1.4 Analyse einer Differenzenapproximation

Prototyp: elliptische PDGl 2. Ord.

$$Lu = -\sum_{i,j} a_{ij}\,\partial_i\partial_j u + cu = f$$

elliptisch falls $c \geq 0$, A spd

Wir nehmen an: $(A - a_0 \mathbb{1})$ spd

$\to$ EW $\lambda_i \geq a_0$ von unten beschränkt

Wir untersuchen 3 Eigenschaften:

Konsistenz, Stabilität, Verträglichkeit

Sei Ω_h die Punktmenge unseres FD-Gitters

$\partial\Omega_h$ die Randpunkte und $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \partial\Omega_h$.

Sei
$$L_h u_h(p) = f_h(p) \quad \forall\, p \in \Omega_h$$
$$u_h(p) = g_h(p) \quad \forall\, p \in \partial\Omega_h$$

ein diskretisiertes elliptisches RW-Problem 2. Ordnung.

i) Konsistenz

Def 1.7 Das Verfahren heißt konsistent, wenn für den Abschneidefehler

$$\tau_h(p) = L_h(p) - f_h(p), \quad p \in \Omega_h$$

gilt

$$\max_{p \in \Omega_h} |\tau_h(p)| \to 0 \quad \text{für } h \to 0$$

Für die Konsistenzordnung $m \geq 1$ gilt

$$\max |\tau_h(p)| = \mathcal{O}(h^m)$$

Anmerkung die Diskretisierung mittels 5-Punkt-Stern

hat Konsistenzordnung $m = 2$

(s.o. im Übung via Taylor)

WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

CELLS IN MOTION
Cluster of Excellence

ii) Stabilität Wir benötigen diskrete Stabilität, falls das kontinuierliche Problem schön stabil ist.

Satz 1.8 Stabilität

Sei L ein allgemeiner elliptischer Operator 2. Ord. und u Lösung von

$$Lu = f \text{ in } \Omega$$
$$u = g \text{ auf } \partial\Omega$$

Dann gilt die Stabilitätsabschätzung

$$\|u\|_\infty \leq C \max(\|f\|_\infty, \|g\|_\infty)$$

mit Konstante $C > 0$

Analog wollen wir eine Abschätzung der Art

$$\max_{p \in \bar{\Omega}_h} |u_h(p)| =: \|u_h\|_{\infty,\bar{\Omega}} \leq C \max\left(\|L_h u_h\|_{\infty,\Omega_h}, \|g_h\|_{\infty,\partial\Omega_h}\right)$$

iii) Verträglichkeit

L_h soll diskrete Analoga zu wichtigen Eigenschaften des kont. Op. L besitzen;
z.B. Symmetrie, Definitheit, Maximumprinzip, Erhaltungseigenschaften, etc.

Anmerkung:

Hauptteil ist eine Konvergenzanalyse.
Sie folgt i.d.R. aus Konsistenz & Stabilität.

Wir betrachten jetzt einige dieser Eigenschaften

Satz 1.9 (starkes) Maximumprinzip

Sei $Lu < 0$ (>0), L ellipt. Op. 2. Ordng.,
dann gilt $u \le 0$ (≥ 0)
oder u hat kein lokales Maximum (Minimum)
im Inneren von Ω (Anmerk.: $\Rightarrow$ Eindeutigkeit (Ül))

Beweis: Annahme $\exists$ ein Maximum von u in $\bar{x}$
mit $u(\bar{x}) > 0$
$\Rightarrow \nabla u(\bar{x}) = 0$ und Hessematrix negativ semidefinit
$H = (\partial_i \partial_j u)_{ij=1..d}$

$$\Rightarrow Lu(\bar{x}) \geq -\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\, \partial_i \partial_j u = A:(-H)$$

da $(-H)$ & A sym. pos. semidefinit

$\Rightarrow$ (mit Hilfssatz) $Lu(\bar{x}) \geq 0$ $\quad$ $\lightning$ zu $Lu < 0$

$\square$

__Lemma 1.10__ Seien $A, B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ sym. pos. semidefinit

Dann gilt $A:B = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij} \geq 0$

__Beweis:__ - B sym $\rightarrow$ Spektralzerlegung $B = \sum_k \lambda_k v_k v_k^T$

mit EV v_k, EW λ_k

- B pos. semi definit $\Rightarrow \lambda_k \geq 0$

$$\Rightarrow \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij} = \sum_{i,j} A_{ij} \underbrace{\lambda_k (v_k)_i (v_k)_j}_{B_{ij}}$$

$$= \sum_{i,j} \underset{\geq 0}{\lambda_k} \underbrace{v_k^T A v_k}_{\geq 0} \text{ (weil a pos semidefinit)}$$

≥ 0

$\square$

Jetzt wollen wir ein diskretes Analogon zum Max-Prinzip untersuchen...

Definition 1.11 M-Matrix

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt M-Matrix, wenn

i) $a_{ii} > 0 \quad \forall i$, ii) $a_{ij} \leq 0 \quad \forall i \neq j$

und iii) A regulär und $A^{-1} \geq 0$

Anmerkung: i.A. ist (iii) schwer zu untersuchen

$\rightarrow$ Erinnerung NumLA:

a) A regulär und $A^{-1} \geq 0$

$\Leftrightarrow a_{ii} > 0, (I-A) \geq 0, \rho(I-A) < 1,$
$(I-A)$ irreduzibel

und b) A diagonaldominant

$\Rightarrow \rho(I-A) < 1$

$\rightarrow$ aus $a_{ij} \leq 0 \quad \forall i \neq j$

$a_{ii} > 0$ und $a_{ii} > -\sum_{j\neq i} a_{ij}$

folgt A ist M-Matrix

Satz 1.12 Sei die Systemmatrix eine M-Matrix, dann genügt die Lösung von

$$Ax = b$$

einem diskreten Maximumsprinzip, d.h.

$$x \leq 0 \quad \text{falls} \quad b \leq 0$$

Beweis nur für A ... diagonaldominant

2 Schritte:

a) $x \leq 0$ falls $b < 0$

Annahme $x_j > 0$ Maximum von x

$$\Rightarrow A_{jj} x_j = b_j - \sum_{k \neq j} A_{jk} x_k \quad \text{(umstellen ...)}$$

$$< -\sum_{k \neq j} A_{jk} x_k \leq A_{jj} x_j \quad \text{(d. d.)}$$

$\Rightarrow$ ↯ da $A_{jj} \neq 0$

b) Betrachte $x^\varepsilon = A^{-1} b^\varepsilon$, $b_j^\varepsilon = b_j - \varepsilon < 0$, $b \leq 0$

$\overset{(a)}{\Rightarrow} x^\varepsilon \leq 0$

Für $\varepsilon \to 0$ gilt $x^\varepsilon \to x$

□