2.4 Allgemeine Finite-Elemente Ansätze

Wir hatten Lagrangeansätze für stückweise lineare Funktionen auf Dreiecksgittern kennen gelernt.

<u>1. Fall</u> höhere Ordnung

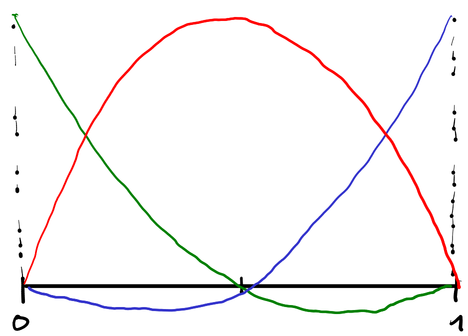
Wie würde das für

$$V_h = \{ \varphi \in C^0(\bar{\Omega}) \mid \varphi|_E \in P^k ,\ E \in T_h(\Omega) \},$$

stückweise Polynome vom Grad k, aussehen?

Wir können wieder den gleichen Ansatz machen. Auf jedem Element wählen wir eine lokale Basis Lagrange-Polynomen mit $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$, x_j jetzt die Stützstellen des Polynoms.

Beispiele: 1D, 2. Ordnung

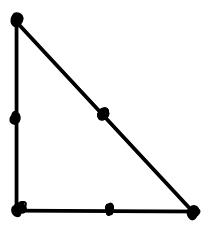


$$\hat{\varphi}_1 = \frac{1}{2}\hat{x}(\hat{x}-1)$$

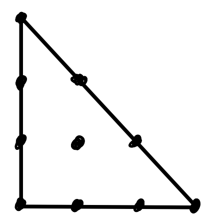
$$\hat{\varphi}_2 = -(\hat{x}+1)(\hat{x}-1)$$

$$\hat{\varphi}_3 = \frac{1}{2}(\hat{x}+1)\hat{x}$$

2D Stützstellen



2. Ordnung



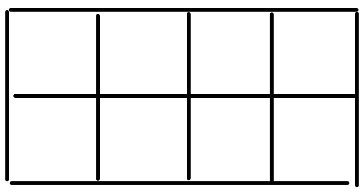
3. Ordnung

2. Fall Viereckselemente

Warum sollten wir für ein strukturiertes Gitter Simplex-Elemente verwenden?

In 3D zerlegt sich ein Würfel in 6 Tetraeder (Kuhn-Triangulierung)

Viereckgitter 2D:



nicht konstruierbar

$$V_h = \{ \varphi \in C^0(\Omega) \mid \varphi|_E \in P^1, E \in \mathcal{T}_h(\Omega) \}$$

Widerspruch!

Statt $P^1 = \text{span}\{1, x, y\}$ können wir $Q^1 = \text{span}\{1, x, y, xy\}$ ansetzen.

Definition 2.28 P^k, Q^k Räume

Wir betrachten Funktion $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, α sei ein Multi-Index, $\alpha \in \mathbb{N}^d$

$$P^k = \text{span}\left\{ \prod_{i=1}^{d} x_i^{\alpha_i},\ 0 \le |\alpha| \le k,\ x \in \mathbb{R}^d \right\}$$

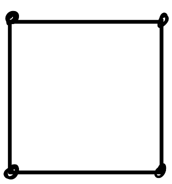
Beschreibt die Polynome bis Grad k

$$Q^k = \left[\text{span}\{ x^j,\ 0 \le j \le k,\ x \in \mathbb{R} \} \right]^d$$
$$= \text{span}\left\{ \prod_{i=1}^{d} x_i^{\alpha_i},\ 0 \le \alpha_i \le k,\ x \in \mathbb{R}^d \right\}$$

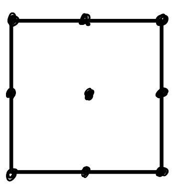
Beschreibt den Raum der multi-linearen, multi-quadratischen, multi-kubischen, ... Polynome.

Q^k ist als Tensorprodukt von P^k in 1D konstruiert. Damit passt es fabelhaft zu Hyperwürfeln, die Tensorprodukte des Einheitsintervalls beschreiben.

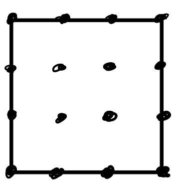
Beispiel 2D Quadrat



bi-linear



bi-quadratisch



bi-kubisch

Wir müssen also unsere Ansätze aus der letzten Vorlesung verallgemeinern.

Definition 2.29 allgemeines Finites Element (nach Ciarlet)

Ein finites Element ist ein Tripel (E, P, Ψ)

i) $E \subset \mathbb{R}^d$ die Elementgeometrie,
nicht leer, beschränkt, abgeschlossen

ii) Funktionenraum P auf E,
mit Basis $\Phi := \{\varphi_1, \dots \varphi_k\}$ die "Formfunktionen"
k linear unabh. Funkt auf E und $P := \operatorname{span} \Phi$

iii) $\Psi := \{\psi_1, \dots \psi_k\}$ Menge von k linearen Funktionalen
derart, dass jedes $\phi \in P$ eindeutig durch
$$\psi_1(\phi), \dots \psi_k(\phi)$$
festgelegt ist (Ψ ist unisolvent bzgl. P)

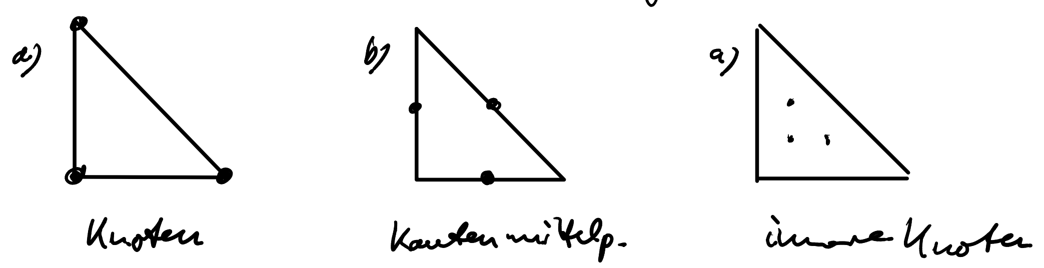
Bemerkung

- Ψ ist Basis von P', Dualraum von P
- Ψ zeichnet eine Basis von P aus, so dass $\varphi = \sum_{i=1}^{k} \psi_i(\varphi)\, \varphi_i$ gilt.
- sehr unterschiedliche Funktionale möglich
  z.B. • Punktauswertungen $\psi_i(\varphi) = \varphi(x_i)$
  (wie bei Lagrange-Ansätzen)
  • Integrale $\psi_i(\varphi) = \int_{\text{Face}_i} \varphi(x)\, dx$
  • Flüsse (für Vektorwertige Funkt φ)
  $$\psi_i(\varphi) = \int_{\text{Face}_i} \varphi(x) \cdot n(x)\, dx$$
  • Ableitungen $\psi_i(\varphi) = \nabla \varphi(x_i)$
  • ...

Frage: Ich verwende eine Lagrangebasis
<=> Ψ beschreibt Punktauswertungen
☐ Ja ☐ Nein

Beispiel 2.30: wir betrachten $P = P^1$ auf Dreieck

$\psi_i(\varphi) = \varphi(x_i)$ Knotenauswertung



3 nodale Basen, aber nur eine können wir leicht zu stetigen globalen Funktionen zusammenbauen.

globale Stetigkeit ergibt sich aus der Assoziation lokaler Freiheitsgrade mit geom. Entitäten, z.B. Knoten, Kanten, Zellen.

Oben liegt es nahe, dass

a) Knoten- b) Kanten- c) Zell-Freiheitsgrade

beschreibt. Damit erhalten wir

a) stetige Funkt. b) stetig im Kantenmittelp. c) unstetige Funkt.

Das ist durchaus gebräuchlich & führt am Ende auf 3 verschiedene FEM-Ansätze

a) P^1-Lagrange b) Crouzeix-Raviart c) P^1-dG

Definition 2.31 Konformität

Ein FE-Ansatz heißt konform, wenn der globale Ansatzraum $U_h \subset U$ ein echter Unterraum des kontinuierlichen Lösungsraums U ist.

Anmerkung Für das Poissonproblem (und die meisten Beispiele der Vorlesung) heißt das $U_h \subset H^1(\Omega)$

Beispiel 2.32 höhere Stetigkeit

Lagrangeansätze 1. Ordnung nutzen Knotenwerte der um $V_h \subset H^1(\Omega)$ zu erreichen, insbesondere $V_h \subset C^0(\Omega)$.
Können wir höhere Stetigkeiten erreichen?
$\longrightarrow$ Ableitungsfreiheitsgrade

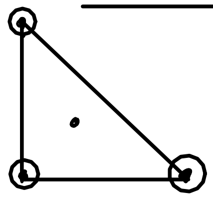
Definition 2.33 Notation

Zur bildlichen Beschreibung von FE-Ansätzen führen wir folgende gebräuchliche Darstellung ein:

- Knotenauswertung $v(x)$
- Funktions- & Ableitungsauswertung $v(x), \nabla v(x)$
- Normalenableitung $\partial_n v(x) = n(x) \cdot \nabla v(x)$
- Auswertungen $v(x), \nabla v(x), \nabla^2 v(x)$

Fortsetzung 2.32

Zunächst Hermiteelement (E, P, Ψ)



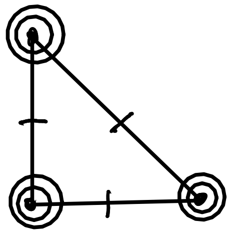
$$P := \mathcal{P}^3, \quad \Psi := \{ \underbrace{\varphi(x_i)}_{3} , \underbrace{\nabla\varphi(x_i)}_{+\,3\times 2} , \underbrace{\varphi(c)}_{+\,1\,\to\,10} \}$$

x_i Ecken des Dreiecks,

c Mittelp. ——"——

Mit $\psi_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$ erhalten wir wieder eine eindeutige Basis Φ für P mit $\dim(\Phi) = \dim(\Psi) = 10$

Argyris-Element



H^2-konform, d.h. stetig diffbar über Zellen hinaus.

Definition 2.34 (Iso-)parametrische Ansätze

Ein FE-Ansatz heißt parametrisch, wenn der lokale Ansatzraum P durch die Transformation $T: \hat{E} \to E$ und $\hat{P}$ auf $\hat{E}$ gegeben ist.

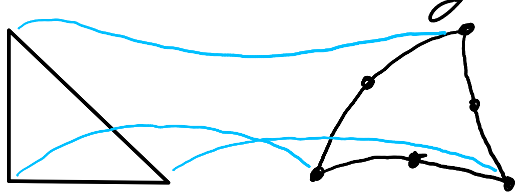
Das ist das, was wir in der Regel machen werden (z.B. Lagrange-Ansätze)

Er heißt <u>iso</u>-parametrisch, falls die Transformation T selbst als Funktion aus $\hat{P}(\hat{E})$ darstellbar ist.

Beispiele

a) lineare Lagrange-Ansätze auf Dreiecksgittern

b) quadratische Abbildung & P^2-Lagrange-Ansätze



$T \in (P^2)^2$

Wir haben jetzt deutlich weitreichendere Konzepte für die Konstruktion von lokalen Finiten Elementen kennen gelernt.

Aus diesen wollen wir nun globale Basen konstruieren. Dabei ergeben sich Stetigkeiten durch die Assoziation lokaler Freiheitsgrade mit Gitterknoten o. Ä. Wir müssen dazu die Beschreibung von FE-Gittern erweitern.

Wir betrachten ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Definition 2.35 konvexes Polytop

Die konvexe Hülle einer endlichen, nichtleeren Punktmenge $X = \{x_0, \dots x_n\}$, $x_i \in \mathbb{R}^d$ beschreibt ein konvexes Polytop Θ.

Die Dimension von Θ ist die Dimension seiner affinen Hülle, d.h. hier

$$\dim \Theta = \dim \operatorname{span} \{ x_i - x_j \,,\, i \neq j ,\, x_i, x_j \in X \}$$

Unterpolytope von Θ sind Polytope mit einer Knotenmenge $Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$.
Unterpolytope $\sigma \subset \partial\Theta$ nennen wir eine Facette von Θ.

$c := \dim \Theta - \dim \sigma$ ist die Kodimension von σ bzgl. Θ.

Definition 2.36 Geometrietyp & Referenzelement

Polytope θ, θ' sind isomorph ($\theta \simeq \theta'$), wenn eine bijektive Abbildung $T: \theta \to \theta'$ existiert, so dass $T(\eta)$ eine Facette von $T(x)$ ist, genau dann wenn η ——"—— x ist.

Der Geometrietyp $\mathcal{G}$ bezeichnet eine Äquivalenzklasse der konvexen Polytope, bzgl. "$\simeq$".

$\mathcal{G}$ ist durch die Kodimension c & eine Klasse t (Simplex, Hyper-Würfel, etc.) charakterisiert.

Für jede Äquivalenzklasse (jeden Geometrietypen) wählen wir einen Repräsentanten als Referenzelement.

Definition 2.37 Gitterentitäten

Die Entitäten $e \subset \mathbb{R}^d$ in einem Gitter werden durch Abbildungen von einem Referenzelement $\hat{e}$ beschrieben.

Entitäten mit Kodimension $c > 0$ sind Unterentitäten (Facetten) von Codim-0-Entitäten.

	Kodimension	Dimension
Element	0	d
Face	1	$d-1$
Kante	$d-1$	1
Knoten	d	0

__Anmerkung__ Da die Elemente eines Gitter eine Partition von Ω beschreiben, sind alle Subentitäten entweder Schnitte zweier Elemente $e = \overline{E} \cap \overline{E}'$ oder mit dem Rand $e = \overline{E} \cap \partial\Omega$.