Fraunhofer
IIS

(1)

WH2

⇝ schwache Ableitung geben keine Punktweise Definition, sondern nur für die gesamte Funktion

... sowas ähnliches hatten wir bereits gesehen ?!
→ L^p-Räume auf einer 0-Menge ist es "egal" was die Funktion macht, hier dürfen die Ableitungen auf einer 0-Menge "Quatsch" machen.

Beispiele / Fragen

- Jede L^2 Funktion ist stetig ☐ Ja ☐ Nein
  → Bsp. $\mathrm{sign}(x) \in L^2, \notin C^0$ auf $[-1,1]$
- Der C_0^∞ liegt dicht im L^p für $p<\infty$ ☐ Ja ☐ Nein
  → Vervollständigen bzgl. $\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v|^p dx\right)^{1/p}$
- Der L^2 ist ein Hilbertraum ☐ Ja ☐ Nein
  → SP $(x,y) = \int_\Omega x y \, dx$ → $\|\cdot\|_{L^2}$ induzierte Norm
  & L^2 dual zu L^2
- $L^p \subset L^q$ für $p>q$ ☐ $p<q$ ☐
- $1/x$ auf $[1,\infty]$ L^1 ☐, L^2 ☐, $L^p, p>2$ ☐
- $1/x$

Am Wolfsmantel 33
91058 Erlangen
Telefon +49 9131 776-0
Fax +49 9131 776-2019
info@iis.fraunhofer.de
www.iis.fraunhofer.de

Beispiel Schwache Ableitung

$\Omega = [-1, 1]$, $u(x) = |x|$

klassische Ableitung existiert nicht in $x = 0$.

Schwache Ableit. $u'(x) = \mathrm{sign}(x)$

$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, z. B. $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & x \in [-1,1] \end{cases}$

beliebig oft diffbar, $\mathrm{supp}\,\varphi = [-1,1]$

"standard mollifier" (Evans)

Teste u mit φ' und integriere stückweise partiell

$$\int_{-1}^{1} u\varphi' dx = \int_{-1}^{0} u\varphi' dx + \int_{0}^{1} u\varphi' dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (-x)\varphi' dx + \int_{0}^{1} x\varphi' dx$$

$$= -\int_{-1}^{0} (-1)\varphi\, dx - \cancel{[(-x)\varphi]_{-1}^{0}} - \int_{0}^{1} 1\varphi\, dx + \cancel{[x\varphi]_{0}^{1}}$$

$$= \int_{-1}^{1} \mathrm{sign}(x)\varphi\, dx$$

<u>aber</u>: sign nicht mehr schwach diffbar...

Fraunhofer
IIS

Jetzt vervollständigung des C^∞
bzgl. ~~der~~ geeigneter Normen, welche die schwachen Ableit. berücksichtigen.

Def 2.6 Sobolev-Normen $\quad 0 \le p < \infty$

$$\|u\|_{m,p} := \Big(\sum_{|\alpha| \le m} \underbrace{\|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}}_{\text{Seminorm}} \Big)^{1/p}$$

Spezialfall: H_1-Norm

$$\|u\|_1 = \|u\|_{H_1} = \Big(\|v\|^2_{L_2} + \underbrace{\|\nabla v\|^2_{L_2}}_{} \Big)^{1/2}$$

Für $p = \infty$ $\|u\|_{m,\infty} := \max_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$ H_1-Seminorm

Def 2.7 Sobolev-Räume

~~Hier~~ Sei $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}_0$, $p \in [1, \infty]$

Annahme: es exist. alle schwachen Ableitungen
$D^\alpha u$ für $|\alpha| \le m$

Wir definieren die Sobolevräume

$$W^{m,p}(\Omega) := \{ u \in L^1_{loc}(\Omega) \mid \|u\|_{m,p} < \infty \}$$

Für $p = 2$ schreiben wir

$$H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$$

Am Wolfsmantel 33
91058 Erlangen

Telefon +49 9131 776-0
Fax +49 9131 776-2019

info@iis.fraunhofer.de
www.iis.fraunhofer.de

Satz 2.8 Vollständigkeit

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $W^{m,p}(\Omega)$ ist Banachraum,

d.h. insbesondere vollständig

Ohne Beweis

Lemma 2.9 $H^m(\Omega)$ ist Hilbertraum

mit SP $(v,w)_{H^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \le m} (D^\alpha v, D^\alpha w)_{L^2(\Omega)}$

Beweis: zur Übung

Satz 2.10 $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ ist dicht

in $W^{m,p}(\Omega)$.

D.h. $v \in W^{m,p}$ approximierbar durch
$\hat{v} \in C^\infty$

Bemerkung → Sobolevräume erben viele Eigenschaften "klassischer" Räume

Insbesondere übertragen sich Produkt-, Kettenregel auf schwache Ableit

Am Wolfsmantel 33
91058 Erlangen
Telefon +49 9131 776-0
Fax +49 9131 776-2019
info@iis.fraunhofer.de
www.iis.fraunhofer.de

Ebenso übertragen sich Satz von Gauss & partielle Integration.

Dirichlet-RB → Schränkt Auswahl der Lösungen ein

Wie geht das bei Sobolev-funktionen? Diese sind ja nur bis auf Nullmengen definiert & Rand ist Nullmenge?!...

Def. 2.11 Schwache Nullrandwerte

Sobolevräume mit 0-Randwert:

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{C_0^m(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^{m,p}(\Omega)}}$$

→ Abschluß des C_0^m → RW-Behandlung erben wir von Diffbaren Fkt.

Anmerk. $W_0^{m,p}$ sind ebenfalls Banachräume
H_0^m Hilberträume

Satz 2.12 Spursatz

Sei Ω lipschitz. $\exists$ linearer Spur-Op
$T: H^m(\Omega) \to H^{m-1/2}(\partial\Omega)$ $\{ \|u\|_{H^{1/2}} = \sqrt{\|u\|_2 + \|u\|_{H^1}}$
so dass für $u \in H^m(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ gilt

$$Tu = u|_{\partial\Omega}$$

→ insbesondere für $u \in H_0^m$ folgt $Tu = 0$

Weiter ist T surjektiv, d.h. $\forall v \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)\ \exists$ $u \in H^m(\Omega)$ mit $Tu = v$

Weiter haben wir auch wieder Dualräume der Sobolevräume

<u>Erinnerung</u> L^p-Räume

p, q so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 0$: $L^q = (L^p)'$

<u>Def 2.13</u> Dualräume $W^{-m,q}$

p, q wie bei L^p, dann ist

$W^{-m,q} = (W^{m,p})'$

Insbesondere ist H^{-m} Dualraum zu H^m wieder ein Hilbertraum

→ Damit können wir dann auch Rieszschen Darst.-Satz & Lax-Milgram verwenden...

<u>Satz 2.14</u> Sobolevsche Einbettungssätze

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ lipschitz Gebiet, $m_1 \geq m_2$, dann exist. <u>stetige</u> Einbettungen

a) $W^{m_1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m_2}(\bar{\Omega})$, falls $m_1 - \frac{d}{p} > m_2$

d.h. $W^{m_1,p} \subset C^{m_2}$ (wegen Stetigkeit)

b) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q$, $q \leq q^* = \frac{dp}{1-mp}$ falls $mp < d$
(kompakt für $q < q^*$)

und $W^{m_1,p} \hookrightarrow W^{m_2,q}$ falls $m_1 - \frac{d}{p} > m_2 - \frac{d}{q}$

Beweis: siehe z.B. Alt

Insbesondere: $H_0^1 \subset L^2 \subset H^{-1}$

Fraunhofer
IIS

Warum das alles?

Ziel: Suche von schwächeren Lösungen in $H^1(\Omega)$,
bzw. für Dirichlet-RW in $H_0^1(\Omega)$

Aber: Existieren solche Lösungen?
Sind sie eindeutig?

→ noch ein paar kleine Sätze nötig.

Am Wolfsmantel 33
91058 Erlangen

Telefon +49 9131 776-0
Fax +49 9131 776-2019

info@iis.fraunhofer.de
www.iis.fraunhofer.de

Fraunhofer
IIS

Erinnerung wichtige Ungleichungen:

a) Hölder-Ungleichung

$u \in L^p$ $v \in L^q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

dann gilt $\| uv \|_1 \leq \| u \|_p \| v \|_q$

b) Spezialfall $p = q = 2$ $\Rightarrow$ Cauchy-Schwarz

c) Youngsche Ungleichung

$a, b > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

dann gilt $ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$

Für $p = q = 2$, $\varepsilon > 0$

gilt insbesondere

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a + \frac{1}{\varepsilon 2} b$$

Am Wolfsmantel 33
91058 Erlangen

Telefon +49 9131 776-0
Fax +49 9131 776-2019

info@iis.fraunhofer.de
www.iis.fraunhofer.de