Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Caterina Ida Zeppieri
Dr. Leonard Kreutz 11.10.2018

Übungen zur Vorlesung

Variationsrechnung

WS 18/19, Blatt 1

Abgabe: Donnerstag, 18.10.2018, 12:00, Briefkasten 106

Definition 0.1. (liminf und limsup) Sei $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ and sei (x_n) eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\lambda_n := \inf_{m \geq n} x_m \quad \text{and} \quad \Lambda_n := \sup_{m \geq n} x_m.$$

Dann gilt $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$ und $\Lambda_n \geq \Lambda_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Tatsächlich gilt

$$\lambda_n = \inf\{x_n, \lambda_{n+1}\} \leq \lambda_{n+1}, \quad \Lambda_n = \sup\{x_n, \Lambda_{n+1}\} \geq \Lambda_{n+1}.$$

Folglich existieren die beiden Grenzwerte

$$\lambda := \lim_n \lambda_n = \sup_n \lambda_n \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{and} \quad \Lambda := \lim_n \Lambda_n = \inf_n \Lambda_n \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Der Limes inferior bzw. superior der Folge (x_n) ist dann definiert als

$$\liminf_n x_n := \lambda \quad \text{bzw.} \quad \limsup_n x_n := \Lambda.$$

Bemerkung 1. Es gilt natürlich immer

$$\liminf_n x_n \leq \limsup_n x_n.$$

Außerdem kann man leicht nachprüfen, dass

$$\liminf_n (-x_n) = -\limsup_n (x_n).$$

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Sei (x_n) eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ und sei $H \subset \overline{\mathbb{R}}$ die Menge aller Häufungspunkte der Folge (x_n).

(a) Zeigen Sie, dass
$$\lambda = \min H \quad \text{und} \quad \Lambda = \max H.$$

(b) Sei nun $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\lim_n x_n = x$ genau dann, wenn $\lambda = \Lambda = x$.

Bemerkung 2. Ist (x_{n_k}) eine Teilfolge von (x_n), so erhalten wir mit (a) direkt, dass

$$\liminf_n x_n \leq \liminf_k x_{n_k} \leq \limsup_k x_{n_k} \leq \limsup_n x_n.$$

Aufgabe 2 **(3 Punkte)**

Seien (x_n), (y_n) Folgen in $\overline{\mathbb{R}}$, sodass $x_n + y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert ist. Wir nehmen ferner an, dass $\liminf_n x_n + \liminf_n y_n$ und $\liminf_n x_n + \limsup_n y_n$ definiert sind. Zeigen Sie, dass dann gilt

(a) $\liminf_n (x_n + y_n) \geq \liminf_n x_n + \liminf_n y_n$,

(b) $\liminf_n (x_n + y_n) \leq \liminf_n x_n + \limsup_n y_n$,

(c) $\liminf_n (x_n + y_n) = \liminf_n x_n + \lim_n y_n$, falls $\lim_n y_n$ existiert.

Definition 0.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann heißt F unterhalbstetig (bzgl. d=, falls für alle $u \in X$ und für jede Folge $(u_n) \subset X$ mit $u_n \xrightarrow{d} u$ (d.h., $d(u_n, u) \to 0$) gilt

$$F(u) \leq \liminf_n F(u_n).$$

F heißt oberhalbstetig (bzgl. d), falls $-F$ unterhalbstetig (bzgl. d) ist.

Aufgabe 3 **(5 Punkte)**
Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Zeigen Sie: $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist stetig bzgl. d genau dann, wenn F unterhalbstetig und oberhalbstetig bzgl. d ist.

(b) Seien nun $F, G : X \to \overline{\mathbb{R}}$ unterhalbstetig und sei $F(u) + G(u)$ für alle $u \in X$ definiert. Zeigen Sie, dass $F + G$ unterhalbstetig ist.

(c) Sei I eine Indexmenge und sei $F_\alpha : X \to \overline{\mathbb{R}}$ für alle $\alpha \in I$ unterhalbstetig. Definiere $F, G : X \to \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$F(u) = \sup_{\alpha \in I} F_\alpha(u), \quad G(u) = \inf_{\alpha \in I} F_\alpha(u).$$

(c.1) Zeigen sie, dass F unterhalbstetig ist.

(c.2) Ist es wahr, dass F stetig ist, wenn alle F_α, $\alpha \in I$ stetig sind? (Geben sie ggf. einen Beweis der Aussage oder ein Gegenbeispiel an)

(c.3) Ist es wahr, dass G unterhalbstetig ist, wenn alle F_α, $\alpha \in I$ unterhalbstetig sind? (Geben sie ggf. einen Beweis der Aussage oder ein Gegenbeispiel an)

Aufgabe 4 (Fundamentallemma der Variationsrechnung) **(8 Punkte)**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega u\varphi \,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Zeigen Sie: $u = 0$ fast überall in Ω. (Bitte Proposition auf der nächsten Seite beachten)

Hinweis. Zeigen Sie zunächst, das für alle $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} g \subset \Omega$ kompakt gilt:

$$\int_\Omega ug \,\mathrm{d}x = 0. \tag{1}$$

Betrachten Sie dazu die Glättung von g und nutzen Sie das unten angegebene Resultat. Wählen Sie dann die Funktion g in (1) in geeigneter Weise, um zu zeigen, dass für alle $K \subset \Omega$ kompakt gilt: $u = 0$ fast überall in K.

Proposition 0.3. *(Glättung von Funktionen) Sei $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\rho \geq 0$, $\operatorname{supp} \rho \subset \overline{B_1(0)}$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \rho \,\mathrm{d}x = 1$. Für $k \in \mathbb{N}$ setze*

$$\rho_k(x) := k^n \rho(kx).$$

Dann definiert ρ_k eine Folge von sogenannten Glättungskernen. Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und

$$\Omega_k := \left\{ x \in \Omega : \ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k} \right\}.$$

Wir definieren nun die Glättung u_k von u als die Faltung von u mit dem Glättunsgern ρ_k, d.h., für alle $x \in \Omega_k$ setzen wir

$$u_k(x) := (\rho_k * u)(x) = \int_\Omega \rho_k(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Dann erfüllt die Folge (u_k) die folgenden Eigenschaften:

i) $u_k \in C^\infty(\Omega_k)$ *mit* $D^\alpha u_k = (D^\alpha \rho_k) * u$ *für alle Multiindices* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, *wobei* $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

ii) $u_k \to u$ *fast überall in* Ω *für* $k \to +\infty$.

iii) Ist $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\operatorname{supp} u \subset \Omega$ *kompakt, so ist* $u_k \in C_0^\infty(\Omega)$ *für* k *hinreichend groß.*