Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christian Engwer, Nils-Arne Dreier 17.10.2018

Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen I

WiSe 2018/2019 — Blatt 0

Abgabe: Präsenz-Aufgaben zur Bearbeitung in den Übungsgruppen am 17./18. Oktober, keine Abgabe

Aufgabe 1 (Experimentelle Konvergenzordnung) (0 Punkte)

In vielen Fällen kann die asymptotische Konvergenzordnung eines Differenzenverfahrens nur experimentell bestimmt werden. Dazu werden bei bekannter, exakter Lösung für zwei Schrittweiten h und $\frac{h}{2}$ die Fehler $e_h := u - u_h$ und $e_{\frac{h}{2}} := u - u_{\frac{h}{2}}$ berechnet und dann die Ordnung α über den formalen Ansatz $\|u - u_h\|_h = h^\alpha$ mit einer geeigneten Gitter-Norm $\|\cdot\|_h$ aus der folgenden Formel ermittelt:

$$\alpha = \frac{\log(\|e_h\|_h / \|e_{\frac{h}{2}}\|_h)}{\log(2)}$$

(a) Man rechtfertige diese Formel und überlege, wie man vorgehen kann, wenn keine exakte Lösung u bekannt ist.

(b) Man bestimme die inhärenten Konvergenzordnungen der folgenden Zahlenfolgen:

	a_h	b_h
$h = 2^{-1}$	33.627	26.570
$h = 2^{-2}$	30.318	27.008
$h = 2^{-3}$	29.100	27.883
$h = 2^{-4}$	28.586	28.072
$h = 2^{-5}$	28.351	28.117

Aufgabe 2 (Eindeutigkeit der Lösung des Poisson-Problems) (0 Punkte)

Auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}$ mit glattem Rand $\partial\Omega$ werden die folgenden Randwertaufgaben betrachtet:

(a) $-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad u = g \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$

(b) $-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad \partial_n u = g \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$

Untersuchen Sie die Probleme bzgl. der Eindeutigkeit von Lösungen.

Aufgabe 3 (M-Matrix) (0 Punkte)

(a) Man zeige, dass M-Matrizen *invers-monoton* sind, d.h.: Für Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^N$ und M-Matrix $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ gilt komponentenweise:

$$Av \geq Aw \qquad \Longrightarrow \qquad v \geq w. \tag{1}$$

Das 5-Punkte-Differenzenschema zur Approximation der 1. RWA des Laplace-Operators führt auf eine M-Matrix A_h.

(b) Ist ferner $A_h w \geq (1, \dots, 1)^T$ für einen Vektor $w \in \mathbb{R}^N$, so folgt bzgl. der Maximumsnorm bzw. Maximalen-Zeilensummen-Norm:

$$\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \|w\|_\infty \tag{2}$$

(c) Man zeige mit der Hilfe von (b), dass für die Systemmatrix A_h des 5-Punkte-Schemas auf dem Einheitsquadrat die Abschätzung

$$\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8} \tag{3}$$

gilt, und folgere hiermit für die l_∞-Kondition von A_h:

$$\mathrm{cond}_\infty(A_h) := \|A_h\|_\infty \|A_h^{-1}\|_\infty \leq h^{-2}. \tag{4}$$

Die l_∞-Kondition von A_h verhält sich also in Abhängigkeit von der Gitterweite genauso wie die Spektralkondition.

Hinweis: Man versuche es mit der mit $w(x, y) = x(1 - x)/2 + y(1 - y)/2$ gebildeten Gitterfunktion.