Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 09.12.2019
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christian Engwer, MSc Marcel Koch

Übung zur Vorlesung

Wissenschaftliches Rechnen

WS 2019/20 — Blatt 9

Abgabe: 16.12.2019, 10:00 Uhr, Briefkasten 112
Code zusätzlich per e-mail an `marcel.koch@uni-muenster.de`

Achtung: Achten Sie darauf, Ihre Programme ordentlich zu formatieren und gut zu kommentieren. Die Form wird mit in die Bewertung eingehen.

Aufgabe 1 (Hybride Schwarz-Methode) (3 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie bereits die additive Schwarz-Methode und die multiplikative Schwarz-Methode mit Grobgitterkorrektur kennen gelernt. In dieser Aufgabe wird eine Hybrid-Variante beider Methoden betrachtet. Dabei werden die Korrekturen auf den einzelnen Teilgebieten in der additiven Variante berechnet und die Grobgitterkorrektur wird nach den Teilgebietskorrekturen in der multiplikativen Variante angewandt.

(a) Geben Sie die Iterationsvorschrift für den resultierenden Algorithmus an.

(b) Bestimmen Sie den Fehlerfortpflanzungsoperator $e^{k+1} = Pe^k$.

Aufgabe 2 (Eigenschaften von P_i) (3 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{I \times I}$ eine spd-Matrix, $R_i : \mathbb{R}^I \mapsto \mathbb{R}^{\hat{I}_i}$ die Restriktion auf ein Teilgebiet Ω_i und $A_i = R_i A R_i^T$ die Einschränkung von A auf ein Teilgebiet Ω_i. Zeigen Sie, dass $P_i = R_i^T A_i^{-1} R_i A$ eine Orthogonalprojektion ist bzgl. des A-Skalarprodukts mit den folgenden Eigenschaften

(a) $P_i^2 = P$.

(b) $AP_i = P_i^T A$. Dies impliziert $\langle x, P_i y \rangle_A = \langle P_i x, y \rangle_A$, d.h. P_i ist selbst-adjungiert bezüglich des A-Skalarprodukts.

(c) $\langle P_i x, P_i y \rangle_A = \langle x, P_i y \rangle_A \ \forall x, y \in \mathbb{R}^I$.

(d) $\langle P_i x, (\mathbb{1} - P_i) y \rangle_A = 0 \ \forall x, y \in \mathbb{R}^I$.

(e) $||x||_A^2 = ||P_i x||_A^2 + ||(\mathbb{1} - P_i) x||_A^2 \ \forall x \in \mathbb{R}^I$.

(f) $||P_i x||_A \leq ||x||_A \ \forall x \in \mathbb{R}^I$.

Aufgabe 3 (Analytische Fehlerdämpfung) (9 Punkte)

In dieser Aufgabe wird das 1D Problem

$$\begin{aligned} -u_{xx} &= f \text{ in } (0,1) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

betrachtet. Die Diskretisierung mit linearen Finiten Elementen auf einem Gitter mit $n = 2N+1$ Punkten im inneren führt zu dem Gleichunssystem

$$A_h u = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} u = f,$$

wobei die Gitterweite gegeben ist durch $h = 1/(n+1)$. Zusätzlich ist ein grobes Gitter mit $N = (n-1)/2$ Punkten und $H = 1/(N+1) = 2h$ definiert. Die Systemmatrix für das Grobgittersystem ist analog zu A_h definiert.
Das Gleichungssystem auf dem feinen Gitter wird iterativ mittels dem Jacobi-Verfahren und zusätzlicher Grobgitterkorrektur gelöst. Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass das Jacobi-Verfahren bestimmmte Anteile des Fehlers stark reduziert und durch die Grobgitterkorrektur die Anteile reduziert werden, die nur schwach vom Jacobi-Verfahren gedämpft werden.

(a) Zeigen Sie, dass $(e_k)_l = sin(kl\pi h)$ die Eigenvektoren von A_h sind mit den Eigenwerten $\frac{4}{h^2}\sin^2(\frac{k\pi h}{2})$.

(b) Bestimmen Sie den Fehlerfortpflanzungsoperator $e^{k+1} = E_s e^k$ der Jacobi-Methode und dessen Eigenwerte. Zeigen Sie damit, dass die hochfrequenten Anteile des Fehlers (Frequenz zwischen $\pi/4$ und $3\pi/4$) stark gedämpft werden und niedrigfrequente Anteile (Frequenz kleiner $\pi/4$) nur gering gedämpft werden.

(c) Bestimmen Sie die Restriktions und Interpolations Matrizen R, R^T, sodass stückweise lineare Funktionen auf dem groben Gitter exakt in das feine Gitter interpoliert werden.

(d) Der Fehlerfortpflanzungsoperator der Grobgitterkorrektur lässt sich darstellen als $E_c = \mathbb{1} - R^T A_H^{-1} R A_h$. Um die Eigenwerte dieses Operators zu bestimmen, wird E_c zunächst auf (2×2) Blockdiagonalform gebracht. Sei Dazu Q_h eine Matrix mit den Eigenvektoren von A_h in folgender Reihenfolge

$$Q_h = \begin{pmatrix} e_1 & e_n & e_2 & e_{n-1} & \cdots & e_N & e_{N+2} & e_{N+1} \end{pmatrix}$$

und Q_H die Matrix der Eigenvektoren von A_H in kanonischer Reihenfolge.

(i) Zeigen Sie, dass

$$Q_h^{-1} E_c Q_h = \begin{pmatrix} \sin^2(\pi h/2) & \cos^2(\pi h/2) & & & & \\ \sin^2(\pi h/2) & \cos^2(\pi h/2) & & & & \\ & & \sin^2(2\pi h/2) & \cos^2(2\pi h/2) & & \\ & & \sin^2(2\pi h/2) & \cos^2(2\pi h/2) & & \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Sie können davon ausgehen, dass der letzte Block dieser Matrix auch die Größe 2×2 hat.

(ii) Bestimmen Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte der Diagonalblöcke.

(iii) Folgern Sie, dass die Grobgitterkorrektur den niedrigfrequenten Anteil des Fehlers reduziert.