Numerik Partieller Differentialgleichungen

https://go.wwu.de/3iai9
https://www.uni-muenster.de/AMM/Veranstaltungen/WS18/NPDGL/

Christian Engwer
<christian.engwer@uni-muenster.de>

8. Oktober 2018

Organisitorisches

- Vorlesung Montag / Donnerstag 10-14 Uhr
- Übungsgruppen Anmeldung ab 16 Uhr
- Studienleistung erfolgreiche Bearbeitung der Übungsaufgaben: theoretische Aufgaben, sowie praktische Aufgaben (Programmierung in python)
- Prüfungsleistung 2 stündige Klausur
- Klausurzulassung 50% der theoretischen *und* 50% der praktischen Übungsaufgaben

Übungen

- Übungskoordination: Nils-Arne Dreier
  `<n.dreier@uni-muenster.de>`
- Abgabe Donnerstags vor der Vorlesung
- Abgabe der praktischen Aufgabe online!
- Abgabe i.d.R. in Zweier-Gruppen
- Erste Übungsgruppe diese Woche
  $\longrightarrow$ Organisatorisches und technische Einführung

Übungen

- Übunsgkoordination: Nils-Arne Dreier
  `<n.dreier@uni-muenster.de>`
- Abgabe Donnerstags vor der Vorlesung
- Abgabe der praktischen Aufgabe online!
- Abgabe i.d.R. in Zweier-Gruppen
- Erste Übungsgruppe diese Woche
  $\longrightarrow$ Organisatorisches und technische Einführung
- Anmeldung: heute (Montag 8.10.) ab 16 Uhr

Einordnung des Stoffes

Grundlagen:

- Lineare Algebra + Analysis
- Numerische LA + Numerische Ana

Anrechenbarkeit:
BA:

- Kurzes Vertiefungsmodul (5. Semester)
- Vertiefungsmodul (4. + 5. Semester)

MSC:

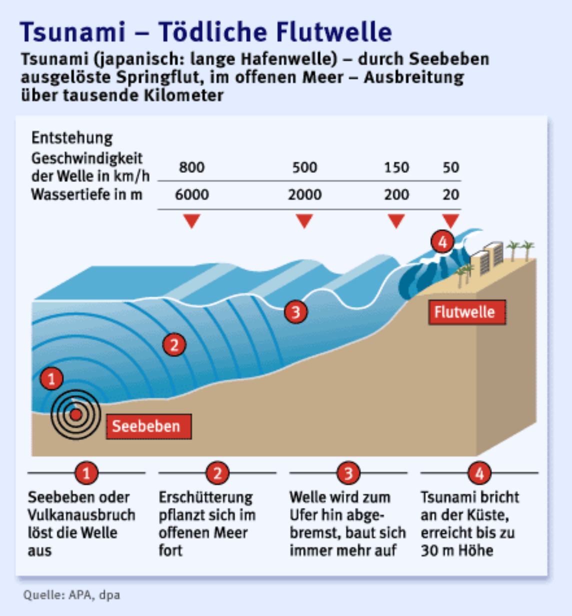
- Verbreiterung
- Spezialisierungsmodul Wissenschaftliches Rechnen

Literatur

- *Skript* Numerik 2 (Prof. Rannacher)
- *Buch* Finite Elemente (Prof. Braess)
- *Skript* Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen (Prof. Hackbusch)
- *Skript* Numerik elliptischer Differentialgleichungen (Prof. Ohlberger)

Warum NumPDGl?

Warum NumPDGl?



Warum NumPDGl?

Definition 0.1: partielle Differentialgleichung (pDGl)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.

Eine pDGl ist eine Gleichung, die eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit ihren partiellen Ableitungen verknüpft:

$$F(D^k, D^{k-1}, \ldots, Du(x), u(x), x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega$$

Definition 0.1: partielle Differentialgleichung (pDGl)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.
Eine pDGl ist eine Gleichung, die eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit ihren partiellen Ableitungen verknüpft:

$$F(D^k, D^{k-1}, \dots, Du(x), u(x), x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega$$

Definition 0.2: Ordnung einer pDGl

Den Grad der höchsten Ableitung (k) in einer pDGl bezeichnet man auch als deren Ordnung.

Definition 0.1: partielle Differentialgleichung (pDGl)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.
Eine pDGl ist eine Gleichung, die eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit ihren partiellen Ableitungen verknüpft:

$$F(D^k, D^{k-1}, \dots, Du(x), u(x), x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega$$

Definition 0.2: Ordnung einer pDGl
Den Grad der höchsten Ableitung (k) in einer pDGl bezeichnet man auch als deren Ordnung.

(wir werden uns mit Gleichungen 2. Ordnung befassen)

Definition 0.1: partielle Differentialgleichung (pDGl)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.

Eine pDGl ist eine Gleichung, die eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit ihren partiellen Ableitungen verknüpft:

$$F(D^k, D^{k-1}, \dots, Du(x), u(x), x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega$$

Definition 0.2: Ordnung einer pDGl

Den Grad der höchsten Ableitung (k) in einer pDGl bezeichnet man auch als deren Ordnung.

(wir werden uns mit Gleichungen 2. Ordnung befassen)

Bemerkung 0.3: Randbedingungen

Zur vollständigen Beschreibung eines pDGl-Problems ist zusätzlich die Angabe von *Randbedingungen* notwendig.

Beispiel 0.1

Flachwassergleichungen

Gesucht sind die Wasserhöhe h und die Geschwindigkeit u, so dass folgende Gleichgungen erfüllt sind:

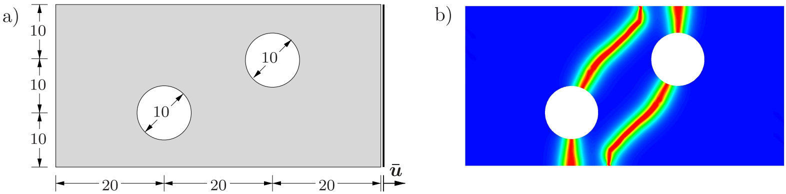
$$\partial_t h + \nabla \cdot (uh) = 0$$
$$\partial_t (hu) + \nabla (hu^2 + \frac{1}{2} gh^2) = -gh\nabla z$$

h: Wasserhöhe
u: Geschwindigheit

g: Erdbeschleunigung
z: Bodenhöhe

Beispiel 0.2

Rissausbreitung



Inhomogeneous strip under tension.

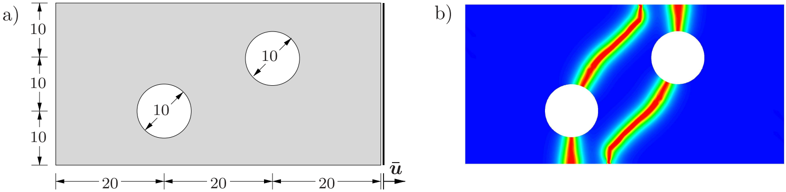
a) Geometry with all dimensions in [mm],

b) contour of fracture phase field d at the fractured state, on the reference configuration.

[Schänzel 2015]

Beispiel 0.2

Rissausbreitung



Inhomogeneous strip under tension.
a) Geometry with all dimensions in [mm],
b) contour of fracture phase field d at the fractured state, on the reference configuration.

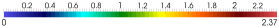
[Schänzel 2015]

Gekoppeltes System von pDGlen

- lineare Elastizität der Materials
- Phasenfeld beschreibt Position des Risses
- Quasi-stationäre Approximation

Beispiel 0.3

Tumorwachstum



- Zeitabhängiges Problem

$$\partial_t u - \nabla \cdot (D_T \nabla u) + \nabla \cdot (\beta_T u) = g(u)$$

- Berücksitigung patieten spezifischer Daten
- Komplexe Geometrie

Themen der Vorlesung

- Grundlagen
  - Klassifiation von pDGlen 2. Ordnung
  - Grundlagen der Funktionalanalysis
- Ortsdiskretisierungsmethoden
  - Finite Differenzen
  - Finite Elemente
- Analyse von
  - elliptische Randwertprobleme
  - parabolische Evolutionsgleichungen
- Untersuchung von
  - Stabilität
  - Konvergenzanalyse
  - Fehlabschätzungen

Typeinteilung partieller Differentialgleichungen

Drei Typen:

- Elliptische partielle Differentialgleichungen
- Parabolische partielle Differentialgleichungen
- Hyperbolische partielle Differentialgleichungen

Typeinteilung partieller Differentialgleichungen

Drei Typen:

- Elliptische partielle Differentialgleichungen
  (*Bsp 0.2, Rissausbreitung*)
- Parabolische partielle Differentialgleichungen
- Hyperbolische partielle Differentialgleichungen

Typeinteilung partieller Differentialgleichungen

Drei Typen:

- Elliptische partielle Differentialgleichungen
  (*Bsp 0.2, Rissausbreitung*)
  Prototyp: stationäre Wärmeleitungsgleichung
  $$-\Delta u = f$$
- Parabolische partielle Differentialgleichungen
- Hyperbolische partielle Differentialgleichungen

Typeinteilung partieller Differentialgleichungen

Drei Typen:

- Elliptische partielle Differentialgleichungen
  (*Bsp 0.2, Rissausbreitung*)
  Prototyp: stationäre Wärmeleitungsgleichung
  $$-\Delta u = f$$
- Parabolische partielle Differentialgleichungen
  (*Bsp 0.3, Tumorwachstum*)
- Hyperbolische partielle Differentialgleichungen

Typeinteilung partieller Differentialgleichungen

Drei Typen:

- Elliptische partielle Differentialgleichungen
  (*Bsp 0.2, Rissausbreitung*)
  Prototyp: stationäre Wärmeleitungsgleichung
  $$-\Delta u = f$$
- Parabolische partielle Differentialgleichungen
  (*Bsp 0.3, Tumorwachstum*)
  Prototyp: Wärmeleitungsgleichung
  $$\partial_t u - \Delta u = f$$
- Hyperbolische partielle Differentialgleichungen

Typeinteilung partieller Differentialgleichungen

Drei Typen:

- Elliptische partielle Differentialgleichungen
  (*Bsp 0.2, Rissausbreitung*)
  Prototyp: stationäre Wärmeleitungsgleichung
  $$-\Delta u = f$$
- Parabolische partielle Differentialgleichungen
  (*Bsp 0.3, Tumorwachstum*)
  Prototyp: Wärmeleitungsgleichung
  $$\partial_t u - \Delta u = f$$
- Hyperbolische partielle Differentialgleichungen
  (*Bsp 0.3, Flachwassergleichung*)

Typeinteilung partieller Differentialgleichungen

Drei Typen:

- Elliptische partielle Differentialgleichungen
  (*Bsp 0.2, Rissausbreitung*)
  Prototyp: stationäre Wärmeleitungsgleichung
  $$-\Delta u = f$$
- Parabolische partielle Differentialgleichungen
  (*Bsp 0.3, Tumorwachstum*)
  Prototyp: Wärmeleitungsgleichung
  $$\partial_t u - \Delta u = f$$
- Hyperbolische partielle Differentialgleichungen
  (*Bsp 0.3, Flachwassergleichung*)
  Prototyp: Wellengleichung
  $$\partial_t^2 u - c^2 \nabla^2 u = 0$$

Typeinteilung partieller Differentialgleichungen

Drei Typen:

- Elliptische partielle Differentialgleichungen
  (*Bsp 0.2, Rissausbreitung*)
  Prototyp: stationäre Wärmeleitungsgleichung
  $$-\Delta u = f$$
- Parabolische partielle Differentialgleichungen
  (*Bsp 0.3, Tumorwachstum*)
  Prototyp: Wärmeleitungsgleichung
  $$\partial_t u - \Delta u = f$$
- Hyperbolische partielle Differentialgleichungen
  (*Bsp 0.3, Flachwassergleichung*)
  Prototyp: Wellengleichung
  $$\partial_t^2 u - c^2 \nabla^2 u = 0$$
  Prototyp: lineare Transportgleichung
  $$\partial_t u - \nabla \cdot (\beta u) = 0$$

Typeinteilung partieller Differentialgleichungen

Drei Typen:

- Elliptische partielle Differentialgleichungen
  (*Bsp 0.2, Rissausbreitung*)
  Prototyp: stationäre Wärmeleitungsgleichung
  $$-\Delta u = f$$
- Parabolische partielle Differentialgleichungen
  (*Bsp 0.3, Tumorwachstum*)
  Prototyp: Wärmeleitungsgleichung
  $$\partial_t u - \Delta u = f$$
- Hyperbolische partielle Differentialgleichungen
  (*Bsp 0.3, Flachwassergleichung*)
  Prototyp: Wellengleichung
  $$\partial_t^2 u - c^2 \nabla^2 u = 0$$
  Prototyp: lineare Transportgleichung
  $$\partial_t u - \nabla \cdot (\beta u) = 0$$