Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Caterina Ida Zeppieri
Dr. Leonard Kreutz 20.12.2018

Übungen zur Vorlesung

Variationsrechnung

WS 18/19, Blatt 10

Abgabe: Donnerstag, 10.01.2019, 12:00, Briefkasten 106

Aufgabe 1 (Spiegelung von $W^{1,p}$-Funktionen) (**2 Punkte**)

Sei $a > 0$ und $u \in W^{1,p}(0, a)$. Definiere $\hat{u} : (-a, a) \to \mathbb{R}$ durch

$$\hat{u}(x) := \begin{cases} u(-x) & \text{falls } -a < x \leq 0 \\ u(x) & \text{falls } 0 < x < a. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\hat{u} \in W^{1,p}(-a, a)$ und geben Sie die Formel für $\hat{u}'$ an.

Aufgabe 2 (Poincaré-Ungleichung) (**6 Punkte**)

Sei $1 \leq p \leq \infty$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, zusammenhängend und mit Lipschitz Rand. Zeigen Sie, dass eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega),$$

wobei $(u)_\Omega := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u \,\mathrm{d}x$.

Hinweis. Nutzen Sie das folgende Kompaktheitsresultat von Rellich-Kondrachov: Ist $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit Lipschitz Rand, und ist (u_k) eine Folge in $W^{1,p}(\Omega)$ mit $\|u_k\|_{W^{1,p}} \leq C$ für ein $C > 0$ und für alle $k \in \mathbb{N}$, so existieren ein $u \in L^p(\Omega)$ und eine Teilfolge (u_{k_j}) mit $u_{k_j} \to u$ stark in $L^p(\Omega)$.

Aufgabe 3 (**12 Punkte**)

Sei $1 < p < \frac{4}{3}$ und $X := \{u \in W^{1,p}(0, 1) : \ u(0) = 0,\ u(1) = 1\}$. Zeigen Sie, dass das Problem

$$(P) \quad \inf \left\{ F(u) = \int_0^1 \sqrt{x} (u')^2 \,\mathrm{d}x : \ u \in X \right\}$$

eine Lösung $\bar{u} \in X$ besitzt. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie, dass F unterhalbstetig bezüglich der schwachen Konvergenz in $W^{1,p}(0, 1)$ ist.

(b) Wählen Sie eine minimierende Folge (u_n) für (P) (warum ist dies möglich?) und zeigen Sie, dass eine Teilfolge (u_{n_k}) und ein $u \in W^{1,p}(0, 1)$ existieren, sodass $u_{n_k} \rightharpoonup u$ schwach in $W^{1,p}(0, 1)$.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion u aus (b) die Randbedingungen erfüllt und folgern Sie dann, dass (P) eine Lösung besitzt.