Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Caterina Ida Zeppieri
Dr. Leonard Kreutz 18.10.2018

Übungen zur Vorlesung

Variationsrechnung

WS 18/19, Blatt 2

Abgabe: Donnerstag, 25.10.2018, 12:00, Briefkasten 106

Aufgabe 1 (**8 Punkte**)

Sei $p \geq 1$, $g \in C^0(\mathbb{R})$, mit $g(u) \geq g_0 > 0$. Sei $X = \{u \in C^1([a,b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$. Betrachten sie auf X das Funktional

$$F(u) = \int_a^b g(u(x))|u'(x)|^p \mathrm{d}x.$$

(a) Sei $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$G(u) = \int_0^u [g(s)]^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}s$$

gegeben. Zeigen sie, dass

$$u(x) = G^{-1}\left(\frac{G(\beta) - G(\alpha)}{b-a}(x-a) + G(\alpha)\right)$$

ein Minimierer von F in X ist.

(b) Für welche $p \geq 1$ ist dieser Minimierer eindeutig?

Hinweis: Für $u \in X$ gilt

$$[G(u(x))]' = g(u(x))^{\frac{1}{p}} u'(x).$$

Erinnern sie sich an Jensen's Ungleichung.

Aufgabe 2 (Euler-Lagrange Gleichung) (**6 Punkte**)

(a) Sei $X = \{u \in C^1([0,1]) : \ u(0) = u(1) = 1\}$. Betrachten Sie auf X das Funktional

$$F(u) = \int_0^1 \left((u')^2 + 2u\right) \mathrm{d}x$$

und lösen Sie die Euler-Lagrange Gleichung für F in X. Ist die Lösung ein Minimierer von F in X?

(b) Sei nun $X = \{u \in C^1([0,2]) : \ u(0) = u(2) = 1\}$ und

$$F(u) = \int_0^2 \left((u')^2 + 2uu' + u^2\right) \mathrm{d}x\,.$$

Lösen Sie die Euler-Lagrange Gleichung für F in X. Ist die Lösung ein Minimierer von F in X?

Aufgabe 3 (**6 Punkte**)

Betrachten Sie das Funktional

$$F(u) = \int_{-1}^1 u^2(1-u')^2 \, \mathrm{d}x,$$

und die Minimierungsprobleme

$$\begin{array}{lll} (P) & \inf\{F(u) : u \in X\} & =: m, \\ (P') & \inf\{F(u) : u \in X'\} & =: m', \end{array}$$

wobei

$$X = \{u \in C^1([-1,1]) : \ u(-1) = 0, \ u(1) = 1\}$$

und

$$X' = \{u \in C^1_{piec}([-1,1]) : \ u(-1) = 0, \ u(1) = 1\}.$$

(a) Lösen Sie das Problem (P') und zeigen Sie, dass $m' = 0$, d.h., finden Sie $\bar{u} \in X'$ mit $F(\bar{u}) = m' = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass ebenso gilt $m = 0$. Regularisieren Sie dazu die Funktion $\bar{u}$ aus (a) in geeigneter Weise, um eine Folge $(u_n) \subset X$ zu konstruieren mit $F(u_n) \to 0$ für $n \to +\infty$. Folgern Sie dann, dass F keinen Minimierer in X besitzt.