Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Caterina Ida Zeppieri
Dr. Leonard Kreutz 13.12.2018

Übungen zur Vorlesung

Variationsrechnung

WS 18/19, Blatt 9

Abgabe: Donnerstag, 20.12.2018, 12:00, Briefkasten 106

Aufgabe 1 **(8 Punkte)**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit Lipschitz Rand und sei $F : W^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(u) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \langle A(x)\nabla u(x), \nabla u(x) \rangle - g(x)u(x) \right) \mathrm{d}x,$$

wobei $g \in L^2(\Omega)$ eine gegebene Funktion ist und die Funktion $A : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$; $x \mapsto A(x)$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) $A \in C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^{n\times n})$.

(ii) Für alle $x \in \Omega$ ist die Matrix $A(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, d.h. $A^T(x) = A(x)$ für alle $x \in \Omega$, wobei $A^T(x)$ die zu $A(x)$ transponierte Matrix bezeichnet.

(iii) Es existiert eine Konstante $\alpha > 0$ mit

$$\alpha|\xi|^2 \leq \langle A(x)\xi, \xi \rangle \quad \forall\ (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass das Minimierungsproblem

$$(P) \qquad \inf_{W_0^{1,2}(\Omega)} F$$

eine eindeutige Lösung $\bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ besitzt. Leiten Sie außerdem die schwache Form der Euler-Lagrange Gleichung für den Minimierer $\bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ her.
Nehmen Sie schließlich an, dass $\bar{u} \in W^{2,2}(\Omega)$ und $A \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^{n\times n})$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) = g(x) \quad \text{f.ü. in } \Omega.$$

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sei $p > 1$ und sei (u_k) eine Folge in $W^{1,p}(\Omega)$, $u \in L^p(\Omega)$, sodass

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{schwach in } L^p(\Omega) \quad \text{bzw.} \quad u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{schwach } * \text{ in } L^\infty(\Omega)$$

und

$$\sup_k \|\nabla u_k\|_{L^p} < +\infty.$$

Zeigen Sie: $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $u_k \rightharpoonup u$ schwach in $W^{1,p}(\Omega)$ (bzw. $u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $W^{1,\infty}(\Omega)$).

Aufgabe 3 **(8 Punkte)**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt und mit Lipschitz Rand. Sei $p \geq 2$ und sei $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ für ein $u_0 \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^2)$. Zeigen Sie

$$\int_\Omega \det \nabla u \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \det \nabla u_0 \,\mathrm{d}x\,.$$

Hinweis. Zeigen Sie die Behauptung zunächst für $u, u_0 \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ mit $u = u_0$ auf $\partial\Omega$. Argumentieren Sie dann mittels Dichtheit. Beachten Sie, dass $\det\nabla u = \operatorname{div}\xi$, wobei ξ ein geeignetes Vektorfeld ist. Dies gilt es zu finden und dann das Gauss-Green Theorem anzuwenden.