Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christian Engwer, MSc Marcel Koch 25.11.2019

Übung zur Vorlesung

Wissenschaftliches Rechnen

WS 2019/20 — Blatt 7

Abgabe: 02.12.2019, 10:00 Uhr, Briefkasten 112
Code zusätzlich per e-mail an `marcel.koch@uni-muenster.de`

Achtung: Achten Sie darauf, Ihre Programme ordentlich zu formatieren und gut zu kommentieren. Die Form wird mit in die Bewertung eingehen.

Aufgabe 1 (Massenerhaltung im FV-Kontext) (2 Punkte)

Zeigen Sie die „$\Rightarrow$“ Richtung folgender Aussage aus der Vorlesung. Aus der lokalen Massenerhaltung folgt globale Massenerhaltung genau dann, wenn die Flussberechnung von links und von rechts gleich ist, d.h. wenn

$$\nabla u(\gamma)|_{V_1} = \nabla u(\gamma)|_{V_2} \quad \text{für alle } V_1, V_2 \in \mathcal{V} \text{ mit einem gemeinsamen Face } \gamma.$$

Aufgabe 2 (Finite Elemente mit P_1 auf strukturierten Gitter) (4 Punkte)

Betrachten Sie das Poissonproblem in schwacher Formulierung mit Dirichlet Null Randwerten

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{dx} = \int_\Omega 1 \cdot v \mathrm{dx} \quad \forall v \in H_0^1, \tag{1}$$

auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0,1)^2$. Sie sollen nun die globale Steifigkeitsmatrix und rechte Seite einer P_1 Finite Elemente Diskretisierung analytisch berechnen.
Das Gebiet wird zunächst in Rechtecke mit Kantenlänge $h = 1/N$ zerlegt, wobei $N+1$ die Anzahl an Knoten in x- und y-Richtung ist. Die Knoten dieser Unterteilung sind

$$x_i = \frac{1}{h}\left(i \bmod (N+1), \left\lfloor \frac{i}{N+1} \right\rfloor\right).$$

Die Rechtecke werden weiter entlang der $y = x$ Diagonalen in zwei Dreiecke unterteilt. Dies liefert eine strukturierte Triangulierung von Ω mit $(N+1)^2$ Freiheitsgraden.
Berechnen Sie explizit die Einträge der Steifigkeitsmatrix und der rechten Seite im inneren des Gebiets, d.h.

$$A = (a(\varphi_j, \varphi_i)), \quad b = (1, \varphi_i)_{L^2} \text{ für } i, j \text{ mit } x_i, x_j \in \Omega,$$

wobei φ_i, $i = 0, \ldots, (N+1)^2 - 1$ die nodale Basis des Ansatzraums ist, d.h. $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$. Setzen Sie die Einträge für Randknoten so, dass die Matrix positiv definit bleibt.

Aufgabe 3 (Mass-Lumping) (2 Punkte)

Sei $\mathcal{T}(\Omega)$ eine aus Vierecken bestehende Triangulierung von $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Sei M, die sogenannte Massenmatrix, gegeben durch

$$M_{i,j} = \int_\Omega \phi_i \phi_j \,\mathrm{dx}$$

wobei ϕ_i die nodale Basis von $\mathcal{T}$ ist, d.h. $\phi_i|_e \in Q_1(e)$ für $e \in \mathcal{T}$. Zeigen Sie, dass die Matrix M zur Diagonalmatrix wird, falls die Trapezregel zur Integration verwendet wird.

Hinweis: Die nodale 2D Basis lässt sich als Tensorprodukt von 1D Basisfunktionen aufschreiben, d.h. $\phi_{k,l}(x,y) = \phi_k(x)\phi_l(y)$.