Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Caterina Ida Zeppieri
Dr. Leonard Kreutz 22.11.2018

Übungen zur Vorlesung

Variationsrechnung

WS 18/19, Blatt 6

Abgabe: Donnerstag, 29.11.2018, 12:00, Briefkasten 106

Aufgabe 1 (Starke und schwache Konvergenz) (**5 Punkte**)

Sei $p \in (1,\infty)$. Betrachten Sie die Funktionenfolge $f_k : (0,1) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_k(x) := k^{\frac{1}{p}} e^{-kx}.$$

Zeigen Sie, dass f_k für $k \to +\infty$ schwach in $L^p(0,1)$ gegen Null konvergiert, aber nicht stark.

Aufgabe 2 (Punktweise und starke Konvergenz) (**5 Punkte**)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in (1,\infty)$ und (u_k) eine Folge in $L^p(\Omega)$, $u \in L^p(\Omega)$ mit $u_k \to u$ fast überall in Ω und $\|u_k\|_{L^p} \to \|u\|_{L^p}$. Zeigen Sie

$$\|u_k - u\|_{L^p} \to 0 \quad \text{für } k \to +\infty,$$

d.h., u_k konvergiert gegen u stark in $L^p(\Omega)$. *Hinweis.* Betrachten Sie für $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $v_k := 2^{p-1}(|u|^p + |u_k|^p) - |u - u_k|^p$ und nutzen Sie Fatous Lemma.

Aufgabe 3 (Kettenregel) (**5 Punkte**)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in W^{1,1}(\Omega)$ und $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie: $f \circ u \in W^{1,1}(\Omega)$ und

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ u) = (f' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{für alle } 1 \le i \le n.$$

Finden Sie außerdem Funktionen $u \in W^{1,1}(\Omega)$ und $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f \circ u \notin W^{1,1}(\Omega)$.

Aufgabe 4 (Produktregel) (**5 Punkte**)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in [1,\infty]$ und seien $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Zeigen Sie: $uv \in W^{1,p}(\Omega)$ und

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = u\frac{\partial v}{\partial x_i} + v\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{für alle } 1 \le i \le n.$$

Geben Sie ein Beispiel für Funktionen $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ an, sodass $uv \notin W^{1,p}(\Omega)$.

Bemerkung 1. Im Fall $n = 1$ ist die Forderung $u, v \in L^\infty(\Omega)$ natürlich nicht notwendig, da $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ für alle $p \in [1, +\infty]$.