Fraunhofer
IIS

Existenz & Eind. solcher Lösungen erh. man via Lax-M.

Satz 2.21 Lemma von Céa

(aber hat das etwas mit echten Problem zu tun?)

Hilbertraum V, $V_h \subset V$, $u \in V$, $u_h \in V_h$,
Lösungen einer elliptischen PDGl

$$\begin{cases} a(u,\varphi) = f(\varphi) & \forall \varphi \quad \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

mit
$$\left.\begin{aligned} |a(v,w)| &\le \alpha \|v\|_V \|w\|_V \\ |f(v)| &\le \gamma \|v\|_V \\ a(v,v) &\ge \kappa \|v\|_V^2 \end{aligned}\right\} \forall v,w \in V$$

(wie bei Lax-Milgram)

dann gilt die abstrakte Fehlerabschätzung

$$\|u-u_h\|_V \le \frac{\alpha}{\kappa} \inf_{v_h \in V_h} \|u-v_h\|_V$$

Am Wolfsmantel 33
91058 Erlangen

Telefon +49 9131 776-0
Fax +49 9131 776-2019

info@iis.fraunhofer.de
www.iis.fraunhofer.de

<u>Beweis</u>

1) $a(u,\varphi) \overset{!}{=} f(\varphi) \quad \forall \varphi \in V$, daher speziell

$$\left.\begin{array}{l} a(u,\varphi_h) = f(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_h \\ a(u_h,\varphi_h) = f(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_h \end{array}\right] \text{abziehen}$$

$$\Rightarrow \boxed{a(u-u_h,\varphi_h) = 0} \quad \text{Galerkin-Orthogonalität}$$

2) $$\|u-u_h\|_V^2 \le \frac{1}{k}|a(u-u_h,u-u_h)| \quad \text{(Koerzivität)}$$

$$\underset{\text{(0 einschieben)}}{=} \frac{1}{k}|a(u-u_h,u-v_h+v_h-u_h)|$$

$$= \frac{1}{k}|a(u-u_h,u-v_h) + \underbrace{a(u-u_h,v_h-v_h)}_{=0}|$$

$$\underset{\text{(Stetigkeit)}}{\le} \frac{\alpha}{k}\|u-\cancel{u_h}\|_V\|u-v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h$$

$\square$

Fraunhofer IIS

Bemerkung

i) u_h ist quasi-optimal, d.h. nur um feste Konstante schlechter als beste Lösung
→ "Best approximation"

ii) Für symmetrisches $a(\cdot,\cdot)$ läßt sich die Konstante auf

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\kappa}} \text{ verbessern}$$

iii) Bzgl. der Energienorm

$$\|v\|_a = \sqrt{a(v,v)}\ ,\ a(\cdot,\cdot) \text{ ein SP}$$

(nur für sym. $a(\cdot,\cdot)$ möglich)

gilt sogar

$$\|u - u_h\|_a \leq \|u - v_h\|_a \quad \forall v_h \in V_h$$

→ Beste Approximation bzgl. Energienorm
(passt zu Galerkin-Orthogonalität)

Fehler $e_h = (u - u_h) \perp$ zu V_h bzgl. $a(\cdot,\cdot)$

Am Wolfsmantel 33
91058 Erlangen
Telefon +49 9131 776-0
Fax +49 9131 776-2019
info@iis.fraunhofer.de
www.iis.fraunhofer.de

2.3.1 Matrixdarstellung

Gesucht ist $u_h \in V_h$ so dass

$$a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

Sei $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ Basis von V_h, d.h.

$$V_h = \operatorname{span}\{\varphi_i\}, \quad N = \dim(V_h).$$

Da a, f linear in v_h sind reicht

$$\Rightarrow a(u_h, \varphi_j) = f(\varphi_j) \quad \forall j \in [1, N]$$

(N Gleichungen)

Wir schreiben $u_h = \sum_{i=1}^{N} x_i \varphi_i$

$$\Rightarrow a\Big(\sum_i x_i \varphi_i, \varphi_j\Big) = f(\varphi_j) \quad \forall j \in [1, N]$$

$$\underset{\text{Linearität}}{\Leftrightarrow} \sum_i a(\varphi_i, \varphi_j)\, x_i = f(\varphi_j) \quad \forall j \in [1, N]$$

$$\Leftrightarrow \quad A x = b$$

mit $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$

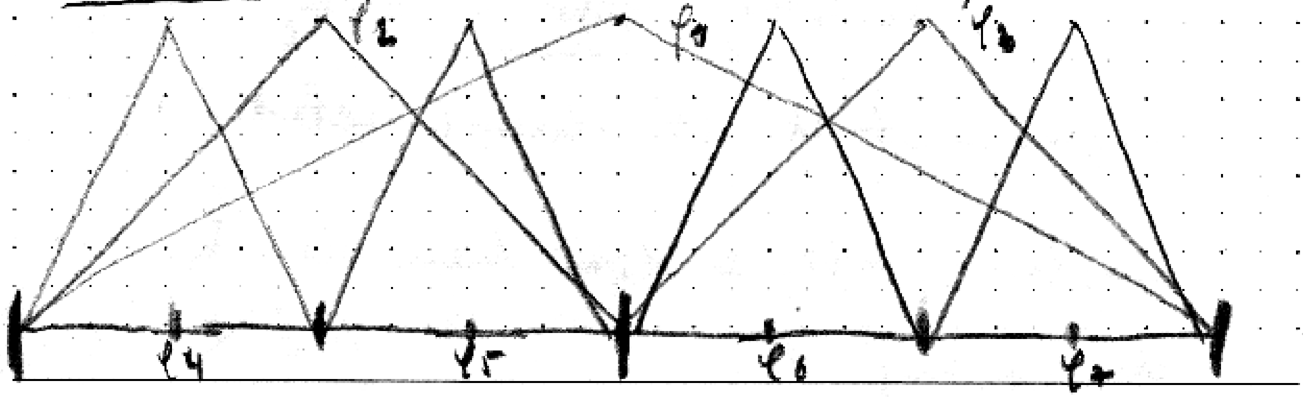
$b \in \mathbb{R}^N$, $b_j = f(\varphi_j)$

Struktur & Einträge von A hängen maßgeblich von Wahl der Basis $\{\varphi_i\}$ ab.

Ziel: möglichst dünnbesetzte Matrix
→ reduzierter Aufwand beim Erstellen
→ effizientere Löser

Betrachten wir unterschiedliche Basen für stückweise lineare Fkt in 1D

<u>Bsp 2.22</u> Hierarchische Basis, 1D



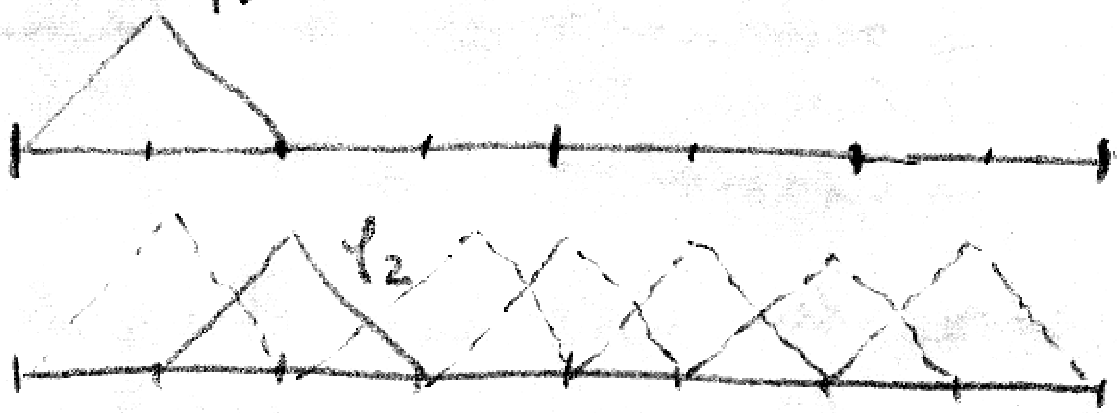
- Bei Gitterverfeinerung bleiben alte Basen unverändert
- relativ viele Kopplungen

→ kann die auch orthog. konstruieren? → Übung

Beispiel 2.23 Lagrangebasis

Lagrangeeigenschaft: Basis $\{\varphi_i\}$, Knoten x_i und $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ mit δ_{ij} Dirac-Delta.

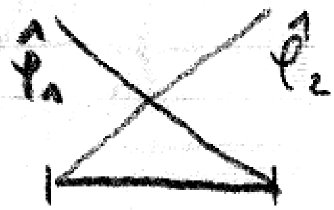
Basis φ_1



- Bei Verfeinerung ändern sich alle Basisfkt.
- alle φ_i haben <u>lokalen</u> Träger

→ Systemmatrix ist dünnbesetzt

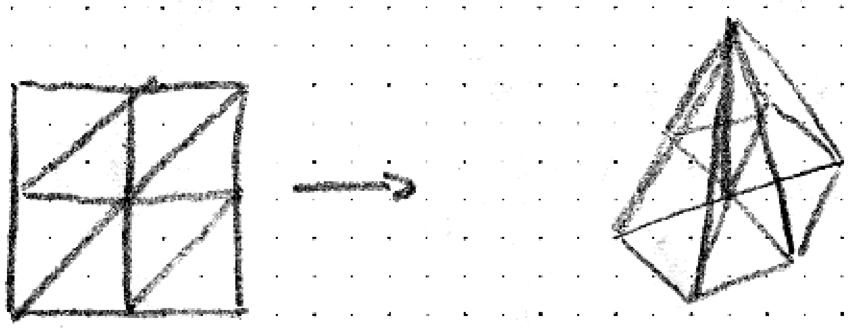
- Knotenwerte entsprechen den Koeffizienten der Lösung
- Elementweise konstruierbar



Fraunhofer
IIS

Wie sehen die in 2D aus?

„Hutbasis"



Wie assemblieren wir praktisch die Systemmatrix?

<u>Def 2.24</u> Index

konsekutive Nummerierung, bei 0 startend (oder manchmal bei 1)

<u>Def 2.25</u> Referenzsimplex

Wir definieren unsere Referenzsimplizes als

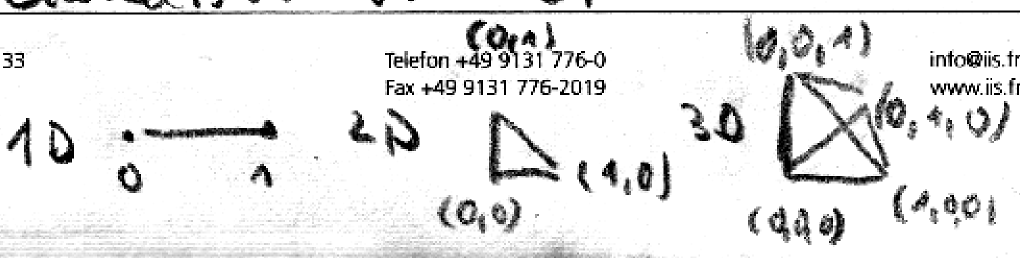
$$\hat{S}_d := \operatorname{conv}\{0, e_1, \dots e_n\} \subset \mathbb{R}^d$$

konvexe Hülle des Ursprungs & der Einheitsvektoren e_i

Am Wolfsmantel 33
91058 Erlangen

Telefon +49 9131 776-0
Fax +49 9131 776-2019

info@iis.fraunhofer.de
www.iis.fraunhofer.de



Auf jedem Element können wir eine lokale Basis wählen, dadurch konstruieren wir die globale Basis.

Beispiel lokale Lagrangebasis in 2D

Der Raum ist definiert als

$$V_h = \{ \varphi \in C^0(\bar{\Omega}) \mid \varphi \in P^1 \text{ auf } E \in \mathcal{T}_h(\Omega) \}$$

Auf $\hat{E}$, bzw $\hat{S}_2$, wählen wir eine Basis $\{\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_3\}$ mit $\hat{\varphi}_i(\hat{x}_j) = \delta_{ij}$

an den Knoten
$$\hat{x}_1 = (0,0)$$
$$\hat{x}_2 = (1,0)$$
$$\hat{x}_3 = (0,1)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\varphi}_1 = 1 - x - y$$
$$\hat{\varphi}_2 = x$$
$$\hat{\varphi}_3 = y$$

lokal assoziieren wir jede Basisfunkt $\hat{\varphi}_i$ mit dem lokalen Knoten $\hat{x}_i$

Eine globale Basis ergibt sich indem wir lokale Knoten mit globalen Knoten

Fraunhofer
IIS

assoziieren & durch die Transformation in globale Koordinaten

Definition 2.26 Knotenabbildung

Gegeben eine Nummerierung I der Knoten der Triangulierung $\mathcal{T}_h(\Omega)$ und $\hat{I}$ der Knoten des Referenzsimplex $\hat{S}_d$.
$I, \hat{I}$ seien Indexmengen gemäß 2.24, dann beschreibt für jedes Element $E_i \in \mathcal{T}$

$$\mu_i : \hat{I} \to I$$

eine bijektive Abbildung, so dass für die assoziierten Knoten $\hat{x}_k, k \in \hat{I}$ und $x_l, l \in I$ gilt

$$\mu_i(k) = l \quad \Rightarrow T_i(\hat{x}_k) = x_l$$

μ_i können wir darstellen als "Prolongations-

Am Wolfsmantel 33
91058 Erlangen
Telefon +49 9131 776-0
Fax +49 9131 776-2019
info@iis.fraunhofer.de
www.iis.fraunhofer.de

Matrix" $P_i \in \mathbb{R}^{N \times M}$, $N = \dim(I)$, $M = \dim(\hat{I})$

Def 2.27 lokale Steifigkeitsmatrix

[Die lokale Basis enthält die Einschränkung aller Basisfunktionen, die auf dem Element Träger haben.]

Wir können die System- (oder Steifigkeits-) Matrix als Summe von Elementbeiträgen

$$A = \sum_{E_i \in \mathcal{T}(\Omega)} P_i A_i P_i^T$$

schreiben mit der

„lokalen Steifigkeitsmatrix" A_i.

$$[A_i]_{kl} = \int_{E_i} \nabla \varphi_{\mu(k)}(x) \nabla \varphi_{\mu(l)}(x) \, dx$$

$$= \int_{\hat{E}} \mathcal{J}_i^{-T} \hat{\nabla} \hat{\varphi}_k(\hat{x}) \mathcal{J}_i^{-T} \hat{\nabla} \hat{\varphi}_l(\hat{x}) \det(\mathcal{J}_i) \, d\hat{x}$$

mit $\mathcal{J}_i$ Jakobimatrix der Transformation T_i,

$\hat{\nabla}$ Gradient auf Referenzelement

Anmerkung: i.A. ist $\mathcal{J}_i$ nicht konstant, sondern hängt von $\hat{x}$ ab. Für Simplizes ist es konstant.