Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Caterina Ida Zeppieri
Dr. Leonard Kreutz 6.12.2018

Übungen zur Vorlesung

Variationsrechnung

WS 18/19, Blatt 8

Abgabe: Donnerstag, 13.12.2018, 12:00, Briefkasten 106

Aufgabe 1 (Homogenisierung) (**12 Punkte**)

Sei $0 < \alpha < \beta$ und sei $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-periodisch und auf der Periodizitätszelle definiert durch

$$a(x) = \begin{cases} \alpha & \text{falls } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ \beta & \text{falls } x \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei $X = \{u \in W^{1,2}((0,1) : u(0) = 0, u(1) = 1\}$. Betrachten Sie für $k \in \mathbb{N}$ auf X das Funktional

$$F_k(u) = \int_0^1 a_k(x)|u'(x)|^2 \mathrm{d}x,$$

wobei $a_k(x) = a(kx)$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ ein (eindeutiger) Minimierer des Funktionals $u_k \in X$ existiert.

(b) Berechnen Sie diesen und

$$m_k = \min_{u \in X} F_k(u) = F_k(u_k).$$

(c) Betrachten Sie auf X das folgende Funktional

$$F(u) = \int_0^1 \overline{a}|u'(x)|^2 \mathrm{d}x,$$

mit $\overline{a} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Zeigen Sie, dass für F ein (eindeutiger) Minimierer $u \in X$ existiert und berechnen Sie

$$m = \min_{u \in X} F(u).$$

Zeigen Sie, dass $F_k(u) \to F(u)$ für alle $u \in X$ aber $m_k \nrightarrow m$.

(d) Betrachten Sie auf X das Funktional

$$F_\infty(u) = \int_0^1 \underline{a}|u'(x)|^2 \mathrm{d}x,$$

mit $\underline{a} = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$. Zeigen Sie, dass für F_∞ ein (eindeutiger) Minimierer $u_\infty \in X$ existiert. Berechnen Sie diesen und

$$m_\infty = \inf_{u \in X} F_\infty(u).$$

Zeigen Sie, dass $m_k \to m_\infty < m$.

Hinweis.

(a) Um Existenz eines Minimierers zu zeigen müssen sie sowohl Kompaktheit von Minimalfolgen als auch Unterhalbstetigkeit des Funktionals F_k zeigen (bezüglich der schwachen $W^{1,2}$-Konvergenz). Beachten Sie, dass k hier ein fixer Parameter ist, also wählen sie Minimalfolgen u_n.

(b) Es genügt das Minimum Problem für $k = 1$ zu lösen. Betrachten Sie das Problem in Abhängigkeit von $u(\frac{1}{2})$ und minimieren Sie nun über $u(\frac{1}{2})$ um m_1 zu berechnen. Setzen Sie nun u_1 auf $\mathbb{R}$ stetig fort, sodass u_1' 1-periodisch ist, also $u_1(x + \xi) = u_1(x) + \xi$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathbb{Z}$. Es gilt zu zeigen, dass $u_k(x) = \frac{1}{k}u_1(kx)$ der Minimierer von F_k in X ist.

Aufgabe 2 (**8 Punkte**)

Betrachten Sie das Funktional

$$F(u) := \int_0^1 \left(\Big((u')^2 - 1 \Big)^2 + |u(x)| \right) \mathrm{d}x$$

und das Minimierungsproblem

$$(P) \quad \inf\{F(u) : \; u \in X\} =: m,$$

wobei

$$X := \{u \in W^{1,4}([0,1]) : \; u(0) = u(1) = 0\}.$$

Zeigen Sie: $m = 0$. Besitzt F einen Minimierer in X? Begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 3 (Nikolausaufgabe) (**5 Punkte**)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sei (u_k) eine Folge in $L^p(\Omega)$ mit $u_k \rightharpoonup u$ schwach in $L^p(\Omega)$ für ein $u \in L^p(\Omega)$ und sei (v_k) eine Folge in $L^\infty(\Omega)$ mit $v_k \to v$ stark in $L^\infty(\Omega)$ für ein $v \in L^\infty(\Omega)$. Zeigen Sie

$$u_k v_k \rightharpoonup uv \quad \text{schwach in } L^p(\Omega).$$