Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Caterina Ida Zeppieri
Dr. Leonard Kreutz 08.11.2018

Übungen zur Vorlesung

# Variationsrechnung

WS 18/19, Blatt 4

**Abgabe:** Donnerstag, 15.11.2018, 12:00, Briefkasten 106

**Aufgabe 1** (Natürliche Randbedingungen) (**6 Punkte**)

Betrachten Sie die Funktionale

$$F_1(u) := \int_{-1}^{1} \Big((u')^2 - 2xu\Big)\,\mathrm{d}x$$

und

$$F_2(u) := \int_{0}^{1} \Big(2e^x u + (u')^2\Big)\,\mathrm{d}x\,.$$

(a) Lösen Sie die Euler-Lagrange Gleichung für $F_1$ in

$$X_1 := \{u \in C^1([-1,1]) :\ u(-1) = -1,\ u(1) = 1\}$$

und lösen Sie die Euler-Lagrange Gleichung mit natürlichen Randbedingungen für $F_1$ in

$$\tilde{X}_1 := \{u \in C^1([-1,1]) :\ u(-1) = -1\}.$$

Sind die Lösungen Minimierer von $F_1$ in $X_1$ bzw. $\tilde{X}_1$?

(b) Lösen Sie die Euler-Lagrange Gleichung für $F_2$ in

$$X_2 := \{u \in C^1([0,1]) :\ u(0) = 0,\ u(1) = 1\}$$

und lösen Sie die Euler-Lagrange Gleichung mit natürlichen Randbedingungen für $F_2$ in

$$\tilde{X}_2 := \{u \in C^1([0,1]) :\ u(0) = 0\}.$$

Sind die Lösungen Minimierer von $F_2$ in $X_2$ bzw. $\tilde{X}_2$?

**Aufgabe 2** (Konvexe und unterhalbstetige Funktionen) (**6 Punkte**)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Dann bezeichnen wir die Menge

$$\mathrm{epi}(f) := \{(x,\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} :\ f(x) \le \mu\}$$

als Epigraphen von $f$. Weiter definieren wir für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Subniveaumenge $N_\alpha(f) \subset \mathbb{R}^n$ durch

$$N_\alpha(f) := \{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) \le \alpha\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) $f$ ist unterhalbstetig,

ii) $\mathrm{epi}(f)$ ist abgeschlossen,

iii) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $N_\alpha(f) \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen.

(b) Zeigen Sie weiterhin, dass die folgende Äquivalenz gilt:

i) $f$ ist konvex,

ii) $\operatorname{epi}(f)$ ist konvex.

**Aufgabe 3** (Legendre-Transformierte) **(8 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f$ nicht identisch $+\infty$. Die Legendre-Transformierte oder Duale $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ von $f$ ist definiert durch

$$f^*(x^*) := \sup\{\langle x^*, x\rangle - f(x) : \ x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Hierbei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Analog ist die Biduale $f^{**} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ von $f$ definiert durch

$$f^{**}(x) := \sup\{\langle x, x^*\rangle - f^*(x^*) : \ x^* \in \mathbb{R}^n\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $f^*$ unterhalbstetig und konvex ist.

(b) Zeigen Sie: Ist $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine Funktion mit $g \leq f$, so gilt $f^* \leq g^*$.

(c) Sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Dann definieren wir die unterhalbstetige Hülle (lower semicontinuous envelope) von $f$ als

$$\bar{f}(x) := \sup\{g(x) : \ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ ist unterhalbstetig, } g \leq f\}.$$

Analog definieren wir die konvexe Hülle (convex envelope) von $f$ als

$$f^c(x) := \sup\{g(x) : \ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ ist konvex, } g \leq f\}.$$

Begründen Sie, dass $\bar{f}$ unterhalbstetig ist und $f^c$ konvex.

(d) Zeigen Sie: $f^{**} \leq f^c \leq f$. Zeigen Sie weiter, dass immer gilt: $f^{***} = f^*$.

(e) Verwenden Sie (ohne Beweis), dass $f = f^{**}$, falls $f$ konvex und unterhalbstetig ist. Folgern Sie hieraus, dass im Allgemeinen gilt: $f^{**} = \overline{f^c}$, wobei $\overline{f^c}$ die unterhalbstetige Hülle von $f^c$ ist.

(f) Sei $1 < p < \infty$ und $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ gegeben durch

$$f(x) := \frac{1}{p}|x|^p.$$

Berechnen Sie die Legendre-Transformierte $f^*$.

*Bemerkung* 1. Per Konstruktion ist $\bar{f}$ die größte unterhalbstetige Funktion, die nach oben durch $f$ beschränkt ist und $f^c$ die größte konvexe Funktion, die nach oben durch $f$ beschränkt ist.