Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Caterina Ida Zeppieri
Dr. Leonard Kreutz 15.11.2018

Übungen zur Vorlesung

Variationsrechnung

WS 18/19, Blatt 5

Abgabe: Donnerstag, 22.11.2018, 12:00, Briefkasten 106

Aufgabe 1 (Die Cantor Funktion) (**10 Punkte**)

Teilen sie $[0,1]$ in drei gleiche Teilintervalle und entfernen sie das mittlere Intervall $I_{1,1} := (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Teilen sie jedes der noch übrigen abgeschlossenen Intervalle $[0, \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$ in drei gleiche Teilintervalle und entfernen sie die mittleren Intervalle $I_{1,2} := (\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2})$ und $I_{2,2} := (\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2})$. Führen sie induktiv fort. Im n-ten Schritt entfernen sie 2^{n-1} offene mittlere Intervalle $I_{1,n}, \ldots, I_{2^{n-1},n}$ der Länge $\frac{1}{3^n}$. Die Cantor Menge $\mathcal{C}$ ist durch

$$\mathcal{C} := [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{k,n}$$

gegeben.

(a) Zeigen sie, dass $\mathcal{C}$ abgeschlossen ist und

$$\mathcal{L}^1(\mathcal{C}) = 0$$

gilt. $\mathcal{L}^1$ bezeichnet hier das 1-dimensionale Lebesgue-Maß.

(b) Betrachten sie den Raum $X = \{u \in C^0([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 1\}$ mit Distanz

$$\mathrm{d}(u,v) = ||u - v||_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |u(x) - v(x)|$$

und darauf den Operator $T : X \to X$ gegeben durch

$$T(u)(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}u(3x) & 0 \leq x < \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + u(3x-2) & \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Zeigen sie, dass dieser Operator einen eindeutigen Fixpunkt hat. Dieser wird als Cantor Funktion bezeichnet (siehe Abbildung 1). Beachten sie den Hinweis auf der nächsten Seite.

(c) Zeigen sie, dass für die Cantor Funktion

$$u'(x) = 0 \text{ für alle } x \in [0,1] \setminus \mathcal{C}$$

gilt. Gilt für die Cantor Funktion der Fundamentalsatz der Integral und Differentialrechnung? Dies bedeutet

$$\int_a^b u'(x)\mathrm{d}x = u(a) - u(b) \text{ für alle } 0 \leq a \leq b \leq 1.$$

(d) Definieren sie rekursiv die Folge der Funktionen $\{u_n\}_n$ durch

$$\begin{cases} u_0(x) := x, \\ u_n(x) := T(u_{n-1})(x). \end{cases}$$

Sei $\alpha := \frac{\log 2}{\log 3}$. Zeigen sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in [0,1]$

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq |x - y|^\alpha$$

gilt. Zeigen sie hiermit, dass die Cantor Funktion Hölder stetig mit Exponenten α ist.

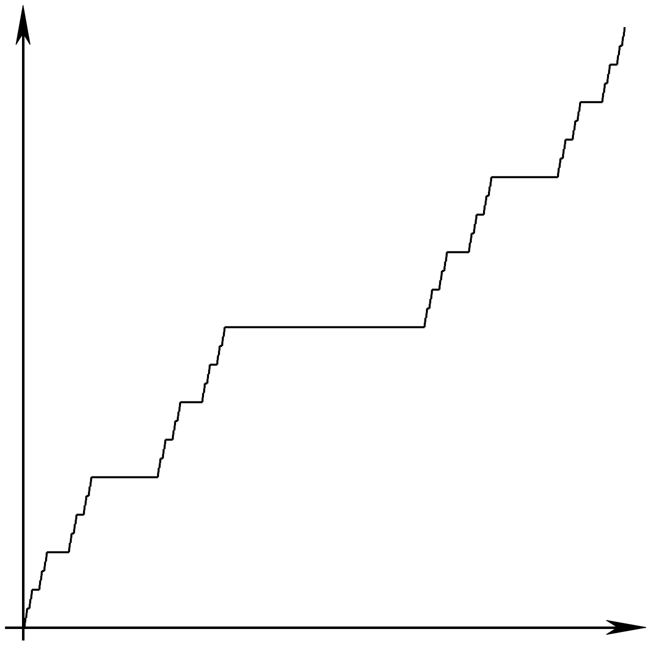

Abbildung 1: Die Cantor Funktion

(e) Zeigen sie, dass der Exponent α in Teilaufgabe (c) optimal ist. Dies bedeutet, dass

$$\sup_{\substack{x,y\in[0,1]\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\beta}} = +\infty$$

für alle $\beta > \alpha$.

Hinweis. Für den Beweis von (b) ist folgender Satz hilfreich:

Satz 0.1 (Fixpunktsatz von Banach)**.** *Sei* (Y, d) *ein vollständiger metrischer Raum und sei* $X \subset Y$ *eine nichtleere abgeschlossene Menge. Sei* $T : X \to X$ *eine Kontraktion mit Kontraktionszahl* $k \in [0, 1)$. *Dies bedeutet,*

$$\mathrm{d}(T(x), T(y)) \leq k\mathrm{d}(x, y) \text{ für alle } x, y \in X.$$

Dann besitzt die Abbildung $T : X \to X$ *einen eindeutigen Fixpunkt* $x_0 \in X$, *das heißt* $T(x_0) = x_0$. *Außerdem gilt für jede Folge* x_{n+1} *iterativ definiert durch* $x_{n+1} = T(x_n)$, *dass*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}(x_n, x_0) = 0.$$

Aufgabe 2 (Absolut stetige Funktionen) (**10 Punkte**)
Sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Wir sagen, dass eine Funktion u absolut stetig auf I ist und schreiben $u \in AC(a, b)$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für jede endliche Familie von paarweise disjunkten Intervallen $(a_1, b_1), \cdots (a_l, b_l)$ mit $[a_k, b_k] \subset I$ für alle $1 \leq k \leq l$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{l}(b_k - a_k) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{l}|u(b_k) - u(a_k)| < \varepsilon.$$

(a) Sei $f \in L^1(a,b)$ und $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Zeigen Sie, dass $F \in AC(a,b)$.

(b) Folgern Sie aus (b), dass für alle $u \in W^{1,1}(a,b)$ eine Funktion $\bar{u} \in AC([a,b])$ existiert mit $\bar{u} = u$ fast überall.

Weiter bezeichnen wir mit $\mathrm{Lip}(a,b)$ die Menge aller Lipschitz stetigen Funktionen auf (a,b) und mit $UC(a,b)$ die Menge aller gleichmäßig stetigen Funktionen auf (a,b).

(c) Zeigen Sie $\mathrm{Lip}(a,b) \subsetneq AC(a,b) \subsetneq UC(a,b)$.

Bemerkung 1. Man kann zeigen, dass in (c) auch die umgekehrte Richtung gilt, das heißt, man erhält die folgende Charakterisierung von $W^{1,1}(a,b)$:

$$u \in W^{1,1}(a,b) \Leftrightarrow u \in AC([a,b]),$$

wobei $u \in AC([a,b])$ in dem Sinne zu verstehen ist, dass wir einen Repräsentanten $\bar{u} \in AC([a,b])$ aus der Äquivalenzklasse von u wählen können.