Satz 2.15 Poincaré'sche Ungleichung (2)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ Gebiet mit Durchmesser

$D := \operatorname{diam}(\Omega)$.

Dann $\exists$ $C_p \geq 2D$, so dass

(*) $\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

(Verallgemeinerbar zu Neumann-RB)

<u>Beweis</u> Wir zeigen (*) für $v \in C_0^1(\Omega)$, da C_0^1 dicht in $W_0^{1,p}$ liegt.

Am Wolfsmantel 33
91058 Erlangen

Telefon +49 9131 776-0
Fax +49 9131 776-2019

info@iis.fraunhofer.de
www.iis.fraunhofer.de

Sei $v \in C_0^1(\Omega)$, $\tilde{v}$ Fortsetzung auf $\mathbb{R}^d$

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} v(x), & x \in \Omega \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wähle $C > 0$ sodass $\Omega \subset [-C, +C] \times \mathbb{R}^{d-1}$

$$\Rightarrow \quad \tilde{v}(x) = \int_{-c}^{x} \partial_{x_1} \tilde{v}(\xi, x_2, \dots x_d)\, d\xi$$

Hauptsatz der Integral-/Differentialrech.

Wähle p, q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$|\tilde{v}(x)|^p \leq \left[\int_{-c}^{x} |\partial_{x_1} \tilde{v}(\xi, \dots)|\, d\xi \right]^p \leq \left[\int_{-c}^{c} |\partial_{x_1} \tilde{v}|\, d\xi \right]^p$$

$$\underset{\text{(Hölder)}}{\leq} \left[\left(\int_{-c}^{c} |\partial_{x_1} \tilde{v}|^p\, d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-c}^{c} 1^q\, d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \right]^p$$

$$= (2C)^{\frac{p}{q}} \int_{-c}^{c} |\partial_{x_1} \tilde{v}|^p\, d\xi$$

nochmals über x_1 integrieren

$$\int_{-c}^{c} |\tilde{v}(x)|^p\, dx_1 \leq (2C)^{\frac{p+1}{q}} \int_{-c}^{c} |\partial_{x_1} \tilde{v}(\xi, \dots)|^p\, d\xi$$

sowie über $x_2, \dots x_d$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{v}|^p\, dx \leq (2C)^{\frac{p+1}{q}} \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_{x_1} \tilde{v}|^p\, dx$$

$\frac{p+1}{q} = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega} |v|^p\, dx \leq 2C \int_{\Omega} |\partial_{x_1} v|^p\, dx$

analog für alle Richt. $\square$

2.2 Variationsformulierung

Def 2.16 Schwache Formulierung des Poisson-Problems

Sei Ω Lipschitz-Gebiet, $f \in L^2(\Omega)$

$u \in H_0^1(\Omega)$ heißt schwache Lösung von

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$
$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

falls

$$(**) \qquad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Satz 2.17 Existenz & Eindeutigkeit

(**) hat genau eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$

Beweis: $a(u,\varphi) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx$ ist Bilinearform und beschränkt für $u, \varphi \in H_0^1$

- mittels Poincaré zeigen wir Koerzivität von a

$$a(v,v) = |v|^2_{H^1(\Omega)} = \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{C_p} \|v\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \quad 2 \cdot a(v,v) \geq \frac{1}{C_p} \|v\|^2_{L^2} + \|\nabla v\|^2_{L^2} \geq c \underbrace{\left(\|v\|^2_{L^2} + \|\nabla v\|^2_{L^2} \right)}_{= \|v\|^2_{H^1}}$$

- $f \in L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \subset H_0^{-1}(\Omega)$

$\Rightarrow$ RHS ein lin. Funktional aus H_0^{-1}

$\Rightarrow$ nach Lax-Milgram folgt

$\exists$ eindeutige Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$

Satz 2.17 Variationsprinzip

$\Omega, \mathcal{A}, f$ wie oben, dann sind äquivalent

i) $u \in H_0^1(\Omega)$ ist schwache Lösung von $(**)$

ii) $$u = \operatorname{argmin}_{v \in H_0^1} J(v)$$

mit Energiefunktional $J : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v,v) - (f,v)_{L^2}$$ lassen wir jetzt weg

Beweis Verallgemeinerung als Übung, ähnlich Blatt 2 A2.

Bemerkung 2.18 Allgemeine Dirichlet-RB

Sei $g \in H^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $u \in H^1(\Omega)$ schwache Lösung von

$$-\Delta u = f, \quad u = g \text{ auf } \partial\Omega.$$

Lösungsansatz:

$\tilde{u} = u - g \in H_0^1(\Omega)$, damit folgt

$$(\nabla u, \nabla \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\nabla \tilde{u}, \nabla \varphi) = \underbrace{(f, \varphi) - (\nabla g, \nabla \varphi)}_{=: \hat{f}(\varphi) \in H_0^{-1}(\Omega)} \quad \forall \varphi \in H_0^1$$

2.2 Galerkin-Ansatz Verfahren

Idee Variationsproblem

$$a(u,\varphi) = f(\varphi) \quad \forall \varphi \in V \quad \text{Testfunkt}$$

[V Hilbertraum, a beschr., koerzive Bilinearform
$f \in V'$, u Lösung $\in V$ Ansatzfunkt]

wähle diskreten Unterraum

Def 2.19 (Ritz-) Galerkin Verfahren

Sei $U_h, V_h \subset V$ Ansatz- / Testraum

- Ritz-Galerkin Ansatz ($U_h = V_h$)

  Finde $u_h \in V_h$ so dass

  $$a(u_h, \varphi_h) = f(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_h$$

- Petrov-Galerkin Ansatz ($X_h \neq Y_h$)

  Finde $u_h \in U_h$, so dass

  $$a(u_h, \varphi_h) = f(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_h$$

Mögliche Ansatzräume für $X = H_0^1(\Omega)$

- Polynomräume $V_h = \{ f \in P^k(\Omega), f = 0 \text{ auf } \partial\Omega \}$
  Polynome bis Grad k
  $\rightarrow$ Spektralansatz
- Raum aus N Eigenfunktionen
  $V_h := \text{span}\{ u_i \in X, L u_i = \lambda_i u_i, i \in [1,N] \}$
- Stückweise Polynome
  $\rightarrow$ Finite-Element Ansätze

Bsp 2.20

Dreiecksgitter $T_h(\Omega)$
(nicht-überlappende Zerlegung)

$T_h(\Omega) := \{ E_0, \dots E_{N-1} \}$

$E_i \subset \Omega$, Dreieckselement

$E_i = T_i(\hat{E})$, T_i affin linear

$E_i \cap E_j = \emptyset$ für $i \neq j$

$\overline{\Omega} = \bigcup \overline{E_i}$

$\hat{E}$: Referenzdreieck

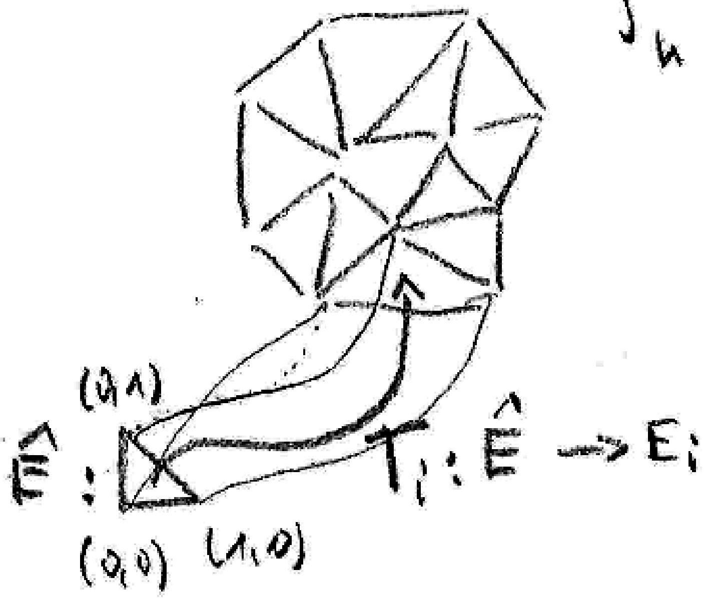
Am Wolfsmantel 33
91058 Erlangen

Telefon +49 9131 776-0
Fax +49 9131 776-2019

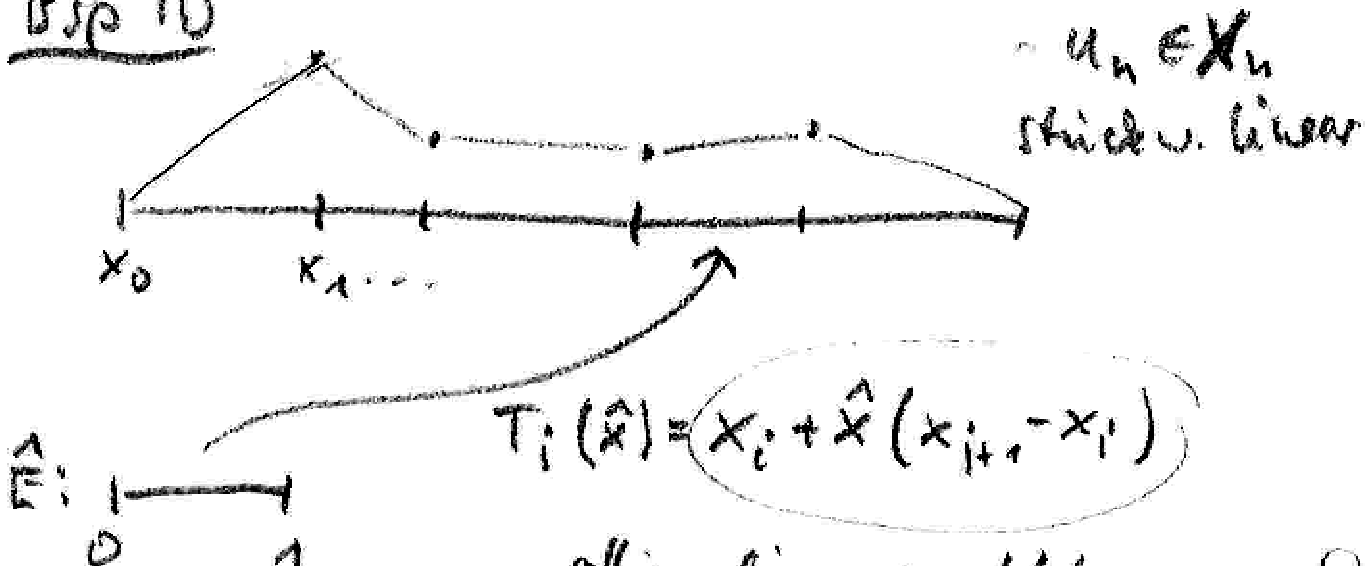
info@iis.fraunhofer.de
www.iis.fraunhofer.de

Bsp 2D:

$$\mathcal{T}_h(\Omega), \; \Omega \subset \mathbb{R}^2$$



Bsp 1D



$$T_i(\hat{x}) = x_i + \hat{x}\,(x_{i+1} - x_i)$$

affin-lineare Abb.

$$V_h := \{ \varphi \in C^0(\bar{\Omega}) \mid \varphi = 0 \text{ auf } \partial\Omega, \; \varphi|_{E_i} \in P^k, \; E_i \in \mathcal{T}_h(\Omega) \}$$

Speziell stückweise linear:

Knotenwerte beschreiben Lösung,

auf E_i linear zwischen Knotenwerten

→ Programmierübung

Wir müssen für Bilinearform Integrale auswerten.

→ Quadratur auf Elementen des Gitters

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \sum_{E_i \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \int_{E_i} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{E_i} \sum_{(q,w)} f(q)\,w$$

mit Quadraturpunkten & Gewichten (q,w)
... kann man konstruieren wie in NumAna, so dass Polynome bis Grad k exakt integriert werden ... basiert auf Polyn.-IP

Aber! Wir wollen nicht für jedes Element E_i eine neue Quadratur konstruieren

→ Konstruktion auf Referenzelement $\hat{E}$

$$\dots = \sum_{E_i} \int_{\hat{E}} f\big(\underbrace{T_i(\hat{x})}_{\text{Trafo in globale Koord.}}\big)\, \det\big(J(T_i)(\hat{x})\big)\, d\hat{x}$$

↖ Jakobimatrix der Trafo, auf Dreiecken gilt $J(T_i) = T_i$

$$= \sum_{E_i} \sum_{(\hat{q},\hat{w})} f(T_i(\hat{q}))\,\hat{w}\,\det\big[J(T_i)(\hat{q})\big]$$