Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christian Engwer, MSc Marcel Koch

13.12.2019

Übung zur Vorlesung

Wissenschaftliches Rechnen

WS 2019/20 — Blatt 11

Abgabe: 20.01.2020, 10:00 Uhr, Briefkasten 112
Code zusätzlich per e-mail an `marcel.koch@uni-muenster.de`

Achtung: Achten Sie darauf, Ihre Programme ordentlich zu formatieren und gut zu kommentieren. Die Form wird mit in die Bewertung eingehen.

Aufgabe 1 (Komplexität des W-Zyklus) (4 Punkte)

Ein W-Zyklus der Mehrgittermethode ist durch folgenden Algorithmus vorgegeben

```
procedure MGM_l(x_l, b_l):
  if l = 0 then x_0 := A_0^{-1} b_0 else
  begin
    x_l := Smoother(x_l, b_l)
    d_{l-1} := R_l(b_l - A_l x_l)
    x_{l-1}^0 := 0; for i = 1 to 2 do x_{l-1}^i := MGM_l(x_{l-1}^{i-1}, d_{l-1});
    x_l := x_l + P_l x_{l-1}^2
    x_l := Smoother(x_l, b_l)
  end
}
```

Bestimmen Sie analog zur Vorlesung die arithmetischen Kosten eines W-Zyklus, wobei das Level $\mathcal{T}_l$ durch uniforme Verfeinerung von $\mathcal{T}_{l-1}$ entstanden ist.

Aufgabe 2 (Hierarchische Basis) (4 Punkte)

Bei der Mehrgittermethode kann anstatt der herkömmlichen Lagrange Basis auf jedem Level auch eine sogenannte *hierarchische Basis* verwendet werden. Diese ist definiert durch

$$\psi_i^l = \begin{cases} \phi_i^l & \text{für } i \in I_l \setminus I_{l-1}, \\ \phi_i^{l-1} & \text{für } i \in I_{l-1}, \end{cases}$$

wobei ϕ_i^l die Lagrange Basis zum Knoten x_i mit $i \in I_l \setminus I_{l-1}$ ist. Abbildung 1 stellt diese Basis beispielhaft in 1D für drei Level dar.

(a) Welche Vorteile bringt die hierarchische Basis gegenüber der Lagrange Basis?

(b) Bestimmen Sie die Transformationen zwischen der hierarchischen und der Lagrange Basis auf einem Level l eines 1D Gitters.

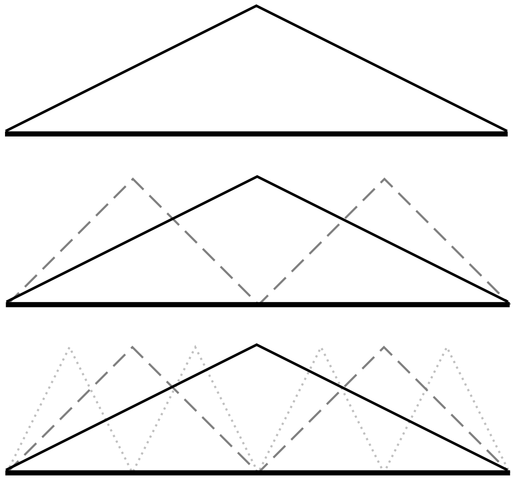

Abbildung 1: Hierarchische Basis auf drei Level

Aufgabe 3 (Paper zur Mehrgittermethode)

Als Vorbereitung für die Vorlesungen kommende Woche, lesen Sie folgendes Paper:
Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems