

2.7 Praktische Aspekte

- Wir hatten bisher Unbekannte mit Knoten des Gitters assoziiert
 - Lagrange - Ansätze 1. Ordnung
(P^2 / Q^4)
 - Höhere Ordnung Ansätze erfordern Daten an beliebigen Enditäten
 - Oder Modell Daten
 - z. B. - Diffusionskoeff. pro Zelle
 - Messwerte an Knoten
 - Geschw. auf Kanten
 - ...
- Wir benötigen Indexmengen für beliebige Kombinationen von Geometrietypen.

Verallgemeinerungen von 2.24

Definition 2.50 Index-Abbildung

Für alle Entitäten E_g^c eines Gitters mit gleichem Geometrietyp definieren wir eine Indexmenge

$$I_g^c: E_g^c \rightarrow \mathbb{N}_0$$

d.h. einzelne Indexmengen für Knoten, Kanten, Dreiecke, Vierecke, Tetraeder, Prismen, Würfel, etc.

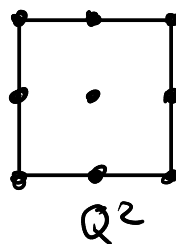
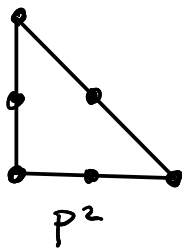
Anwendung Nummerierung der globalen Basis

Aus den einzelnen Indexmengen lassen sich Indizes für die Koeffizienten der globalen Basis definieren.

Beispiel: gemischtes Gitter mit Dreiecken & Vierecken

Lagrangebasis 2. Ordnung.

D.h.

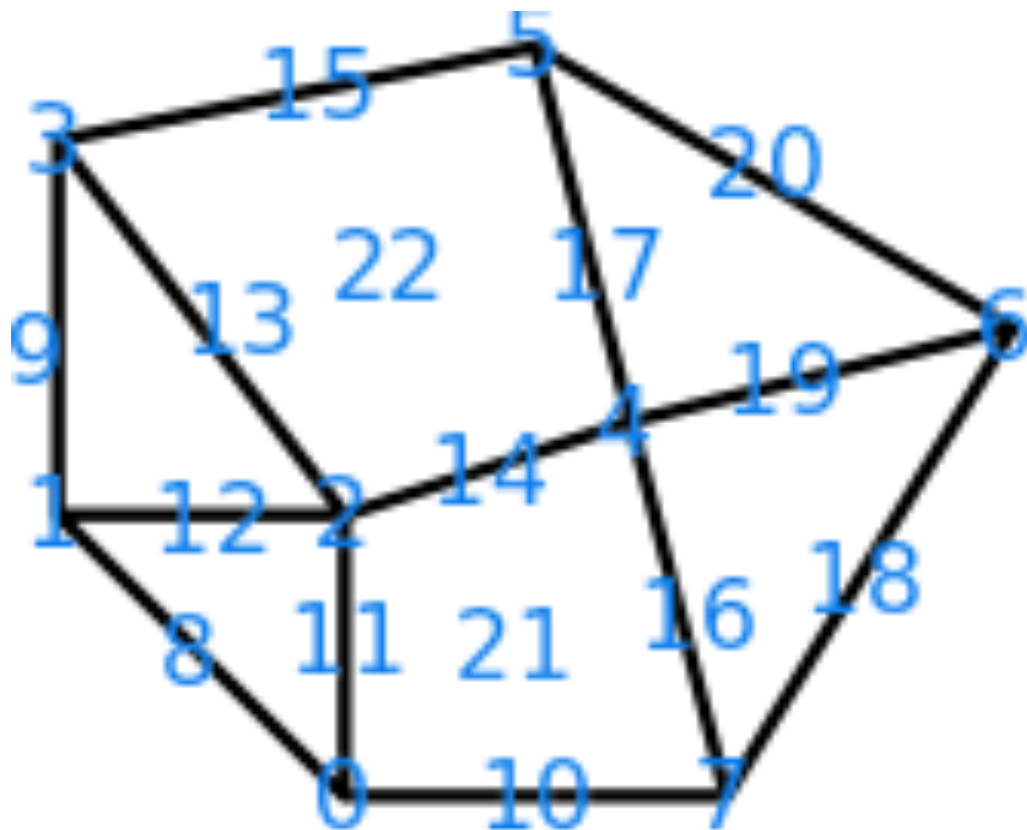
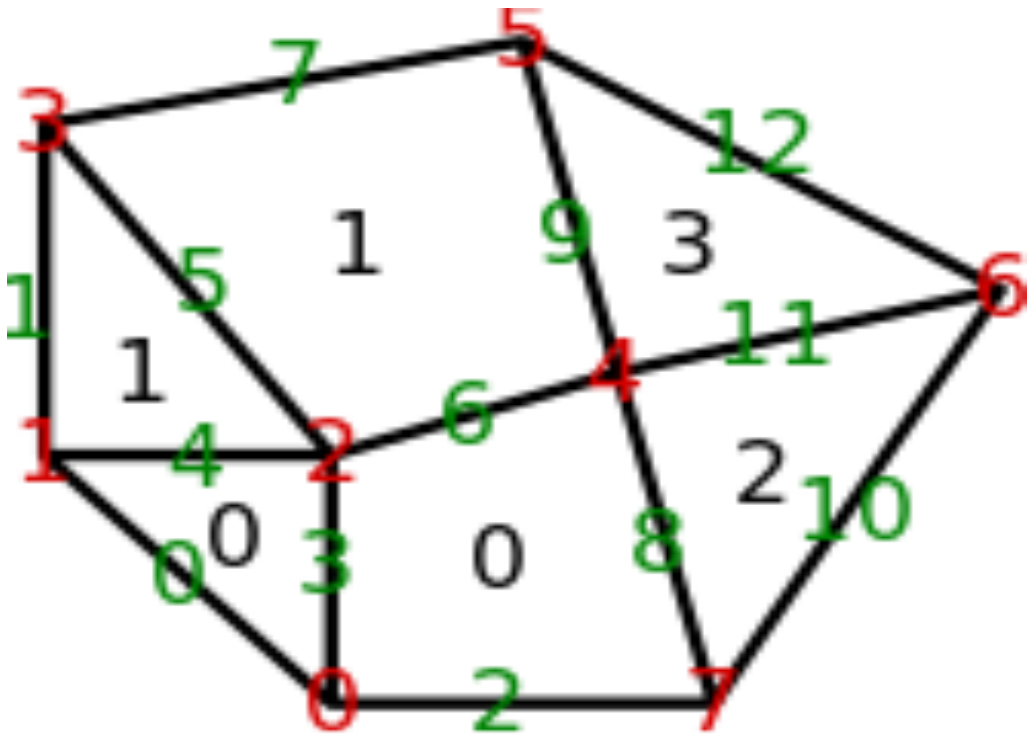


DOFs (Degrees of Freedom / Freiheitsgrade):

Knoten	Kante	Dreieck	Viereck
1	1	0	1

DOF-index: $I: \mathcal{E}^0 \cup \mathcal{E}^1 \cup \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$

$$I(e) = \begin{cases} I_0(e) & : e \in \mathcal{E}^0 \\ I_1(e) + |\mathcal{E}^0| & : e \in \mathcal{E}^1 \\ I_2(e) + |\mathcal{E}^0| + |\mathcal{E}^1| & : e \in \mathcal{E}^2 \end{cases}$$



Aber jetzt haben wir Unbekannte auf dem Rand. Meist suchen wir $u_h \in V_h \subset H_0^1$!
 \longrightarrow wie behandeln wir in dem Kontext Dirichletknoten?

2.7.1 Dirichletrandwerte

Indexmenge $I: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{N}_0$, $|I| = N$

Randfreiheitsgrade: $I_B \subset I$, $|I_B| = \gamma$

Betrachten Raum mit & ohne "Dirichletknoten"

$$\tilde{V}_h \subset H^1(\Omega), \quad V_h = \{v \in \tilde{V}_h \mid v|_{\partial\Omega} = 0\} \subset H_0^1$$

$$\Rightarrow \tilde{A} = \sum_E P_E^T A_E P_E : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$$

die Darstellung der Bilinearform auf \tilde{V}_h

Wir können eine Restriktionsmatrix aufstellen

$$R: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N-\gamma}$$

welche die Indices $i \in I_B$ eliminiert, damit erhalten wir

$$A = R \tilde{A} R^T : \mathbb{R}^{N-\gamma} \rightarrow \mathbb{R}^{N-\gamma}$$

die Darstellung der Bilinearform auf V_h

Probleme:

- das "Triple-Matrix-Produkt" $R \tilde{A} R^T$ ist teuer
- wir benötigen eine neue Indexmenge um R aufzustellen
- wir ändern das Besetzungsmuster

Alternative wir arbeiten immer auf \mathbb{R}^N , aber wir ändern die Gleichungen für Randfreiheitsgrade. Im starken Problem heißt es

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

D.h.

$$A_{ij} = \tilde{A}_{ij} \quad \forall i, j \notin I_B$$

$$A_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{falls } i \in I_B \vee j \in I_B$$

Das entspricht dem "Löschen" von Zeilen & Spalten, wie bei $R \tilde{A} R^T$, aber die Zeilen werden durch eine triviale Gleichung ersetzt:

$$u_i = u_i \quad \forall i \in I_B$$

→ erfordert passende rechte Seite

$$b_i = 0 \quad \forall i \in I_B$$

Anmerkung

- Eigentlich reicht es die Zeilen zu eliminieren, die Kopplungen

$$A_{ij}, i, j \in I_B$$

stören nicht, da $u_j = 0$, sodass $A_{ij} u_j = 0$ ist aber ?! → Frage Problem?

welche Eigenschaften gehen uns verloren?

→ keine Symmetrie mehr.

→ Voraussetzungen für CG verletzt

Satz 2.51 Auch bei reiner Zeileneliminierung

von Pivotknoten ist das CG Verfahren anwendbar.

Beweisidee CG operiert auf symmetrischer

Untermatrix $R \tilde{A} R^T$

2.7.2 Neumann - Randwerte

Wir betrachten

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ \partial_n u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

→ Schwache Form:

$$\int_{\Omega} -\Delta u \, v \, dx = \int_{\Omega} f \, v \, dx$$

$$\stackrel{\text{PI}}{\Rightarrow} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \underbrace{\partial_n u}_{=0} v \, ds = \int_{\Omega} f \, v \, dx$$

$\stackrel{\text{RB}}{\Rightarrow}$ Finde $u \in H^1(\Omega)$ so dass

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

aber nicht ~~eindeutig~~ lösbar

→ Nebenbedingung

$$\int_{\Omega} u \, dx = 0$$

„

$$(u, 1)$$

$$f \in (H^1)^{\perp}, \quad 1 \text{ Repr. in } H^1(\Omega)$$

Zusätzliche Bedingung

$$= (u, 1) = 0 \iff Cx = 0, C \in \mathbb{R}^{1 \times N}$$

Mehrere Ansätze:

a) modifizierte Systemmatrix

$$Ax = b$$

↓

$$\begin{pmatrix} A & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Blockmatrix})$$

"Sattelpunktsystem"

(Herleitung über Lagrange-Multiplikatoren als Übung)

b) λ^{-1} entspricht dem Mittelwert der Lösung, der eigentlich 0 sein soll

\Rightarrow Ansatz für iteratives Lösungsverfahren

$$Ax = b - C^T \lambda$$

z.B. Richardson Iteration

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega \underbrace{(b - Ax^{(k)})}_{\delta^{(k)}}$$

Modifikation:

$$\delta^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

$$\lambda^{(k)} = C \delta^{(k)}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega \left(\delta^{(k)} - C^T \frac{1}{\lambda^{(k)}} \right)$$

D.h. die Updates werden in jeder
Iteration in den Unterraum mit
 $\{u\} = 0$ zurück projiziert.

→ unmittelbar erweiterbar auf
andere iterative Löser & Vorbedingungen

Anmerkung Wie im Fall von Fixpunktdaten

können wir auch zeigen, dass
das CG Verfahren (bzw. alle Krylovraum-
Verfahren) bei geeigneten Startwerten
im Unterraum bleiben.

D.h. wir starten mit $x^{(0)}$, so dass

$\|x^{(0)}\| = 0$ und erhalten G's auf

Rundungsfehler eine Lösung mit

$\|x\| = 0$.