Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Caterina Ida Zeppieri
Dr. Leonard Kreutz 25.10.2018

Übungen zur Vorlesung

Variationsrechnung

WS 18/19, Blatt 3

Abgabe: Donnerstag, 8.11.2018, 12:00, Briefkasten 106

Aufgabe 1 (Das Problem der Brachistochrone) (**12 Punkte**)
Sei $X = \{u \in C^1([0,b]) : u(0) = 0, u(b) = \beta \text{ und } u(x) > 0 \text{ für alle } x \in (0,b]\}$. Betrachten sie auf X das Funktional

$$F(u) = \int_0^b \frac{\sqrt{1+(u')^2}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}x.$$

(a) Berechnen Sie die Euler-Lagrange Gleichung und die Gleichung von DuBois-Reymond für F auf X.

(b) Lösen sie die Gleichung von DuBois-Reymond. Schreiben Sie die Lösung sowohl in parametrischer Form als auch in expliziter Form.

(c) Löst die so erhaltene Funktion die Euler-Lagrange Gleichung?

(d) Können Sie anhand der Ihnen bekannten Theorie folgern, dass die Lösung von (b) ein Minimierer von F auf X ist? Begründen Sie ihre Antwort.

(e) Lösen Funktionen, die zu einem gegebenen Funktional F die Gleichung von DuBois-Reymond, immer die Euler-Lagrange Gleichung? Falls ja geben Sie eine Begründung an, falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel eines Raumes X, eines Funktionals F auf X und eine Lösung der Gleichung von DuBois-Reymond an, die keine Lösung der Euler-Lagrange Gleichung ist.

Hinweis.

(b) Die Gleichung von DuBois-Reymond ist eine gewöhnliche Differentialgleichung. Sie können diese (in diesem Fall) mithilfe der *Trennung der Veränderlichen* lösen. Sie sollten dann eine Gleichung der Form

$$x = \int f(y)\mathrm{d}y + C$$

erhalten. Dieses Integral lässt sich mittels der Substitution $y = a\sin^2(t)$ auswerten. Anhand der parametrischen Form erkennen Sie, dass die Lösung eine Zykloide beschreibt. Eine Zykloide wird im Allgemeinen durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$x(t) = r(t - c\sin(t)), \quad y(t) = r(1 - c\cos(t)).$$

(e) Um diese Frage beantworten zu können ist es hilfreich den Beweis der Herleitung der Gleichung von DuBois-Reymond zu lesen.

Aufgabe 2 (Natürliche Randbedingungen) (**8 Punkte**)
Beweisen Sie das folgende Analogon zu Satz 2.1 der Vorlesung:
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sei $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $f = f(x,u,\xi)$ und sei

$$(\tilde{P}) \quad \inf_{u \in \tilde{X}} \left\{ F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x \right\} =: \tilde{m},$$

wobei

$$\tilde{X} = \{u \in C^1([a,b]) : \ u(a) = \alpha\}.$$

i) Falls $(\tilde{P})$ einen Minimierer $\bar{u} \in C^2([a,b]) \cap \tilde{X}$ annimmt, so gilt notwendigerweise

$$(\tilde{E}) \begin{cases} \frac{d}{dx}[f_\xi(x, \bar{u}, \bar{u}') & = f_u(x, \bar{u}, \bar{u}') \text{ in } (a,b) \\ f_\xi(b, \bar{u}(b), \bar{u}'(b)) & = 0. \end{cases}$$

ii) Falls umgekehrt $\bar{u} \in C^2([a,b]) \cap \tilde{X}$ die Gleichung $(\tilde{E})$ erfüllt, und die Abbildung $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ für alle $x \in [a,b]$ konvex ist, so ist $\bar{u}$ ein Minimierer von F in $\tilde{X}$.

iii) Ist schließlich die Abbildung $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ für alle $x \in [a,b]$ strikt konvex, so ist der Minimierer für $(\tilde{P})$, falls er existiert, eindeutig.

Die Gleichung $(\tilde{E})$ wird auch Euler-Lagrange Gleichung mit natürlichen Randbedingungen genannt.