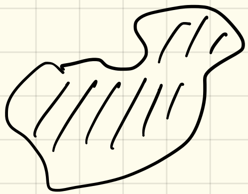
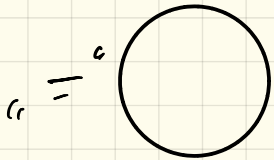
Die Isoperimetrische Ungleichung:

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^2$ mit C^1-Rand, falls ∂A eine geschlossene Kurve, dann gilt

$$L^2 \geq 4\pi M$$

$$L := L(\partial A), \quad M = |A|$$





Die Wirtinger Ungleichung:

$$W^{1,2}_{per}((a,b)) := \{ u \in W^{1,2}((a,b)) : u(a) = u(b) \}$$

Satz 6.1.

$u \in W^{1,2}_{per}((-1,1))$ mit $\int_{-1}^{1} u \, dx = 0$, dann

$$\int_{-1}^{1} (u')^2 \, dx \quad 2\pi^2 \int_{-1}^{1} u^2 \, dx \qquad (*)$$

Dabei gilt „$=$", genau dann wenn $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

so dass $u(x) = \alpha \cos(\pi x) + \beta \sin(\pi x)$.

$$X = \left\{ u \in W^{1,2}_{per}(-1,1) \;:\; \int_{-1}^{1} u \, dx = 0 \right\}$$

Schritt 1: $u \in X \cap C^\infty(-1,1)$

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)) + \frac{a_0}{2}$$

$a_0 = 0$, da $\int_{-1}^{1} u(x) \, dx = 0$.

$$u'(x) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n \sin(n\pi x) + b_n \cos(n\pi x)) \, n.$$

Parseval-Gleichung: $\int_{-1}^{1} u^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

$$\int_{-1}^{1} (u')^2 \, dx = \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)\, n^2$$

$$\geq \pi^2 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)} = \pi^2 \int_{-1}^{1} u^2 \, dx$$

$\forall u \in X \cap C^\infty((-1,1))$

Gleichheit gilt genau dann wenn $a_n, b_n = 0$ $\forall n \geq 2$

$\Leftrightarrow u(x) = a_1 \cos(\pi x) + b_1 \sin(\pi x)$

<u>Schritt 2:</u> $u \in X$, $\exists \{u_n\} \subseteq X \cap C^\infty([-1,1])$

sodass $u_n \to u$ in $W^{1,2}(-1,1)$

(Bemerkung: $\exists \{u_n\} \subseteq W^{1,2}((-1,1)) \cap C^\infty(-1,1)$

sodass $u_n \to u$ in $W^{1,2}((-1,1))$

i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} u_n \, dx \to \int_{-1}^{1} u \, dx$

ii) $u_n \rightrightarrows u$ also insbesondere $u_n(-1) \to u(-1)$

$u_n(1) \to u(1)$

$$V_n = u_n + \frac{1}{2} \overbrace{\int_{-1}^{1} u - u_n \, dx}^{= c_n \to 0} +$$

$$\int_{-1}^{1} v_n \, dx = \int_{-1}^{1} u_n \, d\cancel{x}y + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u - u_n \, dx \, dy$$

$$= \int_{-1}^{1} u_n \, dy + \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u \, dx \, dy}_{=0} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u_n \, dx \, dy$$

$$\| \quad - \int_{1}^{-1} u_n \, dx$$

$$= 0$$

$$\delta_n^1 = u(1) - u_n(1) \longrightarrow 0$$

$$\delta_n^2 \quad u(-1) - u_n(-1) \longrightarrow 0$$

$$v_n(1) - \delta_n^1 = u_n(1) + c_n - \delta_n^1 = u(1) + c_n$$

$$\|$$

$$v_n(-1) - \delta_n^2 = u_n(-1) + c_n - \delta_n^2 = u(-1) + c_n$$

Für u_n gilt (*)

$$\int_{-1}^{1} (u_n')^2 \, dx \geq \pi^2 \int_{-1}^{1} u_n^2 \, dx$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \; u_n' \to u' \text{ in } L^2, \; n \to \infty & & \downarrow \; u_n \to u \text{ in } L^2 \; (n \to \infty) \\ \int_{-1}^{1} (u')^2 \, dx & & \pi^2 \int_{-1}^{1} u^2 \, dx \end{array}$$

Also gilt (*) $\forall \, u \in X$. Es fehlt noch zu zeigen, dass "=" nur für

$$u(x) = \alpha \cos(\pi x) + \beta \sin(\pi x), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

gilt

Schritt 3: Dazu setzen wir $F(u) = \int_{-1}^{1} (u')^2 - \pi^2 u^2 \, dx$

und betrachten

$$(P) \quad \min_{u \in X} F(u).$$

Wir wissen aus Schritt 2, dass $F(u) \geq 0$.

Wir, dass für $u_0(x) = \alpha \cos(\pi x) + \beta \sin(\pi x)$

gilt $\quad F(u_0) = 0$

$$\Rightarrow \quad \min_{u \in X} F(u) = F(u_0) = 0$$

In Schritt 1 haben wir gesehen, dass $u \in X \cap C^\infty([-1,1])$ der einzige Minimierer ist. Falls wir nun zeigen, dass jeder Minimierer von F in $X \cap C^\infty(-1,1)$, folgt die Aussage.

<u>Behauptung:</u> $u \in X$ ist eine Lösung von $(P) \Rightarrow u \in C^\infty(-1,1)$

$$f(x,u,\xi) = \xi^2 - \pi^2 u^2, \quad f_\xi = 2\xi, \quad f_u = -2\pi^2 u,$$

also löst u (E_w) $(**)$
$$\int_{-1}^{1} u'v' - \pi^2 u v \, dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(-1,1) \cap X$$

$$F(u) \leq F(u+\varepsilon v) \quad \forall\, v \in C_0^\infty(-1,1) \cap X, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$$

Wir möchten von (**) auf eine neue Gleichung mit

$v \in C_0^\infty(-1,1)$ kommen.

Dazu $f \in C_0^\infty(-1,1)$: $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$ und $\varphi \in C_0^\infty(-1,1)$

definiere $v(x) = \varphi(x) - \int_{-1}^{1} \varphi(y)\,dy\, f(x)$

$v \in X \cap C_0^\infty(-1,1)$, da

$$\int_{-1}^{1} v(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \varphi(x)\,dx - \int_{-1}^{1} \varphi(y)\,dy \underbrace{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx}_{=1} = 0$$

Wir setzen $\lambda := -\frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^{1} (u'f' - \pi^2 u f)\,dx$

Jetzt löst u: $\quad \underline{\left(v = \varphi - \int_{-1}^{1} \varphi\,dx\, f \right)}$

$$(***) \quad \int_{-1}^{1} (u'\varphi' - \pi^2 (u-\lambda)\varphi)\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(-1,1)$$

Beweis von $(***)$:

$$\int_{-1}^{1} (u'\varphi' - \pi^2 (u-\lambda)\varphi)\,dx$$

$$+ \pi^2\lambda \underline{\int_{-1}^{1} \varphi(y)\,dy} \quad \checkmark$$

$$= \int_{-1}^{1} \underline{u'(v'} + \underline{\int_{-1}^{1} \varphi\,dy\, f'}) - \underline{\pi^2 u (v} + \underline{\int_{-1}^{1} \varphi(y)\,dy\, f}))\,dx$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^{1} u'v' - \pi^2 u v\,dx}_{=0,\ \text{wegen } (**)} + \int_{-1}^{1} \varphi\,dy \underbrace{\left(\overbrace{\int_{-1}^{1} u'f' - \pi^2 u f\,dx}^{\lambda = -\frac{1}{\pi^2}\cdot} + \pi^2\lambda \right)}_{=0,\ \text{nach Def. von } \lambda}$$

also gilt (∗∗∗)

$$\int_{-1}^{1} \left(u'\varphi' - \pi^2 (u-\lambda)\varphi\right) dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(-1,1)$$

$$\lambda := -\frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \left(u'f' - \pi^2 u f\right) dx$$

$$\le C\left(\|u'\|_{L^2}\|f\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|f\|_{L^2}\right) < +\infty$$

$$\int_{-1}^{1} u'\varphi'\, dx = \int_{-1}^{1} \pi^2 (u-\lambda)\varphi\, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(-1,1)$$

$$(*)\quad \Big|\underbrace{\int_{-1}^{1} u'\varphi'\, dx}_{T}\Big| \le \pi^2 \|u-\lambda\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(-1,1)$$

$T : L^2 \to \mathbb{R}$, stetig & linear $T(\varphi) = \int_{-1}^{1} u'\varphi'\, dx$

Mit Riesz! $\exists\ \psi \in C^2(-1,1)$

$$(d)\ \int_{-1}^{1} u'\varphi'\,dx = -\int_{-1}^{1} \psi\varphi\,dx$$

$u' \in W^{1,2}(-1,1)$, da $\psi \in C^2$ existiert sodass (d) gilt.

$$\Rightarrow u \in W^{2,2}(-1,1) \Rightarrow u \in C^1(-1,1).$$

Partielle Integration von (***)

$$-\int_{-1}^{1} (u'' + \pi^2(u-1))\varphi\,dx = 0 \quad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(-1,1)$$

$$\left(\int_{-1}^{1} u'\varphi' - \pi^2(u-1)\varphi\,dx\right)$$

Fundamentale Theorem der Variationsrechnung

$\Rightarrow$

$$u'' = -\pi^2 (u - \lambda) \quad \text{f.ü. in } (-1,1)$$

$$u \in C^1 \Rightarrow u'' \in C^1 \Rightarrow u \in C^3$$

$$\Rightarrow u \in C^\infty$$

$\blacksquare$

Zusatz: Γ-Konvergenz, (A. Braides Γ-Convergence for Beginners)

Γ-Konvergenz: Variationelle Konvergenz:

Familie von Energien: $F_\varepsilon : X \to [0, +\infty]$

ε-parameter, $\min_{u \in X} F_\varepsilon$

Γ-Konvergenz gibt Bedingungen, dass

$$\boxed{\min_{u \in X} F_\varepsilon \longrightarrow \min_{u \in X} F}, \text{ falls } F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F.$$

Beispiele:

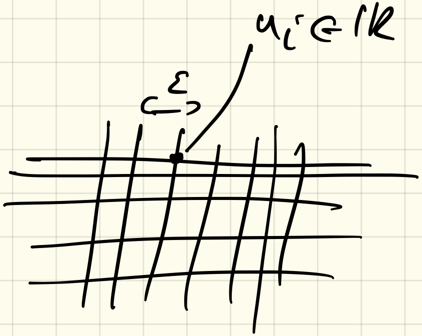
1) Homogenisierung in der Elastizitätstheorie

$$F_\varepsilon(u) = \int_0^1 a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)|u'|^2\,dx, \quad u \in W^{1,2}_{(0,1)}$$

$$F(u) = \int_0^1 a\,|u'|^2\,dx \qquad a \text{ 1-periodische Fkt.}$$

$$F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} \int_0^1 a|u'|^2\,dx$$

2) $u : \varepsilon\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$



$$E_\varepsilon(u) = \sum_{|i-j|=\varepsilon} |u_i - u_j|^2$$

$$\min_{u \in X} E_\varepsilon \xrightarrow{?} E(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$$

1) Entwicklung der theoretischen Grundlage

2) Anwendungen

Seminar von Caterina Zeppieri & Manuel Friedrich

Homepage von Caterina,

Vorlesung: 24.01.2019, 12:00.