Satz 3.3 (Allg. Existenzsatz)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, offen, beschränkt & Lipschitz Rand, $f \in C^0(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ gegeben mit

i) $\xi \mapsto f(x, u, \xi)$ konvex $\forall (x, u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$

ii) $\exists\, p > q \geq 1$ und $a_1 > 0$, $a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ sodass

$$f(x, u, \xi) \geq a_1 |\xi|^p + a_2 |u|^q + a_3 \quad \forall (x, u, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

Sei $F(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$ und

$$(P) \qquad \inf_{u_0 + W^{1,p}(\Omega)} F \qquad \text{mit } u_0 \text{ sodass } F(u_0) < +\infty.$$

Dann besitzt (P) eine Lösung $\bar{u}$.

Sei außerdem $(u,\xi) \mapsto f(x,u,\xi)$ strikt konvex $\forall x \in \bar{\Omega}$, dann ist die Lösung von (P) eindeutig.

<u>Satz von Ioffe</u>:

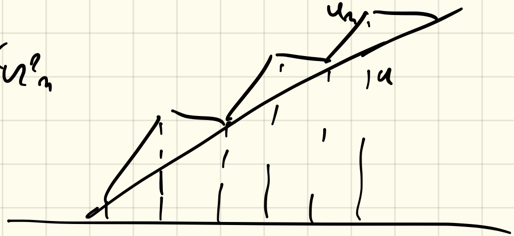
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C^0(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $\xi \mapsto f(x,u,\xi)$ konvex und $f \geq 0$.

Sei $p \geq 1$ und $F: W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definiert durch

$$F(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\,dx.$$

Dann ist F schwach $W^{1,p}$-unterhalbstetig.

$$\nabla u_n = A_1 \chi_{\Omega_n^1}(x) + A_2 \chi_{\Omega_n^2}$$
$$\to \lambda A_1 + (1-\lambda) A_2$$



Zu Beweis von Satz 3.3:

<u>Schritt 1:</u> Kompaktheit von Minimalfolgen

<u>Schritt 2:</u> Unterhalbstetigkeit von F

Wir möchten Satz von Ioffe verwenden aber i.A. $f \ngeq 0$.

Deswegen definieren wir:

$$\tilde{f}(x,u,\xi) = f(x,u,\xi) - a_2 |u|^q - a_3 \overset{(i)}{\geq} a_1 |\xi|^p \underset{a_1 \geq 0}{\geq} 0$$

Nach dem Satz von Tonelli gilt:

$$\liminf_{k} \int_\Omega \tilde{f}(x, u_k, \nabla u_k)\,dx \geq \int_\Omega f(x, u, \nabla u)\,dx$$

$\forall u, u_k$ mit $u_k \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}(\Omega)$.

$$\Leftrightarrow \liminf_{k} \left(F(u_k) - a_2 \underline{\int_\Omega |u_k|^q\,dx} - \underline{a_3 |\Omega|} \right)$$

$$\geq F(u) - \underline{a_2 \int_\Omega |u|^q\,dx} - \underline{a_3 |\Omega|}$$

$u_k \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow u_k \longrightarrow u$ in $L^p(\Omega)$

$\overset{q<p}{\Rightarrow} u_k \longrightarrow u$ in $L^q(\Omega)$

$$\Rightarrow \liminf_{k} F(u_k) \geq F(u).$$

Unterhalbstetigkeit + $\exists$ kompakte Minimalfolge

$\Rightarrow \exists$ Minimum.

<u>Schritt 3:</u> Eindeutigkeit

Sei $\bar{u}, \bar{v} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ mit $F(\bar{u}) = F(\bar{v}) = m$

Setze $w = \dfrac{\bar{u}+\bar{v}}{2} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$

$$m \leq F(\bar{w}) \leq \frac{1}{2} F(\bar{u}) + \frac{1}{2} F(\bar{v}) = m$$

$$\Rightarrow F(\bar{w}) = \frac{1}{2} F(\bar{u}) + \frac{1}{2} F(\bar{v})$$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega \overbrace{\frac{1}{2} f(x, \bar{u}, \nabla\bar{u}) + \frac{1}{2} f(x, \bar{v}, \nabla\bar{v}) - f(x, w, \nabla w)}^{\geq 0} \, dx = 0$$

$\Rightarrow \frac{1}{2} f(x, \bar{u}, \nabla\bar{u}) + \frac{1}{2} f(x, \bar{v}, \nabla\bar{v}) - f(x, w, \nabla w) = 0$ f.ü. und

f strikt konvex

$\Rightarrow$ $\quad \bar{u} = \bar{v}$, $\nabla \bar{u} = \nabla \bar{v}$ $\Longrightarrow$ Eindeutigkeit

$\boxed{S}$

Euler - Lagrange - Gleichung:

$$F(u) = \int_\Omega f(x, u, \nabla u)\, dx$$

$$(P) \quad \inf_{u \in W_0^{1,p} + u_0} F(u) \quad \text{mit } u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$$

Wir möchten die EL - Glg. für F herleiten.

Diese Gleichung wird in schwacher Form sein, da F in $W^{1,p}$ definiert.

Satz 3.11

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt & $\partial\Omega \in$ Lip. Sei $p \geq 1$ und $f \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ eine gegebene Funktion mit

$$(*) \qquad |f_u(x, u, \xi)|,\ |f_\xi(x, u, \xi)| \leq \beta\left(1 + |u|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\right)$$

für ein $\beta > 0$

$\forall (x, u, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

Sei $\bar{u} \in W_0^{1,p}(\Omega) + u_0$ eine Lsg. von (P), dann löst $\bar{u}$ die schwache Form der EL-Gleichung: $\operatorname{div}(f_\xi(x, u, \nabla u)) \overset{\text{in 1D}}{\Longleftrightarrow} \frac{d}{dx}\left(f_\xi(x, \bar{u}, \nabla\bar{u})\right)$

$$(\mathrm{Ew}) \quad \int_\Omega f_u(x, \bar{u}, \nabla\bar{u})\,\varphi\,dx + \int_\Omega f_\xi(x, \bar{u}, \nabla\bar{u})\,\nabla\varphi\,dx = 0$$

$\forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$

Sei außerdem $f \in C^2(\bar\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ und $\bar u \in C^2(\bar\Omega)$, dann $\bar u$ die (klassische) EL-Gleichung.

$$(E) \quad \operatorname{div}_x\left(f_\xi(x,\bar u, D\bar u)\right) = f_u(x,\bar u, D\bar u) \quad \forall x \in \Omega$$

$$\overset{\shortparallel}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_{\xi_i}(x,\bar u, D\bar u)\right)}$$

Sei umgekehrt $(u,\xi) \longrightarrow f(x,u,\xi)$ konvex $\forall x \in \bar\Omega$ und $\bar u$ eine Lösung von (E_w) oder (E), dann ist $\bar u$ eine Lösung von (P)

<u>Bem:</u> (E_w) ist wohldefiniert, d.h. $f_u(x,u,Du)\varphi \in L^1$
$f_\xi(x,u,Du)D\varphi \in L^1$

$f_u(x,u,Du),\ f_\xi(x,u,D\xi) \in L^{r'}$ falls $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$

<u>Beweis:</u> Wir zeigen zunächst, dass $|F(u)| < +\infty \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$f(x,u,\xi) = f(x,0,0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x,tu,t\xi)\,dt$$

Fundamentalsatz von Int & diff Rechnung angewandt auf

$$g(t) := f(x,tu,t\xi) \text{ für } (x,u,\xi) \text{ fest.}$$

$$\frac{d}{dt} f(x,tu,t\xi) = f_u(x,tu,t\xi)\,u + f_\xi(x,tu,t\xi)\,\xi$$

$$\Rightarrow |f(x,u,\xi)| \le |f(x,0,0)| + \int_0^1 |f_u(x,tu,t\xi)|\,|u|\,dt + \int_0^1 |f_\xi(x,tu,t\xi)|\,|\xi|\,dt$$

$$\le \max_{x\in\bar\Omega} |f(x,0,0)| + \beta \int_0^1 (1 + |tu|^{p-1} + |t\xi|^{p-1})\,|\xi|\,dt + \beta \int_0^1 (1 + |tu|^{p-1} + |t\xi|^{p-1})\,|u|\,dt$$

$$\leq M + \beta\big(|u| + |u|^p + \underline{|u|^{p-1}|\xi|} + |\xi| + |u|^{p-1}|\xi| + |\xi|^p\big)$$

$$\leq c(|u|^p + |\xi|^p)$$

$$\leq M + \tilde{\beta}\,(|u|^p + |\xi|^p)$$

$$\Rightarrow |F(u)| < +\infty \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

Sei $\bar{u} \in W_0^{1,p}(\Omega) + u_0$ eine Lösung von (P), also gilt

$$F(\bar{u}) \leq F(\bar{u} + t\varphi) \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Setze $\Phi(t) := F(\bar{u} + t\varphi)$, $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ $\quad \min_{t \in \mathbb{R}} \Phi(t) = \Phi(0)$

$$\Rightarrow \Phi'(0) = 0.$$

$$0 = \Phi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\Phi(t) - \Phi(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{F(\bar{u} + t\varphi) - F(\bar{u})}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega f(x, \bar{u} + t\varphi, \nabla\bar{u} + t\nabla\varphi) - f(x, \bar{u}, \nabla\bar{u})\, dx$$

Wir möchten nun den Grenzwert und das Integral vertauschen.

Achtung: $x \mapsto f(x, \bar{u}(x) + t\varphi(x), \nabla\bar{u}(x) + t\nabla\varphi(x))$ ist nicht glatt. $(\bar{u}, \varphi \in W^{1,p}(\Omega))$

$$g(x,t) := f(x, \bar{u}(x) + t\varphi(x), \nabla\bar{u}(x) + t\nabla\varphi(x))$$

$f \in C^1$ $\quad t \mapsto g(x,t)$ ist in $C^1(\mathbb{R})$ für fast alle $x \in \bar{\Omega}$

Wir möchten den Satz von Lebesgue anwenden, um zu zeigen, dass

$$\lim_{t \to 0} \int_\Omega \underline{\frac{g(x,t) - g(x,0)}{t}}\, dx \overset{(\cdot)}{=} \int_\Omega \lim_{t \to 0} \frac{g(x,t) - g(x,0)}{t} = \int_\Omega g_t(x,0)\, dx$$

Wir zeigen $h^t(x) := \frac{g(x,t) - g(x,0)}{t}$ die Voraussetzungen von dem Satz von Lebesgue erfüllt.

$t \mapsto g(x,t)$ ist C^1, dann liefert der Satz von Lagrange

$$g(x,t) - g(x,0) = g_t(x,\theta)\,t$$

für ein $\theta = \theta(x) \in [-|t|, |t|]$

$$g_t(x,\theta) = f_u(x, \bar{u} + \theta\varphi(x), \nabla\bar{u} + \theta\nabla\varphi(x))\varphi$$
$$+ f_\xi(x, \bar{u} + \theta\varphi(x), \nabla\bar{u} + \theta\nabla\varphi(x))\nabla\varphi(x).$$

$$|h^t(x)| = |g_t(x,\theta)| \le \beta(1 + |\bar{u} + \theta\varphi|^{p-1} + |\nabla\bar{u} + \theta\nabla\varphi|^{p-1})|\varphi|$$
$$+ \beta(1 + |\bar{u} + \theta\varphi|^{p-1} + |\nabla\bar{u} + \theta\nabla\varphi|^{p-1})|\nabla\varphi|$$

$|\theta| \le |t| \le 1$ für $t \to 0^+$ $\le (**)$

$$|\bar{u}+\theta\varphi|^{p-1} \leq (|\bar{u}|+|\theta\varphi|)^{p-1} \leq (2|\bar{u}|)^{p-1} + (2|\theta\varphi|)^{p-1}$$
$$= 2^{p-1}|\bar{u}|^{p-1} + 2^{p-1}|\varphi|^{p-1}$$

$$\overset{(**)}{\leq} \tilde{\beta}\underbrace{\left(1+|u|^{p-1}+|\varphi|^{p-1}+|\nabla u|^{p-1}+|\nabla\varphi|^{p-1}\right)(|\varphi|+|\nabla\varphi|)}_{=:G(x)}$$

Hölder Ungl $\Rightarrow \in L^1(\Omega)$

$\Rightarrow |h^t(x)| \leq G(x) \in L^1(\Omega)$ für t klein

$$h^t(x) \xrightarrow{t\to 0} \frac{\partial g}{\partial t}(x,0) \quad \text{f.ü. in } \Omega.$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x,0) = f_u(x,\bar{u},\nabla\bar{u})\varphi + f_\xi(x,\bar{u},\nabla\bar{u})\nabla\varphi$$

in (·) zum Grenzwert

$\Rightarrow$
$$0 = \int_\Omega f_u(x,\bar{u},\nabla\bar{u})\varphi + \underline{f_\xi(x,\bar{u},\nabla\bar{u})\nabla\varphi}\, dx \quad \forall\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega)$$

partielle Integration

insbesondere $\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$

Falls f und $\bar u \in C^2$, liefert partielle Integration:

$$\int_\Omega \Big(\underbrace{f_u(x,\bar u, \nabla \bar u) - \operatorname{div}_x f_\xi(x,\bar u, \nabla \bar u)}_{\Rightarrow\ =0 \text{ f.ü.}} \Big) \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

$\Rightarrow$ (E)

Sei $\bar u$ eine Lösung von (E_W). Die Konvexität von f bezüglich (u,ξ) liefert: $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)+u_0$

$$f(x,u,\nabla u) \geq f(x,\bar u, \nabla \bar u) + f_u(x,\bar u, \nabla \bar u)(u-\bar u)$$
$$+ f_\xi(x,\bar u, \nabla \bar u)(\nabla u - \nabla \bar u)$$

Da $u-\bar u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$\Rightarrow F(u) \geq F(\bar u) \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)+u_0$

$\blacksquare$