Cholesky-Zerlegung

October 26, 2018

1 Cholesky-Zerlegung

In der Vorlesung wird gezeigt: Positiv definite Matrizen A besitzen eine Zerlegung

$$A = L\,L^t$$

mit einer linken unteren Dreiecksmatrix L. Wir wollen den Algorithmus herleiten, der diese Zerlegung berechnet.

Es sei dazu also A positiv definit und

$$L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_n \end{pmatrix}.$$

mit den Spaltenvektoren $l_k \in \mathbb{R}^n$. Da L eine linke untere Dreiecksmatrix ist, gilt $(l_i)_k = 0$ für $k < i$. Damit ist

$$L^t = \begin{pmatrix} l_1^t \\ l_2^t \\ \vdots \\ l_n^t \end{pmatrix}$$

Entsprechend sei

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Wir versuchen nun, die l_k so zu bestimmen, dass $A = L\,L^t$. Wir erhalten durch Einsetzen für die erste Spalte:

$$a_1 = l_1\,l_{1,1}.$$

Für die erste Zeile also $l_{1,1}^2 = a_{1,1}$.

Wir wählen also

$$l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}},\, l_1 = \frac{1}{l_{1,1}} a_1.$$

In der zweiten Spalte gilt

$$a_2 = l_1 l_{1,2} + l_2 l_{2,2}.$$

Wir setzen also $b = a_{2,2} - l_{1,2} l_1$, $l_{2,2} = \sqrt{b_1}$ und $l_2 = \frac{1}{l_{2,2}} a_2$. Dies natürlich nur in den Zeilen 2 bis n, der Rest ist 0 nach Voraussetzung.

Dies wird entsprechend fortgesetzt, und wir erhalten den Algorithmus:

```
In [46]: import numpy as np
         import math
         def cholesky(A):
             A=A.copy();
             N=A.shape[1]
             L=np.zeros([N,N])
             for i in range(0,N):
                 for j in range(0,i):
                     A[i:N,i]=A[i:N,i]-L[i,j]*L[i:N,j]
                 alpha=math.sqrt(A[i,i])
                 L[i:N,i]=A[i:N,i]/alpha
             return L
```

Wir erzeugen eine zufällige Matrix A, dann ist $A^t A$ eine zufällige positiv (semi-) definite Matrix. Wir berechnen die Cholesky-Zerlegung und testen, ob $LL^t = A$.

```
In [50]: N=1024
         A=np.random.uniform(-1,1,[N,N])
         A=np.matmul(A.T,A)
         L=cholesky(A)
         np.linalg.norm(np.matmul(L,L.T)-A)
```

```
Out[50]: 1.3056108047975261e-11
```

Ja, berechnet die Cholesky-Zerlegung.