2.6 Fehlerabschätzungen

Mit Hilfe des Interpolationsfehlers & des Lemmas von Cea können wir nun eine a-priori Abschätzung des Diskretisierungsfehlers herleiten.

Satz 2.46 A-priori Fehlerabschätzung

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$, lipschitz, quasi-uniformes Gitter $\mathcal{T}_h(\Omega)$

$f \in L^2(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$ Lösung des homogenen Poissonproblems mit Dirichlet-RB

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f v \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$u_h \in V_h$, V_h Lagrangeansatzraum Ordnung $\underline{\underline{k}}$, Lösung von

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h = \int_\Omega f v_h \qquad \forall v_h \in V_h .$$

Sei $u \in H^{s+1}(\Omega)$, $1 \le s \le k$, so gilt

$$\|u - u_h\|_{H^1} \le c h^s |u|_{H^{s+1}}$$

mit Konstante $c(d, k, s, \Omega, \sigma)$.

Erinnerung Céa: α Stetigkeits-, κ Koerzivitätskonstante

Beweis mittels des Lemmas von Céa (2.21).
Danach gilt die Fehlerabschätzung

$$\|u-u_h\|_V \le \frac{\alpha}{\kappa} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

mit $V_h \subset V$.
Wir wählen $V = H_0^1(\Omega)$, V_h Lagrange-Ansätze von Ordnung k. Sei I_h die Lagrange-Interpolation

$$\Rightarrow \quad \|u-u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{\alpha}{\kappa} \|u - I_h u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

mit I-P Abschätzung 2.43 folgt

$$\|u-u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \le c \frac{\alpha}{\kappa} \sigma h^{s+1-1} |u|_{H^{s+1}(\Omega)}$$

$\square$

Bemerkungen

a) Ist der Gebietsrand glatt ($\partial\Omega \in C^2$) oder konvex und Lipschitz, sagt der Satz von Friedrichs, dass $u \in H^2(\Omega)$ für $f \in L^2(\Omega)$.
D.h. für $f \in L^2$ konvergiert der Fehler in der H^1-Norm wie $O(h)$

b) Auch in der L^2-Norm (H^0-Norm) erhalten wir

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq c h^s |u|_{H^{s+1}},$$

aber der IP-Fehler ist

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq c h^{s+1} |u|_{H^{s+1}}$$

Können wir diese bessere Ordnung auf die Lösung übertragen?

Satz 2.47 Lemma von Aubin-Nitsche

Sei H ein Hilbertraum mit Norm $\|\cdot\|_H$ & zugehörigen Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$. Sei $V \subset H$, der mit $\|\cdot\|_V$ ein Hilbertraum wird und

$$V \hookrightarrow H \text{ stetig eingebettet.}$$

Dann gilt die FE-Lösung $u_h \in V_h \subset V$

$$\|u-u_h\|_H \leq C \|u-u_h\|_V \sup_{\substack{g \in H \\ g \neq 0}} \left\{ \frac{1}{\|g\|_H} \inf_{v \in V_h} \|\varphi_g - v\|_V \right\}$$

wenn jedem $g \in H$ die eindeut. schwache Lösung $\varphi_g \in V$ mit

$$a(w, \varphi_g) = (g, w) \ \forall w \in V$$

zugeordnet wird.

<u>Beweis</u> Wir betrachten für $w \in H$

$$\|w\|_H = \sup_{g \in H, g \neq 0} \frac{(g,w)}{\|g\|_H}$$

die alternative Darstellung der Norm von w.

Für u, u_h gilt

$$a(u,v) = (f,v) \quad \forall\, v \in V$$

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall\, v_h \in V_h$$

$$\Rightarrow \quad a(u-u_h, v_h) = 0 \qquad \forall\, v_h \in V_h$$

Für das SP in (*) wählen wir $w = u - u_h$

$$\Rightarrow \quad (g, u-u_h) = a(u-u_h, \varphi_g) \underset{\text{0 addieren}}{=} a(u-u_h, \varphi_g - v)$$

$$\underset{\text{Beschränktheit/Stetigkeit von a}}{\leq} \alpha \|u-u_h\|_H \|\varphi_g - v\|_V$$

$\Rightarrow$ für die Norm

$$\|u-u_h\|_H = \sup_{g \in H, g \neq 0} \frac{(g, u-u_h)_H}{\|g\|_H}$$

$$\leq \alpha \|u-u_h\|_V \sup_{\substack{g \in H \\ g \neq 0}} \left\{ \inf_{v \in V_h} \frac{\|\varphi_g - v\|_V}{\|g\|_H} \right\}$$

$\square$

Korollar 2.48 Sei $T_h(\Omega)$ ein quasiuniformes Dreiecksgitter.
Sei $u \in H^1(\Omega)$ Lösung des Variationsproblems, dann gilt

$$\|u-u_h\|_{L^2} \leq c\,\alpha\, h\, \|u-u_h\|_{H^1}$$

mit α der Stetigkeitskonstanten und c aus der A-priori Abschätzung 2.46

Gilt $f \in L^2$, so ist $u \in H^2$ und somit gilt

$$\|u-u_h\|_{L^2} \leq c\,\alpha\, h^2 \|f\|_{L^2}$$

Beweis:

Wähle
$$H := L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$$
$$V := H_0^1(\Omega)$$

Damit ist H der Abschluß von C_0^∞ in der L_2 Norm und $H = \overline{V}$. Wegen $\|\cdot\|_{L^2} \leq \|\cdot\|_{H^1}$ ist die Einbettung stetig & wir können Aubin-Nitsche anwenden.

$$\|u-u_h\|_{L^2} \underset{\text{Aubin-Nitsche}}{\leq} \alpha \|u-u_h\|_{H^1} \sup_{\substack{g \in L^2(\Omega) \\ g \neq 0}} \left\{ \inf_{v_h \in V_h} \frac{\|\varphi_g - v_h\|_{H^1}}{\|g\|_{L^2}} \right\}$$

$$\underset{\text{A-priori Abschn.}}{\leq} \alpha \|u-u_h\|_{H_1} \sup_{g \in L^2} \left\{ \frac{1}{\|g\|_{L^2}}\, c\, h\, |\varphi_g|_{H^2} \right\}$$

$$\underset{\text{Friedrich}}{\leq} \alpha \|u-u_h\|_{H^1}\, c\, h\, c_F$$

Analog erhalten wir $c h^2$ für $u \in H^2(\Omega)$. □