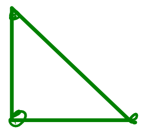
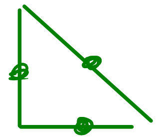
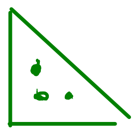
2.9 dG-Verfahren

Lagrange  Crouzeix-Raviart 

und was ist mit  ?

$\longrightarrow$ unstetige Ansatzräume

$\longrightarrow$ unstetige Galerkin Verfahren

"discontinuous Galerkin" (dG)

Definition 2.X Broken Sobolevspace

Sei $\mathcal{T}_h(\Omega)$ gegeben.

$$H^m(\mathcal{T}_h) := \{ v \in L^2(\Omega) \mid v|_E \in H^m(E),\ E \in \mathcal{T}_h \}$$

Anmerkung $H^1(\mathcal{T}_h) \supset H^1(\Omega) \supset V_h$

Wir führen diskrete Unterräume aus stückweisen Polynomen ein

$$V_h^{dc} := \{ v \in L^2(\Omega) \mid v|_E \in P^k,\ E \in \mathcal{T}_h \},$$

analog zu den Lagrangeräumen V_h und Crouzeix-Raviart V_h^{nc}

Def 2.X Skelette

Gegeben $\mathcal{T}_h(\Omega)$, dann ist das

<u>innere Skelett</u>

$$\Gamma_{int} := \{\gamma = \partial E \cap \partial F \mid E, F \subset \mathcal{T}_h,\ E \neq F,\ |\gamma| > 0\}$$

wobei $|\gamma|$ das codimension-1 Volumen bezeichnet

(bzw. d-1 dimensionale Hausdorff-Maß)

<u>externes Skelett</u>

$$\Gamma_{ext} := \{\gamma = \partial E \cap \partial \Omega \mid E \in \mathcal{T}_h,\ |\gamma| > 0\}$$

<u>Skelett</u>

$$\Gamma := \Gamma_{int} \cup \Gamma_{ext}$$

Definition 2.X Sprung & Mittelwert

Gegeben zwei Elementen E, F, dann definieren wir auf der Kante $\gamma = \partial E \cap \partial F$

<u>Sprung</u>: $[\![x]\!] := x|_E\, n_E + x|_F\, n_F$

mit den äußeren Normalen n_E, n_F

<u>Mittelwert</u>: $\{x\} := \frac{1}{2}\left(x|_E + x|_F\right)$

Für Randkanten $\gamma = \partial E \cap \partial \Omega$ definieren wir

$[\![x]\!] := x\, n_\Omega$ und $\{x\} := x$

<u>Anmerkung</u> Sprung & Mittelwert erfüllen die Relation

$$[\![xy]\!] = [\![x]\!]\{y\} + [\![y]\!]\{x\}$$

2.9.1 Schwache Formulierung

starkes Problem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \qquad (*.1)$$
$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \qquad (*.2)$$

sei $u \in H^2$, $V := H^1(\mathcal{T}_h)$

$$(*.1) \Rightarrow -\int_\Omega \Delta u \, v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \qquad \forall v \in V$$

$$\underline{LHS} = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} -\int_E \Delta u \, v \, dx$$

$$\underset{PI}{=} \sum_E \int_E \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \underbrace{\int_{\partial E} \nabla u \cdot n \, v \, ds}_{\text{auf jeder Kante } 2x}$$

$$= \sum_E \int_E \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_\gamma [\![\nabla u \, v]\!] \, ds$$

$$= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Gamma [\![\nabla u]\!] \{ v \} + [\![v]\!] \{ \nabla u \} \, ds$$

$\nabla u \cdot n$ beschreibt Fluß, der soll (physikalisch!) stetig sein $\Rightarrow [\![\nabla u]\!] \overset{!}{=} 0$

$$= \boxed{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Gamma [\![v]\!] \{ \nabla u \} \, ds}$$

dieser Operator wäre konsistent, aber nicht symmetrisch.

Addiere $-\int_\Gamma [\![u]\!] \{ \nabla v \} \, ds$ (oder $\underset{=}{+} \int_\Gamma [\![u]\!] \{ \nabla v \} \, ds$ $\rightarrow$ antisymmetrisch)

$$\Rightarrow a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx - \int_\Gamma [\![v]\!] \{\nabla u\} \, ds - \int_\Gamma [\![u]\!] \{\nabla v\} \, ds$$

$a(u,v)$ ist nich koerziv, wegen negativen Termen.

$\Rightarrow$ weiterer Kanten-Term nötig um Koerzivität zu garantieren:

$$J(u,v) := \frac{\eta}{h} \int_\Gamma [\![u]\!] [\![v]\!] \, ds, \quad \eta \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\text{$a(u,v) + J(u,v)$ ist koerziv für $\eta > 0$ ausreichend groß}}$$

$\rightarrow$ Details am Montag.

Def Interior-Penalty-Formulierung

Finde $u \in V_h^{dc}$, so dass

$$a(u,v) + J(u,v) = (f,v)_{L^2} \quad \forall v \in V_h^{dc}$$

mit $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Gamma [\![v]\!] \{\nabla u\} \, ds + \alpha \int_\Gamma [\![u]\!] \{\nabla v\} \, ds$

$$J(u,v) = \frac{\eta}{h} \int_\Gamma [\![u]\!] [\![v]\!] \, ds$$

$\longrightarrow$

	SIPG	IPG	NIPG	OBB
α	-1	0	1	1
η	>0	>0	≥ 0	$=0$