



1.4 Analyse einer Differenzapproximation

Prototyp: elliptische PDE 2. Ord.

$$Lu = -\sum_{i,j} a_{ij} \partial_i \partial_j u + cu = f$$

elliptisch falls $c \geq 0$, A spd

Wir nehmen an: $(A - a_0 \mathbb{1})$ spd

\rightarrow EW $\lambda_i \geq a_0$ von unten beschränkt

Wir untersuchen 3 Eigenschaften:

Konsistenz, Stabilität, Verträglichkeit

Sei Ω_h die Punktmenge unsere FD-Gitters

$\partial\Omega_h$ die Randpunkte und $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \partial\Omega_h$.

$$\text{Sei } L_h u_h(p) = f_h(p) \quad \forall p \in \Omega_h$$

$$u_h(p) = g_h(p) \quad \forall p \in \partial\Omega_h$$

ein diskretisiertes elliptisches RW-Problem 2. Ordnung.

○ i) Konsistenz

Def 1.7 Das Verfahren heißt konsistent, wenn für den Abschneidefehler

$$\tau_n(p) = L_n(p) - f_h(p), \quad p \in \Omega_n$$

gilt

$$\max_{p \in \Omega_n} |\tau_n(p)| \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0$$

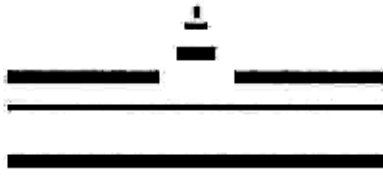
Für die Konsistenzordnung $m \geq 1$ gilt

$$\max |\tau_n(p)| = \mathcal{O}(h^m)$$

Anmerkung die Diskretisierung mittels 5-Punkt-Moden

hat Konsistenzordnung $m=2$

(4.ord. Übung via Taylor)



ii) Stabilität Wir benötigen diskrete Stabilität,
falls das kontinuierliche Problem schon stabil ist.

Satz 1.8 Stabilität

Sei L ein allgemeiner elliptischer Operator 2. Ord.
und u Lösung von

$$\begin{aligned} L u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

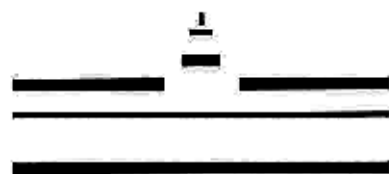
Dann gilt die Stabilitätsabschätzung

$$\|u\|_{\infty} \leq C \max(\|f\|_{\infty}, \|g\|_{\infty})$$

mit Konstante $C > 0$

○ Analog wollen wir eine Abschätzung der
Folgt

$$\max_{p \in \overline{\Omega}_h} |u_n(p)| = \|u_n\|_{\infty, \overline{\Omega}_h} \leq C \max(\|L_h u_n\|_{\infty, \Omega_h}, \|g_h\|_{\infty, \partial\Omega_h})$$



iii) Verträglichkeit

L_h soll diskrete Analoga zu wichtigen Eigenschaften des kont. Op. L besitzen;

z.B. Symmetrie, Definitheit, Maximumprinzip,

Anmerkung: Erhaltungseigenschaften, etc.

Hauptziel ist eine Konvergenzanalyse.

Dies folgt i.d.R. aus Konsistenz & Stabilität.

Wir betrachten jetzt einje oder Eigenwertaue

Satz 1.9 (starkes) Maximumprinzip

Sei $Lu < 0$ (> 0), L ellipt. Op. 2. Ordnung,

dann gilt $u \leq 0$ (≥ 0)

oder u hat kein lokales Maximum (Minimum)

im Inneren von Ω (Annahme: \rightarrow Eindeutigkeit (ii))

Beweis: Annahme \exists ein Maximum von u in $\bar{\Omega}$
mit $u(\bar{x}) > 0$

$\Rightarrow \nabla u(\bar{x}) = 0$ und Hessematrix negativ

$H = \left(\partial_{ij}^2 u \right)_{ij=1..d}$ semidefinit



$$\Rightarrow Lu(\bar{x}) \geq -\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \partial_i \partial_j u = A:(-H)$$

da $(-H)$ & A sym: pos. semidefinit

$$\Rightarrow (\text{mit Hilfsatz}) Lu(\bar{x}) \geq 0 \quad \begin{array}{l} \Leftarrow \text{zu } Lu < 0 \\ \Downarrow \end{array}$$

□

Lemma 1.10

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ sym pos. semidefinit

$$\text{Dann gilt } A:B = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij} \geq 0$$

Beweis: - B sym \rightarrow Spektralzerlegung $B = \sum_k \lambda_k v_k v_k^T$

mit EV v_k , EW λ_k

- B pos. semi definit $\Rightarrow \lambda_k \geq 0$

$$\Rightarrow \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij} = \sum_{i,j} A_{ij} \underbrace{\lambda_k (v_k)_i (v_k)_j}_{B_{ij}}$$

$$= \sum_{i,j} \lambda_k \underbrace{v_k^T A v_k}_{\geq 0}$$

≥ 0 (weil A pos semidefinit)

$$\geq 0$$

□



Jetzt wollen wir ein diskretes Analogon zum Max-Prinzip untersuchen...

Definition 1.11 M-Matrix

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt M-Matrix, wenn

i) $a_{ii} > 0 \quad \forall i$, ii) $a_{ij} \leq 0 \quad \forall i \neq j$

und iii) A regulär und $A^{-1} \geq 0$

Anmerkung: iA ist (iii) schwer zu untersuchen

→ Erinnerung Num $\rho(A)$:

a) A regulär und $A^{-1} \geq 0$

$\Leftrightarrow a_{ii} > 0, (I-A) \geq 0, \rho(I-A) < 1,$
 $(I-A)$ irreduzibel

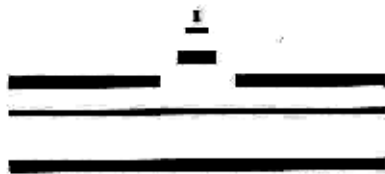
und b) A diagonaldominant

$\Rightarrow \rho(I-A) < 1$

→ aus $a_{ij} \leq 0 \quad \forall i \neq j$

$a_{ii} > 0$ und $a_{ii} > -\sum_{j \neq i} a_{ij}$

folgt A ist M-Matrix



Satz 1.12 Sei die Systemmatrix eine M -Matrix,
dann genügt die Lösung von

$$Ax = b$$

einem diskreten Maximumsprinzip, d.h.
 $x \leq 0$ falls $b \leq 0$

Beweis nur für A diagonal dominant

2 Schritte:

a) $x \leq 0$ falls $b \leq 0$

Annahme $x_j > 0$ Maximum von x

$$\Rightarrow A_{jj}x_j = b_j - \sum_{k \neq j} A_{jk}x_k \quad (\text{umstellen...})$$

$$\Leftrightarrow - \sum_{k \neq j} A_{jk}x_k \leq A_{jj}x_j \quad (\text{d. d.})$$

$$\Rightarrow \swarrow \text{da } A_{jj} \neq 0$$

b) Betrachte $x^\varepsilon = A^{-1}b^\varepsilon$, $b_j^\varepsilon = b_j - \varepsilon < 0$, $b \leq 0$
 $\stackrel{a)}{\Rightarrow} x^\varepsilon \leq 0$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ gilt $x^\varepsilon \rightarrow x$

□