Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christian Engwer, MSc Marcel Koch

16.12.2019

Übung zur Vorlesung

Wissenschaftliches Rechnen

WS 2019/20 — Blatt 10

Abgabe: **07.01.2020**, 10:00 Uhr, Briefkasten 112
Code zusätzlich per e-mail an `marcel.koch@uni-muenster.de`

Achtung: Achten Sie darauf, Ihre Programme ordentlich zu formatieren und gut zu kommentieren. Die Form wird mit in die Bewertung eingehen.

Aufgabe 1 (Optimale obere Schranke für die additive Schwarz-Methode) (5 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen Sie eine verbesserte obere Schranke für den größten Eigenwert der additiven Schwarz-Methode zeigen. Diese hat die Form

$$\left\langle \sum_{i=0}^{p} P_i x, x \right\rangle_A \leq (N^c + 1)\langle x, x\rangle_A,$$

wobei N^c ist die Anzahl der Farben aus der "endliche Überdeckung" Voraussetzung.

Hinweis: Betrachten Sie folgende Operatoren $\mathbb{P}_n = \sum_{i \in J_n} P_i$, wobei $J_n = \{i \in \{1, \ldots, p\} : c(i) = n\}$, die Menge aller Indices mit der Farbe n ist. Insbesondere überschneiden sich die dazugehörigen Teilgebiete nicht.

Aufgabe 2 (Algebraische Grobgitter Korrektur) (5 Punkte)

Sei $\mathcal{T}_H$ eine Triangulierung des beschränkten Gebiets Ω und $\mathcal{T}_h$ eine Verfeinerung von $\mathcal{T}_H$. Die dazu gehörigen Finite-Elemente Basen sind definiert als

$$\Phi_H = \{\phi_i^H : i \in \mathcal{I}_H\},$$
$$\Phi_h = \{\phi_i^h : i \in \mathcal{I}_h\}$$

und die Finite-Elemente Räume durch

$$V_H = \operatorname{span} \Phi_H,$$
$$V_h = \operatorname{span} \Phi_h.$$

Definiere die Restriktion $R_H : V_h \mapsto V_H$ bezüglich der Basen Φ_H, Φ_h durch die Matrix

$$(R_H)_{ij} = \phi_i^H(x_j),\ i \in \mathcal{I}_H\ j \in \mathcal{I}_h,$$

wobei x_j die Lagrange-Knoten von Φ_h sind.
Für gegebenes u_h^k ist die Grobgitter-Korrektur w_H definiert durch

$$a(u_h^k + w_H, v) = l(v) \quad \forall v \in V_H.$$

(a) Zeige, dass
$$\phi_i^H = \sum_{j \in \mathcal{I}_h} (R_H)_{ij} \phi_j^h.$$

(b) Zeige, dass
$$R_H A_h (R_H)^T = A_H, \quad \text{mit } A_h = a(\phi_j^h, \phi_i^h),\ A_H = a(\phi_j^H, \phi_i^H).$$

(c) Folgern Sie damit die algebraische Version der Grobgitter-Korrektur
$$x_H = R_H^T A_H^{-1} R_H (b - A_h x_h^k).$$

Aufgabe 3 (Inexakte Teilgebietslöser) (5 Punkte)

Sei $a(\cdot,\cdot)$ eine koerzive Bilinearform und A die damit assoziierte Steifigkeits- Matrix. In der Schwarz-Methode mit exakten Lösungen auf den Teilgebieten werden die lokale Biliniearformen $a_i(\cdot,\cdot)$ mit
$$a_i(u_i, v_i) := a(R_i^T u_i, R_i^T v_i)$$
und den dazugehörigen lokalen Steifigkeits-Matrizen $A_i = R_i A R_i^T$ betrachtet. Nehmen Sie nun an, dass ein inexakter Löser statt a_i eine geströrte Bilinearform $\tilde{a}_i(\cdot,\cdot)$ mit Steifigkeits-Matrix $\tilde{A}_i$ löst.
Wie sind die Operatoren P_i der Schwarz-Methode in diesem Fall definiert? Welche Eigenschaften von P_i beleiben erhalten, welche können durch das inexakte Lösen nicht mehr erfüllt bleiben? Welche Teile des Konvergenzbeweises der Schwarz-Methode sind davon betroffen?