Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Cells in Motion
Cluster of Excellence

1. ~~Theorie partieller Differentialgleichungen~~

Wir betrachten (zunächst) lineare partielle Diffglg.
2. Ordnung (d.h. Terme bis zur 2. Ableitung)

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\,\partial_i \partial_j u + \sum_{j=1}^{d} b_j\,\partial_j u + gu = f \qquad (1.1)$$

[Anmerkung: • der Operator L hängt nicht von u ab → linear

• $a_{ij} = a_{ji}$ wegen Vertauschbarkeit der Ableitung

Wir betrachten im weiteren pDGlen auf beschränkten Gebieten

$$\Omega \subset \mathbb{R}^d,$$

dann sind zusätzlich Bedingungen auf dem Rand $\partial\Omega$ nötig.

Damit eine pDGl + RB ein "sinnvolles" Modell ist, stellen wir eine Reihe von Forderungen]

Matrix-Schreibweise für konst. Koeffizienten

$$(\nabla^T A \nabla)u + (b^T \nabla)u + gu = f$$

mit symmetr. Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1\dots d}$

Def 1.1 Wohlgestelltheit (im Sinne von Hadamard)

Ein Problem nennt man "wohlgestellt", wenn es folgenden Forderungen genügt:

i) Existenz von Lösungen
(möglicherweise in einem verallgemeinerten Sinne)

ii) Eindeutigkeit der Lösung

iii) Stetige Abhängigkeit der Lösung von Daten

→ insbesondere sollen kleine Fehler in Parametern oder Anfangsdaten nur kleine Fehler der Lösung nach sich ziehen

→ Fragen:

1) ist $\partial_x u = \sin(x)$ auf $\mathbb{R}$ wohlgestellt?

☐ Ja ☐ Nein

2) ist $\partial_t u = u$ auf $\mathbb{R}^+$
$u(0) = 1$ wohlgestellt?

☐ Ja ☐ Nein

1.1 Typeinteilung

Drei Haupttypen, welche sich sehr unterschiedlich verhalten & unterschiedlich analysiert werden:

elliptisch, parabolisch, hyperbolisch

Wir betrachten (1.1) in 2 Variablen (d.h. $u \in \mathbb{R}^2$)

$$Lu := a_{11}\partial_x^2 u + 2a_{12}\partial_x\partial_y u + a_{22}\partial_y^2 u$$
$$+ a_1 \partial_x u + a_2 \partial_y u + a u = f$$

<u>Lösungsansatz:</u> (analog zu AWA)

Sei Γ Kurvenstück in Ω, $\Gamma = \{(x(\tau), y(\tau)), \tau \in [0,1]\}$, Parametrisierung bel. oft diffbar.

<u>Idee:</u> u in Umgebung von Γ via Taylorreihe

Gegeben sei u, $\partial_n u$ auf Γ (∂_n: Normalenableit.)

~~Dadurch~~ gegeben.

a) damit ist unmittelbar ∇u auf Γ bekannt, da wir $\partial_\tau u$ kennen (berechnen können)

b) können wir alle anderen Ableitungen rekonstruieren?

d.h. $\partial_x^2 u$, $\partial_{xy} u$, $\partial_y^2 u$

Abkürzungen:

$p := \partial_x u \quad , \quad q := \partial_y u \qquad$ (bekannt)

$r := \partial_x^2 u \quad , \quad s := \partial_x \partial_y u \quad , \quad t := \partial_y^2 u \qquad$ (unbekannt)

Ableiten von p, q nach τ & $Lu = f$ liefert GLS.

tangentiale Ableitungen (ebenfalls berechenbar)

$$\partial_\tau p = \partial_x p \, \partial_\tau x + \partial_y p \, \partial_\tau y = r \partial_\tau x + s \partial_\tau y$$
$$\partial_\tau q = \partial_x q \, \partial_\tau x + \partial_y q \, \partial_\tau y = s \partial_\tau x + t \partial_\tau y$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} a_{11} r + 2a_{12} s + a_{22} t &=& f - a_1 p - a_2 q - a u \\ \partial_\tau x \, r + \partial_\tau y \, s \qquad\qquad &=& \partial_\tau p \\ \partial_\tau x \, s + \partial_\tau y \, t &=& \partial_\tau q \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad B \cdot (r, s, t)^T = g$$

Wir untersuchen Lösbarkeit anhand

$$\det B = a_{11} (\partial_\tau y)^2 - 2 a_{12} \partial_\tau x \, \partial_\tau y + a_{22} (\partial_\tau x)^2$$

2 Fälle:

i) $\det B \neq 0$ entlang ganz Γ

$\Rightarrow$ 2. Ableitung komplett bestimmbar

höhere Ableitungen durch gleiche Konstruktion

$$\Rightarrow u(x,y) = \sum_{i+j \geq 0} \frac{(x-x_0)^i (y-y_0)^j}{(i+j)!} \partial_x^i \partial_y^j u(x_0, y_0)$$

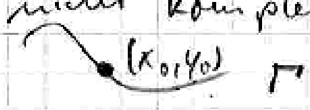
bzgl. (x_0, y_0) auf Γ erlaubt Rekonstruktion in Umgebung von Γ

ii) $\det B = 0$ in <u>einem</u> Punkt $(x_0, y_0) \in \Gamma$

$$q(\partial_\tau y, \partial_\tau x) := a_{11}(\partial_\tau y)^2 - 2a_{12}\,\partial_\tau x\,\partial_\tau y + a_{22}(\partial_\tau x)^2 = 0$$

beschreibt Kurve durch (x_0, y_0).

Entlang dieser kritischen Kurven (Charakteristiken) lässt sich die Lös. nicht komplett aus den Vorgaben konstruieren:



z.B. können Unstetigkeiten auftreten...

Existenz von Lösungen & Charakteristiken hängt an Koeff. der höchsten Ableitungen ("Hauptteil")

$q(v, w) = 0$ beschreibt Kegelschnitt der (v, w)-Ebene.

<u>3 Fälle:</u>

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \begin{cases} < 0 & : \text{Ellipse} \\ = 0 & : \text{Parabel} \\ > 0 & : \text{Hyperbel} \end{cases}$$

→ 3 Grundtypen von PDEs

elliptisch, parabolisch, hyperbolisch

Anmerkung 1.2 Verallgemeinerung

Betrachten wir ~~in 2D~~ die Matrixschreibweise, so ~~erh~~ können wir A diagonalisieren und erhalten die PDE in Diagonalform

$$(\tilde{\nabla}^T D \tilde{\nabla})\tilde{u} + (\tilde{b}^T S \tilde{\nabla})\tilde{u} + \tilde{g}\tilde{u} = \tilde{f}$$

mit $D = S^T A S$, S Basis-Wechsel-Matrix

D Diagonalmatrix, $S_{ij} = \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}$ (Koord.-Wechsel)

und transformierten Größen: $x = S\tilde{x}$

$$\tilde{u}(\tilde{x}) = u(S\tilde{x}) = u(x), \quad \tilde{b}(\tilde{x}) = b(S\tilde{x}), \text{ etc.}$$

In 2D erhalten wir die Diagonalform

$$\lambda_1 \partial^2_{\tilde{x}} \tilde{u} + \lambda_2 \partial^2_{\tilde{y}} \tilde{u} + \tilde{\beta}_1 \partial_{\tilde{x}} \tilde{u} + \tilde{\beta}_2 \partial_{\tilde{y}} \tilde{u} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g}$$

mit $\tilde{\beta} = S^T \tilde{b}$

In Diagonalform sind die Koeff des Hauptterms gerade die Eigenwerte von A

d.h. Lösbarkeit hängt ab von $\det \tilde{B} = \lambda_1 \lambda_2$

Verallgemeinern wir dies auf $\mathbb{R}^d$ erhalten wir $\det \tilde{B} = \prod_d \lambda_d$, damit folgt

Def 1.3 Typeinteilung pDGlen 2. Ordnung

Sei A Koeffmatrix der 2. Ableitungen. Die PDGl heißt ...

elliptisch: A positiv / negativ definit (alle EW gleiches VZ)

parabolisch: A pos. / neg. semidefinit mit mind. einem 0-EW

hyperbolisch: ein EW anderes VZ
$d-1$ EW gleiches VZ

1.3 Herleitung der Typen (aus grundlegenden physikalischen Prinzipien)