 \leq \delta^2 + 2\alpha (p, F(x^+) - F(x_\alpha^\delta)) + \alpha L \|p\| \|x_\alpha^\delta - x^+\|^2$$

$$\leq \delta^2 + 2\alpha (p, y^\delta - F(x_\alpha^\delta)) + 2\alpha (p, y - y^\delta) + \alpha L \|p\| \|x_\alpha^\delta - x^+\|^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta + \alpha p\|^2 + (1 - L\|p\|) \|x_\alpha^\delta - x^+\|^2 \leq \frac{\delta^2}{\alpha} + \alpha \|p\|^2 + 2\delta\|p\| \cdot \underbrace{\left( \frac{\delta}{\alpha} + \sqrt{\alpha\|p\|} \right)^2}_{\leq (C_\alpha\delta + \varphi_\Sigma(\alpha)\|w\|)^2}$$

$$\Rightarrow (1 - L\|p\|) \|x_\alpha^\delta - x^+\|^2 \leq \delta \left( \frac{1}{\alpha} + \sqrt{\alpha\|p\|} \right)^2$$

$$\Rightarrow \|x_\alpha^\delta - x^+\|^2 \leq \delta \left( \frac{1}{\alpha} + \sqrt{\alpha\|p\|} \right)^2 / (1 - L\|p\|)$$

$c_1\delta \leq \alpha \leq c_2\delta$

□

Wir betrachten nun das nichtlineare inverse Problem  $F(x)=y$ . Um die Landweber-Iteration für das lineare inverse Problem  $Kx=y$  darauf zu verallgemeinern, fassen wir diese auf als Gradientenabstieg mit Schrittweite  $\tau$  für  $J(x)=\|Kx-y\|^2/2$ :

$$J'(x) = K^*(Kx-y) \Rightarrow x^{k+1} = x^k - \tau J'(x)$$

Im Nichtlinearen benutzen wir einfach  $J(x)=\|F(x)-y\|^2/2$ .

Def: Seien  $X, Y$  Hilberträume,  $F: X \rightarrow Y$  stetig und Fréchet-differenzierbar,  $x^* \in X$ ,  $y \in Y$ . Die Landweber-Iteration zum inversen Problem  $F(x)=y$  lautet

$$\text{Wir schreiben } R_k(y) = x^k, \quad x^{k+1} = x^k - \tau F'(x^k)^* (F(x^k) - y).$$

$R_k(y)$  ist offensichtlich für alle  $y$  wohldefiniert. Ebenso ist es stabil:

Thm: Sei zusätzlich  $F': X \rightarrow L(X, Y)$  stetig und  $x \rightarrow y$  in  $Y$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann ist  $R_k(y) \rightarrow R(y)$  für alle  $k$ .

Bew: Induktionsanfang:  $R_0(y_0) = R_0(y)$

$$\begin{aligned} \text{Induktions schritt: } R_{k+1}y_n &= R_ky_n - \tau F'(R_ky_n)^* (F(R_ky_n) - y_n) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} R_ky - \tau F'(R_ky)^* (F(R_ky) - y) = R_{k+1}y \quad \square \end{aligned}$$

Die Konvergenz gilt nur unter einer zusätzlichen Annahme, die die Nichtlinearität beschränkt:

$$\|F(x) - F'(x)(x-x') - F(x')\| < c \|F(x) - F(x')\| \quad \text{für alle } x, x' \text{ und ein } c < 1/2. \quad (\text{A})$$

Im Prinzip reicht diese Bedingung auch lokal um eine Lösung  $\tilde{x}$  von  $F(x)=y$  herum. Zusätzlich zu (A) benutzen wir im Folgenden folgende Vereinbarungen:

- Es seien  $y, y^\delta \in Y$  mit  $\|y^\delta - y\| < \delta$  und  $F(x^+) = y$
- Es sei  $\|F'(x)\| < C$  für alle  $x$  und  $\tau C^2 < 1$
- $k^* \equiv k^*(\delta, y^\delta) = \inf \{k > 0 \mid \|F(x^k) - y^\delta\| \leq \delta\}$  mit  $\gamma \geq \frac{2+2c}{1-2c} > 2$
- sei die Iterationszahl, bei der das Morozov-Diskrepanzprinzip verletzt wird
- $x^k = R_k(y)$ ,  $x_\delta^k = R_k(y^\delta)$ .

$$\text{Thm: } \frac{1}{1+\tau} \|F'(x)(x-\tilde{x})\| \leq \|F(x) - F(\tilde{x})\| \leq \frac{1}{1-\tau} \|F'(x)(x-\tilde{x})\|$$

$$\begin{aligned} \text{Bew: } \|F(x) - F(\tilde{x})\| &\leq \|F(x) - F'(x)(x-\tilde{x}) - F(\tilde{x})\| + \|F'(x)(x-\tilde{x})\| \leq c \|F(x) - F(\tilde{x})\| + \|F'(x)(x-\tilde{x})\| \\ \|F'(x)(x-\tilde{x})\| &\leq \|F(x) - F'(x)(x-\tilde{x}) - F(\tilde{x})\| + \|F(x) - F(\tilde{x})\| \leq (c+1) \|F(x) - F(\tilde{x})\| \quad \square \end{aligned}$$

$$\text{Thm: 1) } \|x_\delta^{k+1} - x^+\| \leq \|x_\delta^k - x^+\| \quad \forall k < k^* \quad (\text{gilt auch für jedes } x' \in F^{-1}(y) \text{ statt } x^+)$$

$$2) \sum_{k=0}^{\infty} \|F(x^k) - y\|^2 < \infty.$$

$$3) \text{ Sei } F' \text{ Lipschitzstetig mit Konstante } L, \text{ und } \tau \text{ erfüllt } (C^2 + LC \|x^* - x\|) < 1. \text{ Dann gilt } \|F(x^{k+1}) - y\|^2 < \|F(x^k) - y\|^2 \text{ für alle } k.$$

Bew: 1)  $\|x_{\delta}^{k+1} - x^+\|^2 - \|x_{\delta}^k - x^+\|^2 = \|\tau F'(x_{\delta}^k)^*(F(x_{\delta}^k) - y^{\delta})\|^2 - 2 \langle x_{\delta}^k - x^+, \tau F'(x_{\delta}^k)^*(F(x_{\delta}^k) - y^{\delta}) \rangle$

 $= \tau^2 \|F'(x_{\delta}^k)^*(F(x_{\delta}^k) - y^{\delta})\|^2 - 2\tau \|F(x_{\delta}^k) - y^{\delta}\|^2$ 
 $+ 2\tau \langle F(x_{\delta}^k) - F'(x_{\delta}^k)(x_{\delta}^k - x^+) - F(x^+) + F(x^+) - y^{\delta}, F(x_{\delta}^k) - y^{\delta} \rangle$ 
 $\leq \tau \|F(x_{\delta}^k) - y^{\delta}\| \left[ (\tau \|F'(x_{\delta}^k)\|^2 - 2) \|F(x_{\delta}^k) - y^{\delta}\| + 2 \|F(x_{\delta}^k) - F'(x_{\delta}^k)(x_{\delta}^k - x^+) - F(x^+)\| + 2 \|y - y^{\delta}\| \right]$ 
 $\stackrel{\geq 2+2c}{\leq} 2c \|F(x_{\delta}^k) - y\| \leq 2c \|F(x_{\delta}^k) - y^{\delta}\| + 2c \|y - y^{\delta}\|$ 
 $\leq -\frac{\tau}{\eta} \|F(x_{\delta}^k) - y^{\delta}\| \left[ \eta (2 - 2c - \tau \|F'(x_{\delta}^k)\|^2) \|F(x_{\delta}^k) - y^{\delta}\| - (2 + 2c)\eta \delta \right] < 0$

2) Für  $\delta = 0$  haben wir in 1) sogar gezeigt

$\|x^{k+1} - x^+\|^2 - \|x^k - x^+\|^2 \leq \tau (\tau \|F'(x^k)\|^2 - 2 + 2c) \|F(x^k) - y\|^2 \leq \tau \underbrace{(\tau C^2 - 2 + 2c)}_{<0} \|F(x^k) - y\|^2$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \|F(x^k) - y\|^2 \leq \frac{1}{\tau C^2 - 2 + 2c} \sum_{k=0}^{\infty} \|x^{k+1} - x^+\|^2 - \|x^k - x^+\|^2 = \frac{\|x^0 - x^+\|^2}{2 - 2c - \tau C^2}$

3) Sei  $f(x) = \|F(x) - y\|^2/2$ , also  $f'(x) = F'(x)^*(F(x) - y)$ , dann ist  $f'$  in  $x$

Lipschitz mit Konstante  $\leq C^2 + L \|F(x) - y\| \leq C^2 + LC \|x - x^k\|$

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &= f(x^k) + \int_0^1 f'(x^k + t(x^{k+1} - x^k)) (x^{k+1} - x^k) dt \\ &= f(x^k) + \underbrace{f'(x^k) (x^{k+1} - x^k)}_{= -\tau \|f'(x^k)\|^2} + \underbrace{\int_0^1 f'(x^k + t(x^{k+1} - x^k)) - f'(x^k) dt}_{\leq (C^2 + L C \max(\|x^{k+1} - x^+\|, \|x^k - x^+\|))} (x^{k+1} - x^k) \\ &\leq f(x^k) \end{aligned}$$

Thm:  $x^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x'$  für ein  $x'$  mit  $F(x') = y$

Bew: Setze  $e_k = x^k - x^+$ .  $e_k$  ist Cauchy-Folge:

Sei  $j > k$  beliebig; wähle  $\ell \in \arg\min \{\|F(x^{\ell}) - y\| \mid \ell \in \{k, \dots, j\}\}$ .

$\|e_j - e_k\| \leq \|e_j - e_{\ell}\| + \|e_{\ell} - e_k\|$ , es reicht,  $\|e_j - e_{\ell}\|, \|e_{\ell} - e_k\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$  zu zeigen.

$\|e_j - e_{\ell}\|^2 = 2 \langle e_{\ell} - e_j, e_{\ell} \rangle + \|e_j\|^2 - \|e_{\ell}\|^2$

Wir wissen  $\|e_j\|, \|e_{\ell}\| \rightarrow \varepsilon \geq 0$  für  $k \rightarrow \infty$ , da  $\|e_n\|$  monoton fallend ist.

$$\begin{aligned} \text{Außerdem } |\langle e_{\ell} - e_j, e_{\ell} \rangle| &= \left| \sum_{n=\ell}^{j-1} \langle \tau F'(x^n)^*(F(x^n) - y), e_{\ell} \rangle \right| \\ &\leq \tau \sum_{n=\ell}^{j-1} | \langle F(x^n) - y, F'(x^n)(x^n - x^+) \rangle | \\ &\leq \tau \sum_{\substack{n=\ell \\ n \neq \ell}}^j \|F(x^n) - y\| \|F'(x^n)(x^n - x^+) - F'(x^n)(x^n - x^{\ell})\| \\ &\leq \tau \sum_{n=\ell}^{j-1} \|F(x^n) - y\| (1 + c) [\|F(x^n) - y\| + \|F(x^n) - F(x^{\ell})\|] \\ &\leq \tau \sum_{n=\ell}^{j-1} \|F(x^n) - y\| (1 + c) (\|F(x^{\ell}) - y\| + 2 \|F(x^n) - y\|) \\ &\leq \tau (3 + 3c) \sum_{n=\ell}^{j-1} \|F(x^n) - y\|^2 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|e_j - e_{\ell}\|^2 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \text{ analog } \|e_{\ell} - e_k\|^2 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$

Sei  $x^1 - x^+$  der Limes von  $e_1, e_2, \dots$ , also  $x^1 = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k$ , dann ist

$\|F(x^1) - y\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|F(x^k) - y\| = 0$

□

Thm:  $x_{\delta}^{k^*} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} x^*$  für ein  $x^*$  mit  $F(x^*) = y$

Bew: Sei  $\delta_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ ,  $k_n = k^*(\delta_n, y^{\delta_n})$ .

Fall 1:  $k_n$  hat Häufungspunkt  $\bar{k} < \infty$ .

Für die zugehörige Teilfolge gilt  $\|F(x_{\delta_n}^{\bar{k}}) - y^{\delta_n}\| < \gamma \delta$  und  
 $x_{\delta_n}^{\bar{k}} = R_{x^*}(y^{\delta_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} R_{x^*}(y) = x^* \Rightarrow F(x_{\delta_n}^{\bar{k}}) \rightarrow F(x^*) \Rightarrow \|F(x_{\delta_n}^{\bar{k}}) - y\| = 0$

Für  $k_n > \bar{k}$  gilt  $\|x_{\delta_n}^{k_n} - x^*\| \leq \|x_{\delta_n}^{\bar{k}} - x^*\| \Rightarrow x_{\delta_n}^{k_n} \rightarrow x^*$  für ganze Folge

Fall 2:  $k_n \rightarrow \infty$ . Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig.

Wähle  $m > 0$  mit  $\|x^{k_n} - x^*\| < \frac{\varepsilon}{2}$  und  $N > 0$  mit  $\|x_{\delta_n}^{k_m} - x^{k_m}\| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n > N$ .

$\|x_{\delta_n}^{k_n} - x^*\| \leq \|x_{\delta_n}^{k_n-1} - x^*\| + \dots + \|x_{\delta_n}^{k_m} - x^*\| \leq \|x_{\delta_n}^{k_m} - x^{k_m}\| + \|x^{k_m} - x^*\| < \varepsilon \forall n > N$ .  $\square$

Für Konvergenzraten reicht diesmal keine Quellbedingung; zusätzlich wollen wir annehmen

$$F'(x) = R_x \quad F'(x^*) \quad \text{für alle } x,$$

wobei  $\{R_x \mid x \in X\}$  eine Familie stetiger linearer Operatoren mit  $\|R_x - I\| < B \|x - x^*\|$  für ein  $B > 0$  ist. Dies ist eine leicht andere Beschränkung der Nichtlinearität als (A); in einer kleinen Umgebung von  $x^*$  impliziert diese jedoch (A).

Aus obige Bedingung folgt

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(x^*) - F'(x^*)(x - x^*)\| &= \left\| \int_0^1 (F'(tx + (1-t)x^*) - F'(x^*)) (x - x^*) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \| (R_{tx + (1-t)x^*} - I + I - R_x) F'(x^*) (x - x^*) \| dt \\ &\leq \frac{3}{2} B \|F'(x^*) (x - x^*)\| \|x - x^*\|. \end{aligned}$$

Thm: Es gelte die Quellbedingung  $x^* - x^0 = (F'(x^*)^* F'(x^*))^{\omega}$  für ein  $\omega \in X$ ,  $\omega \in (0, \frac{1}{2}]$

Ist  $\omega$  klein genug, gibt es  $\kappa$  mit

$$\|x_{\delta}^k - x^*\| \leq \kappa \|\omega\| \|\zeta(k+1)\|^{-\kappa}, \quad \|y^{\delta} - F(x_{\delta}^k)\| \leq 4 \times \|\omega\| (k+1)^{-\frac{1}{2}} \quad \forall k < k^*(\delta, y^{\delta}).$$

Bew: Setze  $K = F'(x^*)$ ,  $e_k = x^* - x_{\delta}^k$  = Rekonstruktionsfehler.

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= e_k - \tau K^* (F(x^*) - F(x_{\delta}^k)) + \tau (K - F'(x_{\delta}^k))^* (y^{\delta} - F(x_{\delta}^k)) + \tau K^* (y - y^{\delta}) \\ &= (I - \tau K^* K) e_k - \tau K^* \underbrace{(F(x^*) - F(x_{\delta}^k) - K(x^* - x_{\delta}^k))}_{\leq \frac{3}{2} B \|e_k\| \|K e_k\|} + \tau K^* \underbrace{(I - R_{x_{\delta}^k}^*) (y^{\delta} - F(x_{\delta}^k))}_{\leq B \|e_k\|} + \tau K^* (y - y^{\delta}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|y^{\delta} - F(x_{\delta}^k)\| &\geq \gamma \delta \Rightarrow \|y^{\delta} - F(x_{\delta}^k)\| - \delta \geq (1 - \frac{\gamma}{\delta}) \|y^{\delta} - F(x_{\delta}^k)\| \\ &\Rightarrow \|y^{\delta} - F(x_{\delta}^k)\| \leq \frac{\gamma}{\gamma-1} (\|y^{\delta} - F(x_{\delta}^k)\| - \delta) \leq \frac{\gamma}{\gamma-1} \|y - F(x_{\delta}^k)\| \quad (\star) \end{aligned}$$

$$\|y - F(x_{\delta}^k)\| \leq \|y - F(x_{\delta}^k) + F'(x^*) e_k\| + \|K e_k\| \leq \omega \|y - F(x_{\delta}^k)\| + \|K e_k\|$$

$$\Rightarrow \|y - F(x_{\delta}^k)\| \leq \frac{1}{1-\omega} \|K e_k\| \quad (\star \star)$$

$$\Rightarrow e_{k+1} = (I - K^* K) e_k + \tau K^* \omega + \tau K^* (y - y^{\delta}) \quad \text{mit } \|e_k\| \leq \text{const.} \|e_k\| \|K e_k\|$$

$$\Rightarrow e_k = (I - \tau K^* K)^k e_0 + \tau \sum_{j=0}^{k-1} (I - \tau K^* K)^j K^* z_{k-j-1} + \tau \left[ \sum_{j=0}^{k-1} (I - \tau K^* K)^j K^* \right] (y - y^*)$$

$$\& K e_k = (I - \tau K K^*)^k K e_0 + \tau \sum_{j=0}^{k-1} (I - \tau K K^*)^j K K^* z_{k-j-1} + \tau \left[ \sum_{j=0}^{k-1} (I - \tau K K^*)^j K K^* \right] (y - y^*) \\ = I - (I - \tau K K^*)^k$$

$$\cdot \|(I - \tau K^* K)^j (K^* K)^y\| = \|(I - \tau K K^*) (K K^*)^y\| = \|(I - \tau K^* K)^j K^{*2y}\| \leq (\tau(j+1))^{-y} \forall y \in [0, 1],$$

dann Singuläraktoren zum Singulärwert  $\beta$  werden mit  $(1 - \varepsilon \beta^2)^j \beta^{2y}$

multipliziert, was für  $\tau \beta^2 = \frac{y}{j+y}$  das Maximum auf  $[0, 2\beta] \subset [0, 1/\sqrt{\tau}]$  annimmt

$$\Rightarrow (1 - \varepsilon \beta^2)^j \beta^{2y} \leq \tau^{-y} \left( \frac{y}{j+y} \right)^y \leq (\tau(j+1))^{-y}$$

$$\Rightarrow \left\| \sum_{j=0}^{k-1} (I - \tau K^* K)^j K^* \right\| \leq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{\tau(j+1)}} \leq \sqrt{\frac{k}{\tau}}$$

$$\cdot \|e_j\| \leq \kappa \|w\| \tau(j+1)^{-\mu}, \|K e_j\| \leq \kappa \|w\| \tau(j+1)^{-\mu - 1/2}.$$

Induktionsanfang:  $j = 0$  erfüllt für  $\kappa \geq \tau^m \max(1, \sqrt{\tau})$ .

Induktionsabsatz: Es gelte für alle  $j < k < k^+$ .

$$\|e_k\| \leq \tau^{-\mu} (k+1)^{-\mu} \|w\| + \sum_{j=0}^{k-1} \tau^{-\mu} (j+1)^{-\mu} \|z_{k-j-1}\| + \sqrt{\tau k} \delta$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} (j+1)^{-\frac{1}{2}} \|z_{k-j-1}\| \leq \sum_{j=0}^{k-1} (j+1)^{-\frac{1}{2}} \text{const.} \|e_j\| \|K e_j\|$$

$$\leq \text{const.} \sum_{j=0}^{k-1} (j+1)^{-\frac{1}{2}} \kappa^2 \|w\|^2 (k-j)^{-2\mu - \frac{1}{2}}$$

$$\leq \text{const.} \kappa^2 \|w\|^2 (k+1)^{-2\mu} \sum_{j=0}^{k-1} \underbrace{\frac{(j+1)^{-\frac{1}{2}}}{(k+1)^{\frac{1}{2}}} \frac{(k-j)^{-2\mu - \frac{1}{2}}}{(k+1)^{\frac{1}{2}}}}_{g(\frac{j+1}{k+1})} \frac{1}{k+1}$$

$$g(s) = s^{-\frac{1}{2}} (1-s)^{-2\mu - \frac{1}{2}}$$

$$\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{2}} g(s) ds \approx \begin{cases} \frac{1}{\log(k+1)}, & \mu < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{(k+1)^{2\mu - \frac{1}{2}}}, & \mu = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{(k+1)^{2\mu - \frac{1}{2}}}, & \mu > \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\leq \text{const.} \kappa^2 \|w\|^2 (k+1)^{-\mu} \quad \text{für } \mu \leq \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \|e_k\| \leq \tau^{-\mu} (k+1)^{-\mu} \|w\| (1 + \text{const.} \kappa^2 \|w\|) + \sqrt{\tau k} \delta$$

$$\text{analog: } \|K e_k\| \leq \tau^{-\mu - \frac{1}{2}} (k+1)^{-\mu - \frac{1}{2}} \|w\| (1 + \text{const.} \kappa^2 \|w\|) + \delta$$

$$\gamma \delta \leq \|F(x_\delta^k) - y^*\| \leq \delta + \|F(x_\delta^k) - F(x^*)\| \leq \delta + \frac{1}{1-c} \|K e_k\|$$

$$\leq \frac{2-c}{1-c} \delta + \frac{1}{1-c} \tau^{-\mu - \frac{1}{2}} (k+1)^{-\mu - \frac{1}{2}} \|w\| (1 + \text{const.} \kappa^2 \|w\|)$$

$$\Rightarrow \underbrace{[\gamma(1-c) - (2-c)]}_{\leq \frac{c(5-4c)}{1-2c}} \delta \leq \tau^{-\mu - \frac{1}{2}} (k+1)^{-\mu - \frac{1}{2}} \|w\| (1 + \text{const.} \kappa^2 \|w\|)$$

$$\Rightarrow \|e_k\| \leq \gamma \tau^{-\mu} (k+1)^{-\mu} \|w\| \quad \& \|K e_k\| \leq \gamma [\tau(k+1)]^{-\mu - \frac{1}{2}} \|w\|$$

$$\text{für } \gamma = (1 + \frac{1-2c}{c(5-4c)}) (1 + \text{const.} \kappa^2 \|w\|),$$

und es ist  $\gamma \leq \kappa$  für  $\kappa$  groß genug und  $\|w\|$  klein genug.

$$\cdot \|F(x_\delta^k) - y^*\| \stackrel{(*)}{=} \frac{\eta}{\gamma-1} \frac{1}{1-c} \|K e_k\| \leq \gamma \|K e_k\|$$

□

Thm: Unter den gleichen Voraussetzungen gibt es von  $\mu$  abhängige  $c_1, c_2 > 0$  mit

$$k^* \leq c_1 (\|y\|/\delta)^{2/(2\mu+1)}, \quad \|x_\delta^{k^*} - x^*\| \leq c_2 \|y\|^{\frac{1}{2\mu+1}} \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}$$

Bew: siehe Flakner, Neubauer, Scherzer: A convergence analysis of the Landweber iteration...

## Stochastische Modellierung

In realen Anwendungen sind im inversen Problem  $Kx=y$  sowohl die Messungen  $y$  als auch die Daten  $x$  Zufallsvariablen (die Messung  $y$  unterliegt stochastischem Rauschen/Messfehlern, und die zu findenden Daten  $x$  unterliegen ebenfalls einer gewissen Verteilung, z.B. der Verteilung aller möglichen Patienten-Anatomien).

In der folgenden Modellierung betrachten wir der Einfachheit halber endlich-dimensionale Räume  $X$  &  $Y$ ; entsprechende Modelle für unendlich-dimensionale Räume können entweder auf analoge Weise oder durch Limes immer feinerer Diskretisierungen erhalten werden.

Def: Sei  $(U, F)$  Zufallsvariable in  $\mathbb{R}^{n+m}$  mit Wahrscheinlichkeitsdichte  $\mathbb{R}^{n+m} \rightarrow [0, \infty)$ , folglich haben  $U$  und  $F$  die Wahrscheinlichkeitsdichten  $P_U = \int_{\mathbb{R}^n} P(\cdot, f) df$  &  $P_F = \int_{\mathbb{R}^m} P(u, \cdot) du$ . Die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte von  $U$  gegeben  $F=f$  ist

$$P(U=u|F=f) = P(U=u, F=f) / P(F=f)$$

Thm: (Satz von Bayes)  $P(U=u|F=f) = P(F=f|U=u) P(U=u) / P(F=f)$ .

Bew: einsetzen □

Def: Sei das inverse Problem gegeben, Daten  $u$  aus Messungen  $f$  zu rekonstruieren.

Der Maximum-Likelihood (ML) Schätzer für  $u$  ist definiert als  
 $\text{argmax } P(F=f|U=u) = \text{argmin}_u -\log P(F=f|U=u)$ .

Der Maximum-A posteriori (MAP) Schätzer für  $u$  ist definiert als  
 $\text{argmax } P(U=u|F=f) = \text{argmin}_u -\log P(F=f|U=u) - \log P(U=u)$ .

Bsp: Sei  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $f \in \mathbb{R}^m$ ,  $f = Ku + z$  mit  $z \in \mathbb{R}^m$  der Realisierung einer Zufallsvariable,  $z \sim N(0, \mathbb{I})$   
 $\Rightarrow f \sim N(Ku, \mathbb{I}) \Rightarrow P(F=f|U=u) = \text{const. } \exp\left(-\frac{\|f - Ku\|^2}{2\sigma^2}\right)$   
 $\Rightarrow \text{ML-Schätzer } u = \text{argmin}_u -\log P(F=f|U=u) = \text{argmin}_u \|f - Ku\|^2$   
 $= \text{Kleinste-Quadrat-Lösung}$

Sei  $u$  verteilt mit  $P_u(u) = \text{const. } \exp -\|u\|^2$

$\Rightarrow \text{MAP-Schätzer } u = \text{argmin}_u -\log P(F=f|U=u) - \log P_u(u)$   
 $= \text{argmin}_u \|Ku - f\|^2 + 2\sigma^2 \|u\|^2$   
 $= \text{Tikhonov-Regularisierungslösung}$

Bem: Der ML-Schätzer sucht die Daten  $u$ , die die Messung  $f$  mit größter Wahrscheinlichkeit erzeugt haben. Dies ist (zumindest im Unendlichdimensionalen) nicht wohlgestellt und benötigt eine Regularisierung.

Der MAP-Schätzer sucht die unter der beobachteten Messung  $f$  wahrscheinlichsten Daten  $u$ . Für viele Rauscharten ist die Messung  $f$  verteilt mit  $P(F=f|U=u) = \exp(-D(Ku, f))$  für ein Distanz- oder Diskrepanzmaß  $D$ . Nehmen wir weiterhin eine sogenannte Gibbs-Verteilung  $P_u(u) = \exp(-R(u))$  für eine Energie  $R$  an, ist der MAP-Schätzer

$$u = \text{argmin}_u D(Ku, f) + R(u),$$

also der Minimierer eines Funktionalen mit Datenterm  $D(Ku, f)$  und Regularisierungsterm  $R(u)$ .

Bsp: (Datenterme)

### 1) Additives Gaußsches Rauschen

Messfehler eines Sensors sind oft normalverteilt. Werden die Einträge der Messung  $f$  von  $m$  identischen unabhängigen Sensoren gemessen, so ist auch  $f$  normalverteilt,  $f \sim N(Ku, \sigma^2 I)$ .  $\Rightarrow D(Ku, f) = -\log P(F=f|U=u) = \text{const.} + |Ku-f|^2 \sigma^2$ .

### 2) Additives Laplace-Rauschen

Messfehler durch Sensorausfälle/-störungen können manchmal durch Laplace-Rauschen modelliert werden, d.h.  $f \sim L((Ku))$  mit  $P(F=f, U=u) = \text{const.} \exp(-|Ku| - f/b)$ .

$$\Rightarrow D(Ku, f) = -\log \prod_{i=1}^m \text{const.} \exp(-|Ku_i| - f_i/b) = \sum_{i=1}^m |Ku_i|/b + \text{const.} = \text{const.} + \frac{|Ku-f|}{b}$$

### 3) Poisson-Rauschen

Der radioaktive Zerfall in einem radioaktiven Material (z.B. während PET) oder die Emission von Photonen (z.B. in Fluoreszenz-Mikroskopie) oder die Ablenkung von Elektronen (z.B. in Elektronenmikroskopie) sind Markov-Prozesse, d.h. ihr Verhalten ab Zeit  $t$  ist unabhängig von der Vorgeschichte (dem Verhalten bis zur Zeit  $t$ ). Die durchschnittliche Rate  $\lambda$  der Ereignisse (Zerfälle, Emissionen usw.) ist dabei fest (und proportional zur Menge radioaktiven/fluoreszenten Materials usw.). Die Anzahl  $f$  an Ereignissen im Zeitintervall  $[t, t+T]$  ist dann Poisson-verteilt,

$$P(F=f | \lambda, T) = \frac{(\lambda T)^f}{f!} e^{-\lambda T}$$

Ist die zu  $f_i$  gehörende Intensität  $(Ku_i)$ , dann ist

$$D(Ku, f) = -\log \prod_{i=1}^m \frac{((Ku_i)T)^{f_i}}{f_i!} e^{-(Ku_i)T} = \sum_{i=1}^m (Ku_i)T - f_i \log((Ku_i)T) - \log f_i! = \text{const.}$$

Def: Die Kullback-Leibler-Distanz zwischen reellen  $a, b$  ist  $D(a, b) = a - b \log a + b \log b - b$ .

Die (physikalische/informationstheoret.) Entropie eines Dichtewertes  $y$  ist  $e(y) = y \log y - y$ .

Die Bregman-Distanz zur konvexen glatten Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $D_g(x, y) = g(x) - g(y) - g'(y)(x - y)$

Thm: 1) Die Kullback-Leibler-Distanz  $D$  ist nichtnegativ, konvex, und  $D(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ .

2) Die Bregman-Distanz ist nichtnegativ und konvex im ersten Argument.

3) Die Kullback-Leibler-Distanz ist die Bregman-Distanz zur Entropie.

4) Der Datenterm für Poisson-Rauschen ist bis auf eine Konstante die Kullback-Leibler-Dist.

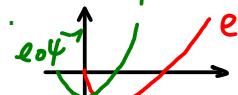
Bew: ausrechnen

□

Def: Regularisierung mit dem Regularisierungsterm  $E(u) = \int e(u(x)) dx = \int u(x) (\log u(x) - 1) dx$  heißt maximale Entropie-Regularisierung (bzgl. des Lebesgue-Maßes).  
 Ist ein ausgezeichnetes  $u^*$  gegeben, so ist die relative Entropie  $E(u) = \int e(u(x)/u^*(x)) u^*(x) dx$  die zugehörige Regularisierung heißt maximale Entropie-Regularisierung bzgl.  $u^*$ .

Die maximale Entropie-Regularisierung wird typischerweise für inverse Probleme von Wahrscheinlichkeitsdichten genutzt und hierfür mit der zusätzlichen konvexen Bedingung  $u \geq 0$  und  $\int u dx = 1$  gekoppelt.

Bem: Maximale Entropie-Regularisierung kann auf klassische Tikhonov-Regularisierung zurückgeführt werden: Sei  $\psi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  monoton so, dass  $e(u) = \psi^{-2}(u) - 1$ , und  $\phi : L^2 \rightarrow \mathbb{R}$   $u \mapsto \phi(u)$ . Dann ist  $\underset{u \in L^2}{\operatorname{argmin}} \|F(u) - y\|^2 + E(u) = \underset{z \in L^2}{\operatorname{argmin}} \|F(\psi^{-1}(z)) - y\|^2 + \|z\|^2$ .



Existenz und Konvergenz können so auf den klassischen Fall zurückgeführt werden.

Def: Der Regularisierungsterm  $\| \cdot \|_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,  $\|x\|_0 = \operatorname{Kard}\{i \in \{1, \dots, m\} \mid x_i \neq 0\}$  heißt  $\ell_0$ -Norm.  
 Ein Vektor mit kleiner  $\ell_0$ -Norm heißt dünn-besetzt oder sparse.

Die  $\ell_0$ -Norm wird bspw. für Dictionary-Encoding/Kompression genutzt: Seien  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ ,  $n < m$  sog. Atome, d.h. typische Vektoren  $y \in \mathbb{R}^m$  (z.B. Pixelbilder) können als Linearkombination weniger  $a_i$  dargestellt werden (hierzu ist  $m > n$  nötig). Die Matrix  $A = (a_1 \mid \dots \mid a_n)$  heißt dann Wörterbuch oder Dictionary. Um  $y$  zu komprimieren, sucht man ein dünnbesetztes  $x \in \mathbb{R}^m$  mit  $Ax = y$ , d.h. man löst  $\underset{x}{\operatorname{min}} \|x\|_0$  s.d.  $Ax = y$ . Im sog. Compressed Sensing hingegen hat man Messungen  $y = Ax$  von dünnbesetztem  $x$  gegeben und versucht,  $x$  durch das Minimierungsproblem zu rekonstruieren.

$$\underset{x}{\operatorname{min}} \|x\|_0 \mid x = y$$

Thm: Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m > n$ , so, dass jegliche  $n$  Spalten linear unabhängig sind. Sei  $y = Ax$  für ein  $x$  mit  $\|x\|_0 < n/2$ . Dann ist  $x$  eindeutige Lösung von  $\underset{x}{\operatorname{min}} \|x\|_0$  s.d.  $Ax = y$ .

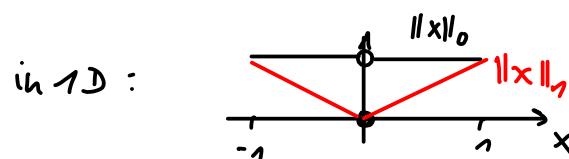
Bew: Sei  $Az = y$  mit  $\|z\|_0 < n/2$ , dann gilt  $v := x - z \in \ker A$ . Sei  $w$  der Vektor  $v$  ohne Nulleinträge und  $B$  die Matrix aus den zugehörigen  $k < n-1$  Spalten von  $A$ , dann ist  $w \in \ker B$  und  $\operatorname{rg} B = k$ , somit  $w = 0$ .  $\square$

Bem: Die benötigte Eigenschaft der Matrix  $A$  gilt z.B. fast sicher, wenn ihre Spalten zufällig (gleichverteilt) aus dem Einheitsball oder der Einheitssphäre gewählt werden.

Bem: Die Minimierung der  $\ell_0$ -Norm unter Nebenbedingung  $Ax = y$  (oder auch alternativ die Minimierung von  $\|x\|_0 + \|Ax - y\|^2$ ) ist ein kombinatorisches Problem und schwer zu lösen. Daher relaxiert/vereinfacht man das Problem typischerweise zu einem konvexen Problem.

Thm: Die konvexe Hülle von  $\| \cdot \|_0$  auf dem  $\mathbb{R}$ -Einheitsball (größte konvexe Funktion unter  $\| \cdot \|_0$ ) ist die  $\ell_1$ -Norm.

Bew: HA



Def: Das Minimierungsproblem  $\min ||x||_b$  s.d.  $Ax=y$  heißt Basis Pursuit.

Das Minimierungsproblem  $\min ||Ax-y||^2 + \alpha ||x||_b$  (oder anderem zum Rauschen passenden Datenterm) heißt Basis Pursuit Denoising.

Thm: Minimiere  $||x||_b$  bzw.  $||x||_1$  unter der Nebenbedingung  $Ax=y$  für ein  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $n < m$ , mit voller Rang. Es gibt einen Minimierer mit  $||x||_b \leq n$ .

Bew: -  $y$  lässt sich als Linearkombination von  $n$  Spalten von  $A$  schreiben

=> optimale  $b$ -Norm ist kleiner als oder gleich  $n$ .

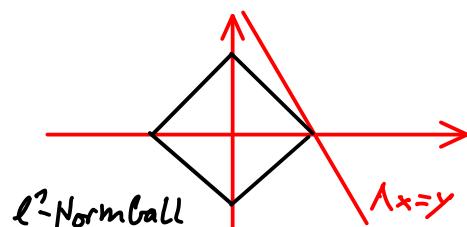
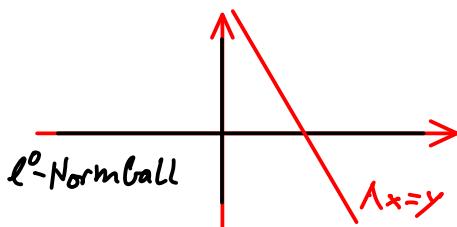
-  $V = \{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax=y\}$  ist ein mindestens  $(m-n)$ -dimensionaler Unterraum von  $\mathbb{R}^m$ .

Sei  $x$  ein Minimierer mit  $||x||_1 = r$  und  $B$  der  $1$ -Einheitsball.

Dann ist  $rB \cap V = B \cap V$  (wäre es im Inneren von  $B$ , gäbe es ein besseres  $x$ ).

Daher schneidet  $V$   $rB$  in einer  $(m-1-n)$ -dimensionalen Seite von  $rB$ .

Auf den  $(m-1-n)$ -dimensionalen Seiten liegen jedoch nur Vektoren mit  $\leq n$  Einträgen.  $\square$



Man kann zeigen, dass für generische  $(m \times n)$ -Matrizen  $A$  beide Minimierungsprobleme

$\min ||x||_b$  s.d.  $Ax=y$  (P<sub>b</sub>)  $\min ||x||_1$  s.d.  $Ax=y$  (P<sub>1</sub>)

die gleiche eindeutige Lösung haben, sofern  $y=Az$  für ein ausreichend dünn besetztes  $z$ .

Hierzu zitieren wir folgenden Satz aus [Donoho: For Most Large Underdetermined Systems of Linear Equations the Minimal  $1$ -norm Solution is also the Sparsest Solution].

Thm: Sei  $S(m,n) = \{A = (a_1 | \dots | a_m) \mid a_i \in \mathbb{R}^n\}$  mit der gleichmäßigen Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Für  $I \subseteq \{1, \dots, m\}$  sei  $A_I$  die Matrix aus den zugehörigen Spalten und  $|I| = \text{Kard}(I)$ . Für einen Vektor  $d \in \mathbb{R}^m$  sei  $d_I$  der Vektor aus den zugehörigen Einträgen. Für  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0$  definie

$S_{m,n}^{\rho_1, \gamma_1} = \{A \in S(m,n) \mid \text{minimaler Singulärwert von } A_I \geq \gamma_1 \text{ für alle } I \text{ mit } |I| = n\}$

$S_{m,n}^{\rho_2, \gamma_2} = \{A \in S(m,n) \mid ||Ad|| \geq \sqrt{n} ||Ad|| \text{ für alle } d \in \mathbb{R}^m \text{ mit } ||d||_p \leq n\}$

$S_{m,n}^{\rho_3, \gamma_3} = \{A \in S(m,n) \mid ||d_I|| \geq \sqrt{\gamma_3} ||A_I d_I|| \text{ für alle } d \in \mathbb{R}^m \text{ mit } Ad=0 \text{ und alle } I \text{ mit } |I| \leq n\}$

Für alle  $R > 1$  existieren  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0$ , sodass für jede Folge  $m < Rn$  die Wahrscheinlichkeiten  $P(S_{m,n}^{\rho_1, \gamma_1}), P(S_{m,n}^{\rho_2, \gamma_2}), P(S_{m,n}^{\rho_3, \gamma_3})$  exponentiell in  $n$  gegen 1 konvergieren.

Def: Der equivalence breakdown point einer Matrix  $A$ ,  $\text{EBP}(A)$ , sei das maximale  $N$ , sodass für alle  $y$  mit  $y=Az$  für ein  $z$  mit  $||z||_b < N$  die Probleme (P<sub>b</sub>) und (P<sub>1</sub>) die eindeutige Lösung  $z$  haben.

Thm: Für jedes  $R > 1$  gibt  $\text{esp}(R) > 0$ , sodass für jede Folge  $m < Rn$  gilt  $P(\{\text{EBP}(A) \geq (R)n\}) \rightarrow 1$ .

Bew: Es reicht, ein  $\rho(R)$  zu finden, sodass  $\{\text{EBP}(A) \geq (R)n\} \supset S_{m,n}^{\rho_1, \gamma_1} \cap S_{m,n}^{\rho_2, \gamma_2} \cap S_{m,n}^{\rho_3, \gamma_3}$ .

Setze  $\rho(R) = \min\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$  und  $I = \text{supp}(z)$ .

Sei  $z+d$  ein alternativer Kandidat für die Minimierung von (P<sub>1</sub>), folglich  $Ad=0$ .

Es gilt  $||z+d||_1 - ||z||_1 \geq ||d_I||_1 - ||d_I||_1$ . Für  $A \in S_{m,n}^{\rho_1, \gamma_1} \cap S_{m,n}^{\rho_2, \gamma_2} \cap S_{m,n}^{\rho_3, \gamma_3}$  gilt  $||d_I||_1 = -A_I d_I$

$||d_I||_1 \leq \sqrt{|I|} ||d_I||_2 \leq \sqrt{|I|} ||A_I d_I||_2 / \gamma_1, \quad ||d_I||_1 \geq \gamma_2 ||A_I d_I||_2 > \gamma_2 \gamma_3 \sqrt{|I|} ||A_I d_I||_2$

$\Rightarrow ||d_I||_1 > \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \sqrt{n/|I|} ||d_I||_1 \geq \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 / \sqrt{\rho(R)} ||d_I||_1 = ||d_I||_1$

$\Rightarrow z$  ist eindeutiger Minimierer von (P<sub>1</sub>) (für (P<sub>b</sub>) schon oben gezeigt)  $\square$

Bem: Analoge Resultate erhält man auch für rauschbehaftete Daten; in dem Fall minimiert man z.B.  $\|x\|_1$ , s.d.  $\|Ax-y\|_2 \leq \epsilon$  und erhält für den Rekonstruktionsfehler  $\|x - \hat{x}\|_2 \leq \epsilon$ , siehe z.B. [Candès, Romberg, Tao: Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements]. Diese Resultate, also die Möglichkeit, mittels  $\ell_1$ -Regularisierung stabile Rekonstruktionen aus (rauschbehafteten) Messungen zu erhalten, bilden die Grundlage für sog. Compressed Sensing.

Die Entsprechung der  $\ell_1$ -Regularisierung im unendlich-dimensionalen ist die Radonmaß-Norm. Auch diese sorgt für Dünnsbesetzung, d.h. die rekonstruierten Maße sind typischerweise Diracs.

Def: Sei  $\mathcal{S}$  kompakt. Der Dualraum zu  $C(\mathcal{S})$  ist der Raum  $M(\mathcal{S})$  der Radonmaße.

Thm: Für  $u \in L^1(\mathcal{S})$  ist  $\|u\|_{M(\mathcal{S})} = \|u\|_1$ .  $\sup_{\substack{\varphi \in C_c(\mathcal{S}) \\ \|\varphi\|_{C_c} \leq 1}} \int_{\mathcal{S}} \varphi u \, dx = \sup_{\|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1} \int_{\mathcal{S}} \varphi u \, dx = \|u\|_1$

Thm: (Riesz)  $M(\mathcal{S})$  sind die regulären, abzählbar additiven Borelmaße auf  $\mathcal{S}$ . Die Radonmaß-Norm ist gleich der sog. totalen Variation  $\|u\|_{M(\mathcal{S})} = \sup \sum_{i=1}^n |u_i| \|u_i\|_{C_c}$  meistbar & disjunkt

Bsp: Zu  $x \in M([0,1])$  sei nur eine Glättung/Faltung gegeben, z.B. die niedrigsten  $2K+1$  Fourier-Koeffizienten,

$$y(k) = \int_{\mathcal{S}} x(t) \exp(-ikt) dt$$

Wir fassen  $F$  auf wie zuvor die  $(n \times m)$ -Matrix mit  $n=2K+1$  und  $m=\infty$  und minimieren

$$\min_x \|x\|_{M([0,1])} \text{ s.d. } Fx = y \quad (P)$$

Thm: (Exakte Rekonstruktion ohne Rauschen) Sei  $z = \sum_i a_i \delta_{t_i}$  mit  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $t_i \in [0,1]$ ,  $|t_j - t_i| > 2/K + i$ ,  $K > 127$ . Dann ist  $z$  der eindeutige Minimierer von  $(P)$ .

Der Beweis ist typisch für exakte Rekonstruktionsresultate: Er zeigt die Existenz einer Lösung des dualen Problems, die zu den perfekten Daten passt. Das duale Problem erhält man wie folgt:

primales Problem:

$$\min_{x \in M} \|x\|_{M} \text{ s.d. } F_K x = y$$

Sachpunktproblem:

$$\min_{x \in M} \|x\|_{M} - \langle \varphi_1, F_K x - y \rangle \quad y \in \mathbb{R}^{2K+1}$$

„kleiner starker Dualität“ =:  
(gilt  $\varphi_1$  unter best. Beding.)

$$\geq \sup_{\varphi \in X} \min_{x \in M} \|x\|_{M} - \underbrace{\langle F_K^* \varphi, x \rangle}_{= \int \frac{x}{|x|}(t) F_K^* \varphi(t) - 1 dx} + \langle \varphi, y \rangle$$

duales Problem:

$$= \sup_{\varphi \in Y} \langle \varphi, y \rangle \quad \text{s.d. } \|F_K^* \varphi\|_{C_0} \leq 1$$

Findet man nun ein  $\varphi$  mit  $\|F_K^* \varphi\|_{C_0} \leq 1$  und  $\langle \varphi, y \rangle = \|z\|_1$ , dann muss  $z$  optimal sein.

Für den Beweis zitieren wir folgendes Resultat aus [Candès, Fernandez-Granda: Towards a mathematical theory of superresolution].

Thm: Für jedes  $T = \{t_1, \dots, t_m\}$  mit  $|t_i - t_j| > 2/K$  und  $v: T \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $|v(t_i)| = 1$  existiert ein trigonometrisches Polynom  $p(t) = \sum_{k=-K}^K c_k \exp(2\pi i k t)$  mit  $p(t_i) = v(t_i)$ ,  $i=1, \dots, m$ , und  $|p(t)| < 1$  sonst.

Bew: (Exakte Rekonstruktion) Wähle  $\varphi \in Y$ , dass  $p(t) = F_K^* \varphi(t) = \sum_{k=-K}^K \varphi_k e^{-2\pi i k t}$  erfüllt  $p(t_i) = \frac{a_i}{|a_i|}$  und  $|p(t)| < 1$  sonst.

Dann ist  $\|z\|_1 = \sum_k |a_k| = \langle p, z \rangle = \langle F_K^* \varphi, z \rangle = \langle \varphi, y \rangle \quad \& \|F_K^* \varphi\|_{C_0} \leq 1 \Rightarrow z \text{ ist optimal.}$

Für jeder  $x \neq z$  mit  $F_K x = y$  ist  $\|x\|_M > \langle p, x \rangle = \langle F_K^* \varphi, x \rangle = \langle \varphi, y \rangle = \|z\|_1$ .  $\square$

Bem: Analoge exakte Rekonstruktionsresultate gelten auch in höheren Dimensionen. Obwohl die totale Variations-Regularisierung nicht offensichtlich eine Annahme über die Struktur der Daten enthält, kann sie diese dennoch exakt rekonstruieren (d.h. sowohl die Amplituden als auch die Positionen der Diracs werden exakt getroffen). Entsprechende Resultate mit Rauschen gelten (wie in Compressed Sensing) ebenfalls.

Bisher haben wir nur (Integrabilität der) Funktionswerte regularisiert, nun möchten wir räumliche Regularität erzwingen, d.h. die Existenz eines (schwachen) Gradienten und dessen Integrabilität. Mit klassischer Tikhonov-Regularisierung für  $Ku=y$  bedeutet dies die Wahl  $X=H_0^1$ , d.h.

$$\min \|Ku-y\|_y^2 + \alpha \|u\|_0^2 = \min \|Ku-y\|_y^2 + \alpha \int |Du|^2 dx.$$

Die Optimalitätsbedingung lautet

$$0 = \alpha \Delta u + K^*(Ku-y), \text{ also } u \in \Delta^{-1} K^*(Ku-y).$$

Dies bedeutet starke Glättung, z.B. für  $K=I$ ,  $Y=L^2$  folgt aus elliptischer Regularität  $u \in H^2$ !

Wählt man allgemeiner eine Regularisierung  $\int g(Du(x)) dx$  mit  $g$  strikt konvex, erhält man

$$0 = -\text{div}(g'(Du)) + K^*(Ku-y) \text{ mit Linearisierung } \text{div}(g''(Du)Dv) + K^*Kv = \text{rechte Seite.}$$

Da  $g''$  positiv definit ist, ist die gleiche Glättung zu erwarten. Räumliche Regularisierung, die nicht wie  $\Delta^{-1}$  glättet, kann man also nur mit nicht strikt konvexem  $g$  erhalten. Das Paradebeispiel ist  $g=|\cdot|$ , also Regularisierung mit

$$\int |Du| dx = \|Du\|_L^1 \text{ falls } Du \in L^1 \text{ bzw. } \|Du\|_H \text{ sonst.}$$

Def: Die totale Variation einer messbaren Funktion  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen, ist

$$|u|_{TV} = \sup \{ \int u \cdot \text{div } v dx \mid v \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^d), \|v\|_{L^\infty} \leq 1 \}.$$

Der Raum der Funktionen mit beschränkter Variation ist

$$BV(\Omega) = \{ u \in L^1(\Omega) \mid |u|_{TV} < \infty \}.$$

Darauf ist  $\|u\|_{BV} = \|u\|_L^1 + |u|_{TV}$  eine Norm.

distributionelle Ableitung

Thm:  $BV(\Omega) = \{ u \in L^1(\Omega) \mid Du \in M(\Omega) \}$  mit  $|u|_{TV} = \|Du\|_M$ . Folglich  $|u|_{TV} = \|Du\|_M$  für  $u \in BV(\Omega)$ .

Bew:  $\therefore |u|_{TV} = \sup \{ \int u \cdot \text{div } v dx \mid v \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d), \|v\|_\infty \leq 1 \} \leq \|Du\|_M$

c: Sei  $u \in BV(\Omega) \Rightarrow$  distributionelle Abg.  $Du$  ist lineares Funktional auf  $C_0^0(\Omega; \mathbb{R}^d)$   
 mit  $Du(v) \leq |u|_{TV} \|v\|_{C^0}$  Hahn-Banach  $\Rightarrow$  eindeutige Fortsetzung  $Du: C^0(\Omega; \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$   
 mit  $\|Du\| \leq |u|_{TV}$  Riesz  $\Rightarrow$   $Du \in M(\Omega)$  mit  $\|Du\|_M \leq |u|_{TV}$   $\square$

Bem: TV-Regularisierung erlaubt Diskontinuitäten - mehr noch: diese sind nicht teurer als glatte Übergänge, siehe folgendes Beispiel:

$$u(x) = \min(1, \max(0, nx)) \Rightarrow |u|_{TV} = \|Du\|_M = n \cdot 1/n = 1.$$

$$\text{Ebenso für } n \rightarrow \infty: u(x) = \text{Heaviside-Funktion} \Rightarrow |u|_{TV} = \|Du\|_M = 1.$$



Bem: Regularisierung mit  $\|u\|_M$  bzw.  $\|u\|_H$  hat Dünnbesetztheit erzeugt, d.h. TV-Regularisierung sorgt für Dünnbesetztheit des Gradienten: Die Lösung  $u$  des inversen Problems wird typischerweise stückweise konstant sein mit Sprüngen zwischendrin. Dieser Effekt nennt sich Staircasing.

Wir möchten das inverse Problem  $Ku=f$  mit der totalen Variation von  $u$  regularisieren, also  $\|Ku-f\|^2 + \alpha |u|_{TV}$  minimieren. Zur Untersuchung, ob ein Minimierer existiert, benötigen wir die Unterhalbstetigkeit und die Koerzivität der totalen Variation. Dabei reduzieren wir alles auf den Fall, dass  $u$  im Mittel 0 ist.

Def:  $BV_0(\Omega) = \{u \in BV(\Omega) \mid \int_{\Omega} u \, dx = 0\}$ .

Thm: Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen mit Lipschitz-Rand  $\frac{q}{q-1} \geq d$ , dann ist die Einbettung  $BV(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  stetig.  
Für  $\frac{q}{q-1} > d$  ist die Einbettung kompakt.  $\Rightarrow$  in jeder Dimension kompakte Einbettung in ein  $L^q$  mit  $q > 1$ !

Thm: Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen mit Lipschitz-Rand.  $BV(\Omega)$  ist der Dualraum des Raums  $Z$ , der Vervollständigung von  $Z_0 = \{\operatorname{div} g \mid g \in C_0^\infty(\Omega)\}$  bzgl. der Norm  $\|p\| = \inf\{\|g\| \mid g \in Z_0, \operatorname{div} g = p\}$ ,  $\operatorname{div} g = p$

Bem: Somit ist  $BV_0(\Omega)$  der Dualraum zu einem separablen Banachraum.

Bew: (für glatten Rand von  $\Omega$ )

$BV_0 \subset Z^* \because$  Sei  $u \in BV_0(\Omega)$ , setze  $\ell_u: Z_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto \int_{\Omega} u p \, dx$ .

Mit  $p = \operatorname{div} g$  gilt  $|\ell_u(g)| = \left| \int_{\Omega} u \operatorname{div} g \, dx \right| \leq \|g\|_{C_0} \|u\|_{TV}$

$\Rightarrow |\ell_u(p)| \leq \inf \{ \|g\|_{C_0} \mid p = \operatorname{div} g \} \|u\|_{TV} = \|p\|_Z \|u\|_{TV}$

$\Rightarrow |\ell_u| \leq \|u\|_{TV}$  auf  $Z_0$  Hahn-Banach  $\Rightarrow \ell_u$  kann erweitert werden zu  $\ell_u \in Z^*$

$\cdot u_1 \neq u_2 \Rightarrow \ell_{u_1} \neq \ell_{u_2}$ , sonst  $\|u_1 - u_2\|_{TV} = \sup_{g \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d), \|g\|_{C_0} \leq 1} \ell_{u_1}(\operatorname{div} g) - \ell_{u_2}(\operatorname{div} g) = 0$

$Z^* \subset BV_0 \because$  Für  $q$  groß genug gilt  $L^q_0(\Omega) = \{v \in L^q(\Omega) \mid \int_{\Omega} v \, dx = 0\} \subset Z$ :  
Sei  $v \in L^q_0(\Omega)$  und  $g \in C_0^\infty(\Omega)$  Lösung des Stokes-Problems  $\begin{cases} -\Delta g + \nabla p = 0 \text{ auf } \Omega \\ \operatorname{div} g = v \text{ auf } \Omega \\ g = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$   
dann ist  $g \in W^{1,q}(\Omega)$  &  $v = \operatorname{div} g$

[Amrouche, Girault: On the Existence and Regularity of the Solution of Stokes Problem in Arbitrary Dimension, 1991]

$g$  kann in  $W^{1,q}(\Omega)$  beliebig genau durch  $\tilde{g} \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$  approximiert werden

$\tilde{v} = \operatorname{div} \tilde{g} \in Z_0$  &  $\|v - \tilde{v}\|_Z \leq \|g - \tilde{g}\|_{C_0} \leq \|g - \tilde{g}\|_{W^{1,q}}$  für  $q > d \Rightarrow v \in Z$

$\Rightarrow Z^* \subset L^{q'}_0(\Omega)$  mit  $q' = \frac{q}{q-1}$

$\Rightarrow$  jeder  $\ell \in Z^*$  kann identifiziert werden mit einem  $u \in L^{q'}_0(\Omega)$ ,

$\& |\ell|_{TV} = \sup_{g \in C_0^\infty, \|g\|_{C_0} \leq 1} \int_{\Omega} u \operatorname{div} g \, dx \leq \sup_{p \in Z, \|p\|_Z \leq 1} \int_{\Omega} u p \, dx = \|\ell\|_{Z^*}$

$\Rightarrow u \in BV_0(\Omega)$

□

Thm: Die totale Variation ist unterhalbstetig unter schwach-\*Konvergenz in  $BV_0(\Omega)$ .

Bew: Sei  $u_n \xrightarrow{*} u$  und  $\psi_k \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$  mit  $\|\psi_k\|_{C_0} \leq 1$  so dass  $\int_{\Omega} u \operatorname{div} \psi_k \, dx \rightarrow |\ell|_{TV}$

$\Rightarrow \int_{\Omega} u \operatorname{div} \psi_k \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \operatorname{div} \psi_k \, dx = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \operatorname{div} \psi_k \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |u_n|_{TV}$

$\Rightarrow |u|_{TV} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |u_n|_{TV}$

□

Bem:  $u_n \xrightarrow{*} u$  in  $BV_0(\Omega) \iff \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d): \int_{\Omega} u_n \text{div} \varphi \, dx \rightarrow \int_{\Omega} u \text{div} \varphi \, dx$   
 $\iff \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d): \int_{\Omega} \varphi \partial_i \nabla u_n \rightarrow \int_{\Omega} \varphi \partial_i \nabla u$   
 $\iff \nabla u_n \xrightarrow{*} \nabla u$  in  $M(\Omega)$

Thm: (Poincaré-Ungleichung) Auf  $BV_0(\Omega)$  ist die totale Variation eine äquivalente Norm.

Bew:  $\|u\|_{BV} = \|u\|_{L^1} + |u|_{TV} \geq |u|_{TV}$

Annahme:  $\forall n \in \mathbb{N} \exists u_n \in BV_0(\Omega) : \|u_n\|_{BV} > n |u_n|_{TV}$

Sei  $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{BV}}$   $\xrightarrow{\text{Banach-Alaoglu}}$   $\exists$  schwach-\* konvergente Teilfolge  $v_n \xrightarrow{*} v$   
 $\xrightarrow{\text{kompakte Einbettung in } L^1} v_n \rightarrow v$  in  $L^1(\Omega)$

$$\Rightarrow \|v\|_{L^1(\Omega)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{L^1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{L^1} + |v_n|_{TV} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{BV} = 1$$

$$\text{außerdem } |v|_{TV} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |v_n|_{TV} = 0 \quad |v_n|_{TV} \leq \frac{1}{n} \quad \Rightarrow v = 0 \quad \square$$

Bem: Folglich ist die totale Variation koerativ auf  $BV_0(\Omega)$ , d.h.  $|u|_{TV} < \infty \Rightarrow \|u\|_{BV} < \infty \Rightarrow$  es existiert eine schwach-\*konvergente Teilfolge.

Kor: Die Abbildung  $J: BV(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \oplus BV(\Omega)$ ,  $\mapsto \int_{\Omega} u \, dx, \int_{\Omega} u \, dx$  ist ein Isomorphismus. Sei auf  $\mathbb{R} \oplus BV(\Omega)$  die Norm  $\|(r, v)\| = |r| + |v|$  definiert, dann gibt es  $c > 0$  mit  $c \|u\|_{BV} \leq \|(J(u))\| \leq \|u\|_{BV}$

Bew: -  $J$  ist linear und invertierbar, also ein Isomorphismus

$$\begin{aligned} - \|\cdot\| \text{ ist offensichtlich eine Norm} \\ - \|(J(u))\| &= \left| \int_{\Omega} u \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} u \, dx \right| \stackrel{\leq \frac{1}{2}}{\leq} \|u\|_{L^1} + \left| \int_{\Omega} u \, dx \right| \stackrel{\frac{1}{2}}{\leq} \|u\|_{L^1} + \left| \int_{\Omega} \max\{u, 0\} \, dx \right| \stackrel{\leq}{\leq} \|u\|_{BV} \\ - \|(J(u))\| &= \left| \int_{\Omega} u \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} u \, dx \right| \stackrel{\leq \frac{1}{2}}{\leq} \|u\|_{L^1} + \left| \int_{\Omega} u \, dx \right| + c \left| \int_{\Omega} u^- \, dx \right| \stackrel{\leq}{\leq} \|u\|_{L^1} + c \left| \int_{\Omega} u^- \, dx \right| + c \left| \int_{\Omega} u^- \, dx \right| \stackrel{\leq}{\leq} c \|u\|_{BV} \end{aligned} \quad \square$$

Nun können wir das regularisierte inverse Problem betrachten. Im Folgenden sei  $Y$  ein Hilbertraum und  $K: BV(\Omega) \rightarrow Y$  ein kompakter Operator. Die Lösung des inversen Problems  $Ku=f$  wird approximiert durch  $\underset{u \in BV(\Omega)}{\operatorname{argmin}} E(u)$  mit  $E(u) = \|Ku-f\|^2 + |u|_V$

Thm:  $E(r+v)$  ist unterhalbstetig unter schwach-\*Konvergenz in  $BV_0(\Omega)$  und Konvergenz in  $\mathbb{R}$ .

Bew: Es genügt, Unterhalbstetigkeit von  $\|K(r+v)-f\|$  zu zeigen.

$$\text{Sei } \tilde{\varphi} = K(r+v) - f \in Y, \quad \varphi = \tilde{\varphi} / \|\tilde{\varphi}\|, \quad r_n \rightarrow r, \quad v_n \xrightarrow{*} v.$$

$$\begin{aligned} \|K(r+v)-f\| &= \langle K(r+v)-f, \varphi \rangle = \langle r, K^* \varphi \rangle + \langle v, K^* \varphi \rangle - \langle f, \varphi \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle r_n, K^* \varphi \rangle + \langle v_n, K^* \varphi \rangle - \langle f, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle K(r_n+v_n)-f, \varphi \rangle \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|K(r_n+v_n)-f\| \|\varphi\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|K(r_n+v_n)-f\| \end{aligned} \quad \square$$

Thm: Falls  $K \neq 0$ , ist  $E$  koerziv auf  $BV(S)$  (d.h. Subniveaumengen von  $E$  sind beschränkt in  $BV(S)$ )  
 Andernfalls  $E(u) = E(u_f)$  und  $E$  ist koerziv auf  $BV(S)$   $\leftarrow$  dieser Fall ist trivial wegen  $\|u\|_{BV} \leq c \|u\|_{TV}$  auf  $BV(S)$

Bew: Angenommen, es gäbe eine Folge  $u_n \in BV(S)$  mit  $\|u_n\|_{BV} > n$  und  $E(u_n) < \infty$ .

Setze  $\bar{u}_n = \int_S u_n dx$  &  $\hat{u}_n = u_n - \bar{u}_n$ . Wegen der Normäquivalenz von  $\|\cdot\|_{BV}$  &  $\|\cdot\|_1$  dürfen wir annehmen  $|\bar{u}_n| + \|\hat{u}_n\|_{TV} > n$ .

Wegen  $\alpha \hat{u}_n \leq E(u_n) < \infty$  folgt  $|\hat{u}_n| \rightarrow \infty$ , doch

$$\begin{aligned} E(u_n) &= \|\bar{u}_n K 1 + K \hat{u}_n - f\|^2 + \|\hat{u}_n\|_{TV} \geq \|\bar{u}_n K 1 + K \hat{u}_n - f\|^2 \\ &\geq \max(\|\bar{u}_n K 1\| - \|K \hat{u}_n\|_1, 0)^2, \end{aligned}$$

und  $\|K \hat{u}_n\| \leq \|K\| \|\hat{u}_n\|_{BV} \leq \text{const} \|K\| \|\hat{u}_n\|_{TV} \leq \text{const}$ .

$$\Rightarrow E(u_n) \geq \max(|\bar{u}_n| \|K 1\| - \text{const}, 0)^2 \rightarrow \infty \quad \square$$

Thm:  $E$  besitzt einen Minimierer in  $BV(S)$ .

Bew: Direkte Methode:

0)  $E(0) = 0$  und  $\geq 0$

1) Betrachte Minimalfolge  $u_n$  mit  $E(u_n) < E(u_{n+1})$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(u_n) = \inf E$ ; setze  $\bar{u}_n = \int_S u_n dx$ ,  $u_n = \bar{u}_n + \hat{u}_n$

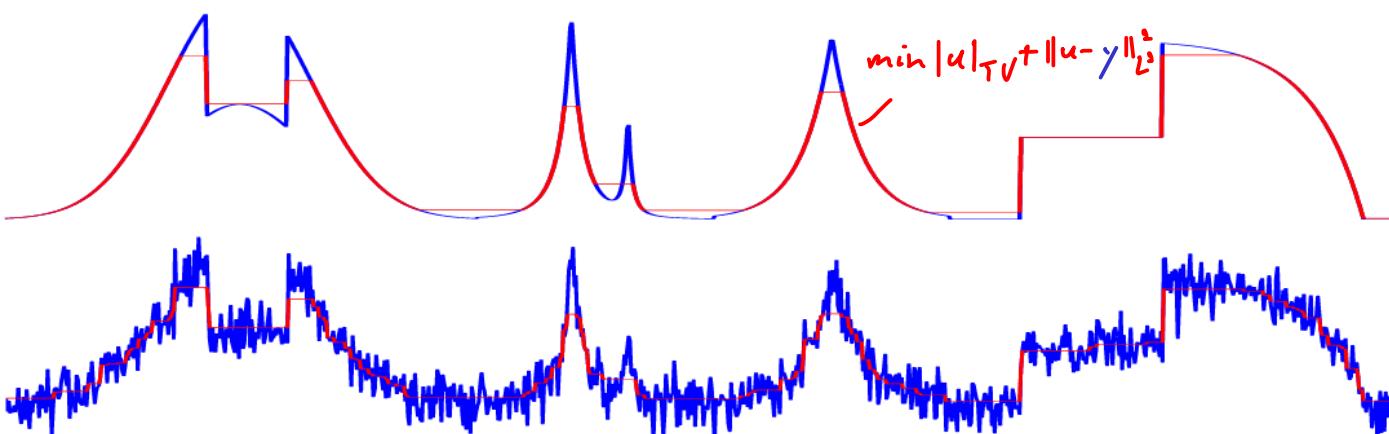
2) Da  $E$  koerziv,  $\bar{u}_n \rightarrow \bar{u}$  und  $\hat{u}_n \rightarrow \hat{u}$  für eine Teilfolge (bzw.  $\bar{u} = 0$ , falls Minimierer in  $BV(S)$  gesucht werden darf)

3) Da  $E$  unterhalbstetig,  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(u_n) = E(u)$   $\square$

Thm: Falls  $K$  injektiv ist, ist der Minimierer von  $E$  eindeutig.

Bew: Für  $K$  injektiv ist  $\|Ku - f\|^2$  und somit auch  $E$  strikt konvex in  $u$ .  $\square$

Zum Schluss möchten wir noch das Staircasing analysieren. In 1D ist das Phänomen gut verstanden und lässt sich auf die Optimalitätsbedingungen zurückführen. Hierfür zitieren wir ein paar Resultate aus der Optimierung. In höheren Dimensionen gibt es ein Argument, das auf der Coarea formula und der isoperimetrischen Ungleichung beruht [Khalid Jalalzai: Some remarks on the staircasing phenomenon in total-variation based image denoising].



Def: - Sei  $X$  ein Banachraum. Die Legendre-Fenchel-Konjugierte einer Funktion  $f: X \rightarrow (-\infty, \infty]$  ist  $f^*: X^* \rightarrow (-\infty, \infty]$ ,  $f^*(z) = \sup_{x \in X} \langle z, x \rangle - f(x)$ .

- Das Gebiet  $\text{dom } f$  einer konvexen Funktion  $f$  ist die Menge, auf der  $f$  endlich ist.

Thm: (Fenchel-Moreau) Ist  $f$  konvex und unterhalbstetig, so ist  $f^{**}=f$ .

Thm: (Fenchel-Rockafellar) Seien  $X, Y$  Banachräume,  $f: X \rightarrow (-\infty, \infty]$  und  $g: Y \rightarrow (-\infty, \infty]$  konvex und unterhalbstetig,  $A: X \rightarrow Y$  linear & beschränkt, und es gebe  $\text{A dom } f$ , sodass  $g$  in  $y$  stetig ist. Dann gilt die starke Dualität  $\inf\{f(x) + g(Ax) \mid x \in X\} = \sup\{-f^*(-A^*y^*) - g^*(y^*) \mid y^* \in Y^*\}$ .

Kor: Gilt starke Dualität und sind  $x, y^*$  optimal für das primale und duale Problem, so gelten die Optimalitätsbedingungen

$$\begin{array}{lll} v = Ax & \text{maximiert} & \langle v, y^* \rangle - g(v) \\ w = A^*y^* & \text{maximiert} & -\langle x, w \rangle - f(w) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Bew: } f(x) + g(Ax) &= \inf_{\tilde{x}} f(\tilde{x}) + g^*(A\tilde{x}) && \text{primales Problem} \\ &= \inf_{\tilde{x}} \sup_{\tilde{y}^*} f(\tilde{x}) + \langle A\tilde{x}, \tilde{y}^* \rangle - g^*(\tilde{y}^*) && \text{Sattelpunktproblem} \\ &= \sup_{\tilde{y}^*} \inf_{\tilde{x}} f(\tilde{x}) + \langle \tilde{x}, A^*\tilde{y}^* \rangle - g^*(\tilde{y}^*) && \text{starke Dualität} \\ &= \sup_{\tilde{y}^*} - \left( \sup_{\tilde{x}} \langle \tilde{x}, -A^*\tilde{y}^* \rangle - f(\tilde{x}) \right) - g^*(\tilde{y}^*) \\ &= \sup_{\tilde{y}^*} - f^*(-A^*\tilde{y}^*) - g^*(\tilde{y}^*) = -f^*(A^*y^*) - g^*(y^*) && \text{duales Problem} \end{aligned}$$

$$\text{Folglich } f(x) + g(Ax) \geq f(x) + \langle Ax, y^* \rangle - g^*(y^*) \geq -f^*(A^*y^*) - g^*(y^*)$$

mit Gleichheit  $\Leftrightarrow g(Ax) = \langle Ax, y^* \rangle - g^*(y^*) \quad \& \quad \langle x, A^*y^* \rangle + f(x) = -f^*(A^*y^*) \square$

$$\begin{aligned} \text{In unserem Fall: } X &\equiv \mathcal{B}V(\Omega), Y = M(\Omega) \times \mathcal{Y}, Y \text{ Hilbertraum}, A = \begin{pmatrix} \nabla \\ K \end{pmatrix}, f = 0, g(\alpha, \psi) = \alpha \|\alpha\|_M + \|K\psi - y\|_Y^2 \\ \Rightarrow \min_u \|u\|_{TV} + \|Ku - y\|_Y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt starke Dualität, da } g \text{ stetig in } (0, 0) \in A^* \text{ dom } f, \quad A = (-\text{div}, K^*), \\ f^*(0) = 0, f^* = \infty \text{ sonst, } g^*(\varphi, 4) = \frac{1}{4} \|\varphi\|_{Y^*}^2 + \langle y, 4 \rangle \text{ falls } \|\varphi\|_{C^0} \leq \alpha, g^* = \infty \text{ sonst} \\ \Rightarrow \sup_{\substack{\varphi, 4 \\ \|\varphi\|_{C^0} \leq \alpha \\ \text{div } \varphi = K^* 4}} \frac{1}{4} \|\varphi\|_{Y^*}^2 + \langle y, 4 \rangle \quad \text{hier } \varphi \in M(\Omega)^*, \text{ normalerweise} \\ \text{ist es natürlicher, } M \text{ als Dualraum} \\ \text{aufzufassen!} \quad (\times) \end{aligned}$$

$$\text{Opt.-Bed: } v = \begin{pmatrix} \nabla u \\ Ku \end{pmatrix} \quad \text{maximiert} \quad \langle v_1, \varphi \rangle - \alpha \|v_1\|_M + \langle v_2, 4 \rangle - \|v_2 - y\|_Y^2 \quad (1)$$

$\Rightarrow$  formal, falls Lösungen  $u, (\varphi, 4)$  zu primalem & dualem Problem existieren (für das primale Problem haben wir es gezeigt), gilt

$$\underbrace{\text{div } \varphi \stackrel{(*)}{=} K^* 4}_{\Rightarrow K^* K u = K^* y + \text{div } \varphi / 2}, \quad Ku \stackrel{(*)}{=} y + \frac{R \varphi}{2}, \quad \nabla u = 0 \text{ oder } \varphi = \alpha \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}$$

$$\text{In (1) gilt also } \nabla u = 0 \text{ oder } \varphi = \alpha \text{ oder } \varphi = -\alpha, \text{ also } \nabla u = 0 \text{ oder } K^* K u = K^* y.$$

Folglich ist  $u$  in einigen Bereichen konstant und stimmt im Komplement exakt mit einer kleinsten Quadrate-Lösung überein. Bei verrauschten Daten ist letzteres sehr unwahrscheinlich.

Noch nicht behandelte, beim nächsten Mal aufzunehmende Themen:

1) EM-Iteration (als iteratives Verfahren, doch eventuell erst nach stochastischer Optimierung?)

Vorlage: z.B. "EM-TV Methods for Inverse Problems with Poisson Noise"

2) Übergang zu kontinuierlichem Modell über Diskretisierung und Gamma-Limes