Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christian Engwer, MSc Marcel Koch

11.11.2019

Übung zur Vorlesung

Wissenschaftliches Rechnen

WS 2019/20 — Blatt 5

Abgabe: 18.11.2019, 10:00 Uhr, Briefkasten 112
Code zusätzlich per e-mail an `marcel.koch@uni-muenster.de`

Achtung: Achten Sie darauf, Ihre Programme ordentlich zu formatieren und gut zu kommentieren. Die Form wird mit in die Bewertung eingehen.

Aufgabe 1 (Lie-Trotter-Splitting) (4 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie das sogenannte *Lie-Trotter-Splitting* kennen gelernt. Dabei wird die Lösung eines Anfangswertproblems mit additiv zerlegter rechter Seite

$$\frac{\partial a}{\partial t} = f(a) + g(a), \quad a(0) = a_0 \tag{1}$$

approximiert. Angenommen $\Phi_f^{\Delta t}$ liefert eine Lösung für die Gleichung $\frac{\partial a}{\partial t} = f(a)$ und $\Phi_g^{\Delta t}$ liefert eine Lösung für die Gleichung $\frac{\partial a}{\partial t} = g(a)$.Dann bestimmt man beim *Lie-Trotter-Verfahren* eine Näherungslösung von (1) durch

$$\Phi_{f+g}^{\Delta t} \approx \Phi_g^{\Delta t} \circ \Phi_f^{\Delta t}.$$

Zeigen Sie, dass das *Lie-Trotter-Splitting* die Konsistenzordnung 1 hat. Zeigen Sie dabei insbesondere, dass es nicht von Konsistenzordnung 2 ist.

Aufgabe 2 (CFL-Bedingung in 1D) (4 Punkte)

(a) Betrachten Sie die 1D Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = D\partial_{xx} u$ auf $\mathbb{R}$, wobei die Randbedingung ignoriert werden. Zur Diskretisierung im Ort werden Finite-Differenzen verwendet und für die Zeit-Diskretisierung das implizite Eulerverfahren. Es sei u_j^n die exakte diskrete Lösung und $\tilde{u}_j^n = u_j^n + \epsilon_j^n$ eine geströrte Lösung des Problems.

  (i) Zeigen Sie, dass sich der Fehler $\epsilon_j^n = \tilde{u}_j^n - u_j^n$ als $\epsilon_j^n = \lambda_n e^{ik(j\Delta x)}$ mit $k \in \mathbb{N}$ darstellen lässt, mit geeigneten λ_n.

  (ii) Zeigen Sie, dass die Stabilität dieses Verfahrens nicht von $\Delta t/\Delta x$ abhängt.

(b) Betrachten Sie die die 1D Transportgleichung $\partial_t u + c\partial_x u = 0$ auf $\mathbb{R}$ mit $c \in \mathbb{R}$. Wie zuvor werden Randbedingungen ignoriert.

(i) Diskretisieren Sie die Gleichung mit dem zentralen Differenzenquotienten im Ort und dem expliziten Eulerverfahren in der Zeit.

(ii) Zeigen Sie, dass dieses Verfahren unabhängig von $\Delta t/\Delta x$ instabil ist, also insbesondere, dass die CFL-Bedingung nicht hinreichend ist. Benutzen Sie dazu eine zur vorherigen Aufgabe analoge Fehlerdarstellung.

Tipp zu (a): Es gilt $\sin^2 x = -\frac{e^{ix}+e^{-ix}-2}{4}$.