2.5 Interpolationsfehler

Definition 2.38 Interpolation

Für ein allgemeines Finites Element nach Def 2.29 seien k Knotenfunktionale

$$\varphi_i : H^m(E) \to \mathbb{R} \quad \forall i = 1 \ldots k$$

gegeben welche unisolvent sind.

Durch die Anforderung

$$\varphi_i(I_E v) = \varphi_i(v) \quad \forall i = 1 \ldots k, v \in H^m(E)$$

ist die Interpolierende auf E

$$I_E v \in P(E)$$

eindeutig festgelegt.

Aus $I_E \; \forall E \in T_h(\Omega)$ ergibt sich die globale Interp. I_h.

- Konstruktion solcher Interpolationen?
- wir wissen $\|u - u_h\| \leq c \|u - v_h\|$, d.h. auch $\|u - u_h\| \leq c \|u - I_h u\|$

$\Rightarrow$ Ziel: Fehlerabschätzung $\|u - I_h u\| \leq c h^\alpha$ ($\Rightarrow \|u - u_h\| \leq c h^\alpha$)

Wir beschränken uns im Folgenden auf Lagrange Ansätze auf Dreiecken. Die Beweise lassen sich aber auf allgemeine FEM Ansätze übertragen.

Wir verlangen zusätzlich, dass Ψ_i stetig bzgl $H^m(E)$ sind:

$$|\Psi_i(v)| \leq c \|v\|_{H^m(E)} \quad \forall\, i = 1 \dots k,\ v \in H^m(E)$$

Satz 2.39 Poincarésche Ungleichung mit Mittelwert

Sei Ω konvex & Lipschitz, $u \in H^m(\Omega)$ und es gelte

$$\int_\Omega D^\alpha u \, dx = 0 \qquad \forall\, 0 \leq |\alpha| \leq m-1$$

(α: Multiindex), dann $\exists$ Konstante c (abh. von Ω, m), so dass gilt

$$\|u\|_{H^m} \leq c\, |u|_{H^m}$$

ohne Beweis

Anmerkung Insbesondere gilt auch der Spezialfall

$$\|u\|_{L^2} \leq c \|\nabla u\|_{L^2} \qquad (\text{Beweis} \rightarrow \text{Übung})$$

Lemma 2.40

Sei $u \in H^{m+1}(\Omega)$, dann existiert genau ein $p \in P^m(\Omega)$, so dass

$$\int_\Omega D^\alpha (u-p) \, dx = 0 \qquad \forall\, 0 \leq |\alpha| \leq m$$

Beweis

Polynom $p \in P^m(\Omega)$ hat die Form

$$p(x) = \sum_{|\beta|=0}^{m} c_\beta \underbrace{\prod_{i=0}^{d} x_i^{\beta_i}}_{=: x^\beta}$$

d.h. wir müssen zeigen, dass das LGS

$$\sum_{|\beta|=0}^{m} c_\beta \int_\Omega D^\alpha x^\beta \, dx = \int_\Omega D^\alpha u(x) \, dx \quad \forall\, 0 \leq |\alpha| \leq m$$

für die Unbekannten c_β eindeutig lösbar ist.

Das LGS ist quadratisch, d.h. es reicht die Eindeut. des homogenen Systems zu zeigen.

Sei

$$\sum_{|\beta|=0}^{m} c_\beta \int_\Omega D^\alpha x^\beta \, dx = 0 \qquad \forall\, 0 \leq |\alpha| \leq m$$

so folgt

$$\int_\Omega D^\alpha p \, dx = 0 \qquad \forall\, 0 \leq |\alpha| \leq m$$

Das ist nur erfüllt, wenn $p = 0$.

$\square$

Satz 2.41 Bramble-Hilbert-Lemma

Ω konvex & lipschitz, Y Raum mit Seminorm $|\cdot|$

$L: H^m(\Omega) \to Y$, linear, beschränkt mit $|L(v)| \le c_L \|v\|_{H^m}$

und mit $P^{m-1}(\Omega) \subset \ker(L)$, d.h. $L(p) = 0 \;\forall p \in P^{m-1}$

dann gilt mit Konstante $c = c_{\text{Poincaré}}\, c_L \geq 0$

$$|L(v)| \le c\,|v|_{H^m} \qquad \forall\, v \in H^m(\Omega)$$

Es gibt einige leicht unterschiedliche Formulierungen des Lemmas...

Beweis Für $q \in P^{m-1}$ gilt

$$|L(v)| = |L(v-q+q)| \underset{\text{Linearität von } L}{=} |L(v-q) + L(q)|$$

$$\underset{\text{Sublinearität von } |\cdot|}{\le} |L(v-q)| + \underbrace{|L(q)|}_{=0} \underset{\text{Beschränktheit}}{\le} c_L \, \|v-p\|_{H^m}$$

$$\underset{\text{Poincaré}}{\le} \underbrace{c_P\, c_L}_{=:c} |v-p|_{H^m} \underset{\text{nach Hilfssatz}}{=} c\,|v|_{H^m}$$

$\square$

Insbesondere gilt dies auch für Interpolierende $I_E v \in P^{m-1}$!

Satz 2.42 Allgemeiner Interpolationssatz

Es gelten die obigen Voraussetzungen. Wir betrachten ein FE (E, P, Ψ). Für jedes $v \in H^m(E)$ und das dazugehörige interpolierende Polynom $I_E v \in P(E)$ gilt für jede Seminorm $|\cdot|$ auf $H^m(E)$

$$|v - I_E v| \leq c\, |v|_{H^m(E)}$$

(c abh. von $d, m, |\cdot|, E, \dim(P)$)

Beweis: Sei OBdA $|v| \leq c\, \|v\|_{H^m(E)}$, $v \in H^m(E)$,

$$I_E v = \sum_{i=1}^{k} \psi_i(v)\, \varphi_i \qquad , \; k = \dim(P)$$

mit $\Phi = \{\varphi_i\}$ eindeutige Basis von $P(E)$, bestimmt durch Lagrangeeigenschaft

$$\psi_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$$

Wir wählen $L(v) := v - I_E v$, mit B-H-L folgt die Behauptung

$\square$

Damit können wir verschiedenste Interpolationsfehler Abschätzungen herleiten, je nach Seminorm...

Beispiel mögliche Seminormen ...

- L^2-Norm über E
- L^2-Norm über ∂E
- Mittelwert auf Kante $K \subset \partial E$
- Punktwert an $x \in E$
- $\boxed{\text{Sobolev-Halbnormen}}$ auf E nutzen wir jetzt

Satz 2.43 Interpolationsfehlerabschätzung

$\forall v \in H^m(E)$ und Lagrange-Interpolierende $I_E v \in P(E)$, $E \in \mathcal{T}_h(\Omega)$ gilt für $0 \leq k \leq m$

$$|v - I_E v|_{H^k(E)} \leq c \frac{h_E^m}{\rho_E^k} |v|_{H^m(E)} = c\, \sigma_E^k h_E^{m-k} |v|_{H^m(E)}$$

mit Durchmesser h_E & Innenradius ρ_E, $\sigma_E = \frac{h_E}{\rho_E}$

Damit folgt eine globale Abschätzung

$$\|v - I_h v\|_{H^\ell} \leq c\, \sigma\, h^{m-\ell} |v|_{H^m}$$

mit Gitterweite $h := \max_E h_E$

& Gitterqualität $\sigma := \max_E \sigma_E$

Für "gute" Gitter können wir garantieren, dass σ unabh. von h von oben beschränkt ist, dann erhalten wir $\|v - I_h v\|_{H^\ell} \leq c\, h^{m-\ell} |v|_{H^m}$

<u>Beweis</u> i) für jedes Element $E \in \mathcal{T}_h(\Omega)$ gelten (siehe Blatt 4 Aufgabe 1) für die Transformation vom Referenzelement $T_E : \hat{E} \to E$ die Abschätzungen

$$\| \nabla T \| = \| A \| \leq \frac{h_E}{\hat{\rho}}$$

$$\| (\nabla T)^{-1} \| = \| A^{-1} \| \leq \frac{\hat{h}}{\rho_E}$$

$$c \rho^d \leq |\det(A)| \leq C h^d$$

ii) Betrachte Interpolation $\hat{I}$ auf Ref-Element.

Wir wollen nun zeigen, dass gilt

$$(*) \begin{cases} |v - I_E v|_{H^k(E)} \leq \frac{c}{\rho_E^k} |\det(A)|^{1/2} |\hat{v} - \hat{I}\hat{v}|_{H^k(\hat{E})} \\ |\hat{v}|_{H^m(\hat{E})} \leq c h_E^m |\det(A)|^{-1/2} |v|_{H^m(E)} \end{cases}$$

Nach Satz <u>2.42</u> gilt auf $\hat{E}$

$$|\hat{v} - \hat{I}\hat{v}|_{H^k(\hat{E})} \leq \hat{c} \, |\hat{v}|_{H^m(\hat{E})} ,$$

damit und den Abschätzungen $(*)$ erhalten wir dann die Behauptung

iii) Die Gradienten von v, bzw $\hat{v}$ transformieren sich mit A^T, bzw A^{-1T}

$$\Rightarrow \quad |Dv(x)| \leq \|A^{-1}\| \, |\hat{D}\hat{v}(\hat{x})| \leq c \frac{\hat{h}}{\varrho_E} |\hat{D}\hat{v}(\hat{x})|$$

und $$|\hat{D}\hat{v}(\hat{x})| \leq \|A\| \, |Dv(x)| \leq c \frac{h_E}{\hat{\varrho}} |Dv(x)|$$

$\Rightarrow$ für partielle Ableitungen D^α folgt damit

$$|D^\alpha v(x)| \leq c \left(\frac{\hat{h}}{\varrho_E}\right)^{|\alpha|} \max_{|\beta|=|\alpha|} |\hat{D}^\beta \hat{v}(\hat{x})|$$

und $$|\hat{D}^\alpha \hat{v}(\hat{x})| \leq c \left(\frac{h_E}{\hat{\varrho}}\right)^{|\alpha|} \max_{|\beta|=|\alpha|} |D^\beta v(x)|$$

$$\Rightarrow \quad \int_E |D^\alpha v(x)|^2 dx = \int_{\hat{E}} |\det(A)| \, |D^\alpha v(T^{-1}(x))|^2 dx$$

$$\leq |\det(A)| \, c^2 \left(\frac{\hat{h}}{\varrho_E}\right)^{2|\alpha|} \max_{|\beta|=|\alpha|} \int_{\hat{E}} |\hat{D}^\beta \hat{v}(\hat{x})|^2 d\hat{x}$$

und $$\int_{\hat{E}} |\hat{D}^\alpha \hat{v}(\hat{x})|^2 dx \leq |\det A|^{-1} c^2 \left(\frac{h_E}{\hat{\varrho}}\right)^{2|\alpha|} \max_{|\beta|} \int_E |D^\beta v(x)|^2 dx$$

$\Rightarrow$ für Sobolev-Semi-Norm (Wurzel ziehen)

$$|v|_{H^k(E)} \leq c \, |\det(A)|^{1/2} \left(\frac{\hat{h}}{\varrho_E}\right)^k |\hat{v}|_{H^k(\hat{E})}$$

$$|\hat{v}|_{H^m(\hat{E})} \leq c \, |\det(A)|^{-1/2} \left(\frac{h_E}{\hat{\varrho}}\right)^m |v|_{H^m(E)}$$

$$\Rightarrow \forall E \in \mathcal{T}_h(\Omega)$$

$$|v - I_E v|_{H^k} \leq \frac{c}{\rho_E^k} |\det(A)|^{1/2} |\hat{v} - \hat{I}\hat{v}|_{H^k}$$

$\hat{h} = \text{const.}$

$$\leq \frac{c}{\rho_E^k} |\det(A)|^{1/2} |\hat{v}|_{H^m}$$

!

$$\leq c \frac{h_E^k}{\rho_E^m} \cancel{|\det(A)|^{1/2}} \cancel{|\det(A)|^{-1/2}} |v|_{H^m}$$

iv) Quadrieren & Summieren über alle Elemente liefert globale Halbnormen.
Summieren über alle k von 0 bis l liefert globale Abschätzung. $\square$

Offenbar ist es wichtig σ zu kontrollieren...

Definition 2.44 Quasi-uniforme Gitter

Eine Sequenz von Gittern $\{\mathcal{T}_h\}_{h\to 0}$ heißt quasiuniform, (shape-regular) wenn eine Schranke $\kappa > 0$ existiert, so dass

$$\sigma_E = \frac{h_E}{\rho_E} \leq \kappa \qquad \forall E \in \mathcal{T}_h,\ \mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$$

Definition 2.45 $\{\mathcal{T}_h\}_{h\to 0}$ heißt uniform,

wenn eine untere Schranke $\delta > 0$ existiert, so dass

$$h_E \geq \delta h$$

Immer κ, δ unabh. von h!