Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Caterina Ida Zeppieri
Dr. Leonard Kreutz 10.01.2019

Übungen zur Vorlesung

Variationsrechnung

WS 18/19, Blatt 11

Abgabe: Donnerstag, 17.01.2019, 12:00, Briefkasten 106

Aufgabe 1 (Interpolationsungleichung) (**5 Punkte**)

Sei $1 \leq p \leq \infty$. Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C = C(\varepsilon) > 0$ existiert mit

$$\|u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \varepsilon \|u''\|_{L^p(\mathbb{R})} + C\|u\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad \forall\, u \in W^{2,p}(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 2 (Hardy's Ungleichung) (**5 Punkte**)

Sei $u \in W_0^{1,2}(0,1)$. Zeigen Sie, dass $\frac{u(x)}{x} \in L^2(0,1)$ und

$$\left(\int_0^1 \left|\frac{u(x)}{x}\right|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \leq 2\|u'\|_{L^2(0,1)}.$$

Aufgabe 3 (**5 Punkte**)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit Lipschitz Rand und sei $W : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ gegeben durch

$$W(z) := \left(z^2 - 1\right)^2.$$

Sei weiter $g \in L^2(\Omega)$ und sei $F : W^{1,4}(\Omega) \to [0, +\infty)$ definiert durch

$$F(u) := \int_\Omega \left(|\nabla u|^4 + W(u) - gu^2\right) \mathrm{d}x\,.$$

Zeigen Sie, dass das Problem

$$(P) \quad \inf\{F(u) : \; u \in W^{1,4}(\Omega)\}$$

eine Lösung $\bar{u} \in W^{1,4}(\Omega)$ besitzt.

Aufgabe 4 (Direkte Methode der Variationsrechnung) (**5 Punkte**)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, zusammenhängend und mit Lipschitz Rand. Sei $f \in C^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $f = f(x, u, \xi)$ mit

(i) $\xi \mapsto f(x, u, \xi)$ ist konvex für alle $(x, u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n$.

(ii) Es existieren $p > q \geq 1$ und Konstanten $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x, u, \xi) \geq \alpha_1|\xi|^p + \alpha_2|u|^q + \alpha_3 \quad \forall (x, u, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Sei weiter $\alpha \in \mathbb{R}$ und $X := \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u \,\mathrm{d}x = \alpha\}$. Zeigen Sie mittels der direkten Methode der Variationsrechnung, dass das Problem

$$(P) \quad \inf\left\{F(u) = \int_\Omega f(x, u, \nabla u) \,\mathrm{d}x : u \in X\right\}$$

eine Lösung $\bar{u} \in X$ besitzt.