Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Caterina Ida Zeppieri
Dr. Leonard Kreutz 29.11.2018

Übungen zur Vorlesung

Variationsrechnung

WS 18/19, Blatt 7

Abgabe: Donnerstag, 6.12.2018, 12:00, Briefkasten 106

Definition 0.1 (Gleichgradige Integrierbarkeit)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und offen. $\{f_n\}_n \subset L^p(\Omega)$ heißt gleichgradig p-integrierbar, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$\int_A |f_n(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $A \subset \Omega$ sodass $\mathcal{L}^d(A) < \delta$.

Satz 0.2 (Egorov)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ messbar mit $\mathcal{L}^d(\Omega) < +\infty$ und sei $\{f_n\}_n$ eine Folge von messbaren Funktionen die gegen f fast überall konvergiert. Dann existiert für alle $\delta > 0$ eine messbare Menge $A_\delta \subset \Omega$, sodass $\mathcal{L}^d(A_\delta) < \delta$ und f_n konvergiert gleichmäßig gegen f auf $\Omega \setminus A_\delta$.*

Aufgabe 1 (Satz von Vitali) (**10 Punkte**)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ messbar mit $\mathcal{L}^d(\Omega) < +\infty$ und sei $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$ eine Folge von Funktionen die sowohl fast überall gegen f konvergiert als auch gleichgradig p-integrierbar ist. Dann gilt $f_n \to f$ stark in $L^p(\Omega)$.

(a) Beweisen Sie den Satz von Vitali.

(b) Gilt der Satz noch falls $\mathcal{L}^d(\Omega) = +\infty$? Begründen Sie (durch Gegenbeispiel oder Beweis) Ihre Aussage.

(c) Geben Sie (im Falle von $\mathcal{L}^d(\Omega) < +\infty$) ein Beispiel an bei dem f_n fast überall gegen f konvergiert aber $f_n \not\to f$ in $L^p(\Omega)$.

(d) Geben Sie ein Beispiel an bei dem $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(\Omega)$, f_n gleichgradig p-integrierbar, aber $f_n \not\to f$ in $L^p(\Omega)$.

(e) Zeigen Sie, dass $(f_1, \ldots, f_n) \subset \mathcal{L}^p(\Omega)$ gleichgradig p-integrierbar ist.

Satz 0.3. *(Lemma von Fatou). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $g_k : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge von messbaren Funktionen mit $g_k(x) \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und für fast alle $x \in \Omega$. Dann gilt*

$$\liminf_{k\to+\infty} \int_\Omega g_k(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_\Omega \liminf_{k\to+\infty} g_k(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe 2 (Unterhalbstetigkeit von Funktionalen in $L^1(\Omega)$) (**10 Punkte**)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Betrachten Sie das Funktional $F : L^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(u) := \int_\Omega f(u(x))\,\mathrm{d}x\,.$$

(a) Sei f unterhalbstetig und $f(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass F unterhalbstetig bezüglich der starken Konvergenz in $L^1(\Omega)$ ist.

(b) Sei f unterhalbstetig, sei $c \in \mathbb{R}$ und es gelte $f(t) \geq -|t| + c$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass F unterhalbstetig bezüglich der starken Konvergenz in $L^1(\Omega)$ ist.

(c) Nehmen Sie nun an, dass F unterhalbstetig bezüglich der starken Konvergenz in $L^1(\Omega)$ ist. Zeigen Sie, dass f notwendigerweise unterhalbstetig ist.

(d) Nehmen Sie nun an, dass F unterhalbstetig bezüglich der schwachen Konvergenz in $L^1(\Omega)$ ist. Zeigen Sie, dass f notwendigerweise konvex und unterhalbstetig ist.

(e) Nehmen Sie nun an, dass $f \geq 0$ eine konvexe und unterhalbstetige Funktion ist. Zeigen Sie nun, dass $F : L^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ unterhalbstetig bezüglich der schwachen Konvergenz in $L^1(\Omega)$ ist.

Hinweis. Um Aufgabenteil (e) zu lösen, können Sie ohne Beweis den folgenden Satz nutzen.

Satz 0.4 (Approximation von konvexen und unterhalbstetigen Funktionen)**.** *Sei $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ eine konvexe und unterhalbstetige Funktion. Dann existiert eine Folge von konvexen und Lipschitz-stetigen Funktionen $\{f_n\}_n$, sodass $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f$ und $f_n \to f$ punktweise.*