Fraunhofer
IIS

WH:

Def. Banachraum vollst. normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$

Hilbertraum, wenn $\|\cdot\|$ durch SP $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induziert

Dualraum Raum der linearen Funktionale $\varphi : V \to \mathbb{R}$

V: Banachraum

$$V^{*} := \{ \varphi : V \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ linear}, \underbrace{\|\varphi\|_{V^{*}} := \sup_{v \in V} \frac{|\varphi(v)|}{\|v\|}}_{\text{Dualraumnorm}} < \infty \}$$

→ Dualraum selbst wieder Banachraum

Bsp: $X = (\mathbb{R}^n$, eukl. Norm) Dualraum wieder der $\mathbb{R}^n$

– jedes Funktional $x' \in X'$ hat eindeutige Form

$$x'(x) = \sum_{j=1}^{n} a_i x_i = a \cdot x$$

→ So etwas wollen wir für alle Hilberträume können

Am Wolfsmantel 33
91058 Erlangen
Telefon +49 9131 776-0
Fax +49 9131 776-2019
info@iis.fraunhofer.de
www.iis.fraunhofer.de

Fraunhofer
IIS

2. Finite Elemente Verfahren | 2.1 Grundlage

ein wichtiger Hilfssatz.

Def 2.1 ein lineare Funktional $A: H \to \mathbb{R}$ heißt stetig, falls jede konvergente Folge $\{f_k\}$, $f_k \in H$ auf eine konvergente Folge $\{A(f_k)\}$ abgebildet wird.

Satz 2.2 ~~Jedes~~ Jedes lineare, beschränkte Funktional ist stetig

Beweis Sei A beschränkt, d.h. $\exists M \in [0, \infty)$ so dass $|A(f)| \leq M \|f\|_H \ \forall f \in H$

Betrachte Folge $f_k \to f$ $\Rightarrow |A(f_k) - A(f)| = |A(f_k - f)| \leq M \|f_k - f\|_H$

$\Rightarrow$ A stetig

Am Wolfsmantel 33
91058 Erlangen

Telefon +49 9131 776-0
Fax +49 9131 776-2019

info@iis.fraunhofer.de
www.iis.fraunhofer.de

Satz 2.3 Rieszscher Darstellungssatz

Sei H ein ~~...~~ reeller Hilbertraum, SP $(\cdot,\cdot)_H$ und $f \in H'$.

Dann $\exists$ genau ein $g \in H$, so dass

$$f(x) = (x, g)_H \quad \forall\, x \in H$$

Beweis

1. Existenz: Sei $f(x) \neq 0$, dann ist

$$H_k := \text{Kern}(f) := \{x \in H \mid f(x) = 0\} \subset H$$

Wähle

$$v \in H_k^\perp,\ v \neq 0 \qquad (\text{d.h. auch } f(v) \neq 0)$$

dann ist $x - \frac{f(x)}{f(v)} v \in H_K$, denn

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(v)} v\right) \underset{\text{Linearität}}{=} f(x) - \frac{f(x)}{\cancel{f(v)}} \cancel{f(v)} = 0$$

Dann ist aber auch

$$0 = \left(v, x - \frac{f(x)}{f(v)} v\right)_H = (v, x)_H - \frac{f(x)}{f(v)} \|v\|_H^2$$

Am Wolfsmantel 33
91058 Erlangen
Telefon +49 9131 776-0
Fax +49 9131 776-2019
info@iis.fraunhofer.de
www.iis.fraunhofer.de

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{f(v)}{\|v\|_H^2} (v, x)_H = \left(\frac{f(v)}{\|v\|_H^2} v , x \right)_H$$

mit $g = \frac{f(v)}{\|v\|_H^2} v \in H$

2. Eindeutigkeit: folgt aus Linearität

Annahme $\exists$ 2 Darstellungen g, g'

$$f(x) = (x, g) = (x, g') \Rightarrow (x, g - g') = 0$$

wähle $x = g - g'$

$$\Rightarrow (g - g', g - g')_H = \|g - g'\|_H = 0 \Rightarrow g = g' \quad \square$$

$Ax=b$

FD-Diskretisierung führte auf LGS, allgemeiner für Hilbert.V wäre das etwas der Art:

Gesucht ist $u \in V$, so dass

$$a(u,v) = \ell(v) \quad \forall\, v \in V \qquad (*)$$

mit ~~fl.~~ Funktional / Linearform / 1-Form $\ell : V \to \mathbb{R}$

Bilinearform / 2-Form $a : V \times V \to \mathbb{R}$

Weiter sei ℓ beschränkt ~~...~~ und a beschränkt

d.h.
$$\left.\begin{aligned} |a(v,w)| &\le \alpha \|v\|_V \|w\|_V \\ |\ell(v)| &\le \gamma \|v\|_V \end{aligned}\right\} \forall\, v,w \in V$$

[d.h. $\ell \in V'$!]

Existenz & Eindeutigkeit liefert

<u>Satz 2.4 (Lax-Milgram)</u>

Sei V reeller Hilbertraum, a, ℓ beschränkte Bi-/Linearform (wie oben) und a koerziv (stark V-elliptisch)

$$a(v,v) \ge \kappa \|v\|_V^2$$

Dann besitzt $(*)$ eine eindeutige Lösung $u \in V$

Am Wolfsmantel 33
91058 Erlangen
Telefon +49 9131 776-0
Fax +49 9131 776-2019
info@iis.fraunhofer.de
www.iis.fraunhofer.de

__Beweis__. Für feste $v \in V$ definiert $a(v,\cdot)$ ein lineares, stetiges, beschränktes Funktional auf V.

Nach Rieszschem Darstellungssatz $\exists\ Av \in V,\ f \in V$, so dass

$$\left.\begin{aligned} a(v,\varphi) &= (Av,\varphi)_V \\ \ell(\varphi) &= (f,\varphi)_V \end{aligned}\right\} \forall\ \varphi \in V$$

$v \mapsto Av$ lineare Abbildung mit Schranke

$$\|Av\|_V \leq \alpha \|v\|_V \quad \forall\ v \in V$$

(folgt aus Beschränktheit von a)

$\Rightarrow$ (*) ist äquivalent zu LGS

$$Au = f$$

__Idee:__ Existenz & Eindeutigkeit via FP-Iteration

z.z.: Abbildung $v \in V \mapsto T_\delta v := v - \delta(Av - f) \in V$ für geeignetes $\delta > 0$ Kontraktion auf V ist.
($\to$ Richardson-Iteration)

Dann besäße FP-Glg

$$T_\delta u = u$$

eine eindeutige Lösung $u \in V$ und wegen

$$0 = u - T_\delta u = \delta(Au - f)$$

auch eindeutige Lösung von (*)

Am Wolfsmantel 33
91058 Erlangen

Telefon +49 9131 776-0
Fax +49 9131 776-2019

info@iis.fraunhofer.de
www.iis.fraunhofer.de

Fraunhofer
IIS

Betrachte

$$\|T_\delta v\|_V^2 = \| v - \delta A v\|_V^2 = \|v\|_V^2 - 2\delta a(v,v) + \delta^2 \|Av\|_V^2$$

$$\leq \|v\|_V^2 - 2\delta\kappa \|v\|_V^2 + \delta^2 \|Av\|_V^2$$

(Koerzivität)

$$\leq \|v\|_V^2 - 2\delta\kappa \|v\|_V^2 + \delta^2 \alpha^2 \|v\|_V^2$$

(Beschr. von A)

$$= \underbrace{(1 - 2\delta\kappa + \delta^2\alpha^2)}_{\overset{!}{<} 1} \|v\|_V^2$$

$\Rightarrow$ Kontraktion für $0 < \delta < 2\frac{\kappa}{\alpha^2}$

$\square$

in $C^2(\Omega)$. Das ist sehr "viel verlangt".
Ziel: schwächere Anforderungen ...

Def 2.4 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, dann bezeichnet
$C_0^\infty(\Omega)$ alle Fkt in $C^\infty(\Omega)$ mit kompakten Träger
und $L^1_{loc}(\Omega)$ alle lokal integrierbaren Fkt

$$L^1_{loc}(\Omega) := \{ u \in L^1(K) \; \forall \; K \subset \Omega, K \text{ kompakt} \}$$

Def 2.5 Schwache Ableitung
Sei α Multiindex, $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.
Wenn

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi \, dx \quad \forall \varphi,$$

so nennen wir v die $|\alpha|$-te Schwache Ableitung von u

und schreiben $D^\alpha u = v$