Wichtige Definitionen und Sätze der Funktionalanalysis

15. Oktober 2018

Banachraum & Dualraum

Definition

Sei V ein normierter Vektorraum. Ein normierter Raum $(V, ||\cdot||)$ heißt vollständig, falls alle Cauchy-Folgen in V bzgl. $||\cdot||$ in V konvergieren. Ein vollständiger normierter Raum heißt **Banachraum**.
Ist V ein Banachraum, so ist durch

$$V' := \{\varphi : V \to \mathbb{R} |\ \varphi \textit{ linear, } ||\varphi||_{V'} := \sup_{v \in V, ||v||=1} |\varphi(v)| < \infty\}$$

der Dualraum V' von V definiert.
Der Dualraum V' eines Banachraums ist, ausgestattet mit der Norm

$$||\varphi||_{V'} := \sup_{v \in V, ||v||=1} |\varphi(v)|$$

wieder ein Banachraum.

Cauchyfolge & Banachscher Fixpunktsatz

Definition *Eine Folge von Vektoren* $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *des* $\mathbb{K}^n$ *heißt:*

(i) „beschränkt", wenn alle ihre Elemente in einer Kugelumgebung $K_R(0)$ *liegen;*

(ii) „Cauchy-Folge", wenn es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *ein* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *gibt, so daß für alle* $k, l \geq N$

$$\|x^{(k)} - x^{(l)}\|_\infty < \varepsilon;$$

(iii) „konvergent" gegen ein $x \in \mathbb{K}^n$ *, wenn*

$$\|x^{(k)} - x\|_\infty \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Satz (Banachscher Fixpunktsatz): *Sei* $g : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ *eine Abbildung, für welche die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(i) g *bildet eine abgeschlossene Teilmenge* $M \subset D$ *in sich ab.*

(ii) Auf M *ist* g *eine Kontraktion mit Lipschitz-Konstante* $q \in (0, 1)$ *.*

Dann besitzt g *in* M *genau einen Fixpunkt* x^* *, und für jeden Startpunkt* $x^{(0)} \in M$ *konvergiert die Folge der durch (2.2.7) definierten Iterierten* $x^{(k)} \in M$ *gegen diesen Fixpunkt* $x^* \in M$ *mit der Fehlerabschätzung*

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{q^k}{1-q}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

Bemerkung Im Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes werden die endliche Dimension sowie im Prinzip auch die Vektorraumstruktur des zugrunde liegenden normierten Raumes nicht verwendet. Er läßt sich also ohne Probleme auf die Situation eines allgemeinen normierten Raumes $(V, \|\cdot\|)$ oder sogar metrischen Raumes $(X, d(\cdot,\cdot)$ übertragen. Allerdings muss der Grundraum *vollständig* sein, damit für die Folge der sukzessiven Approximationen überhaupt die Existenz eines Limes gesichert ist.

Bemerkung Die Anwendung des obigen Fixpunktprinzips für die Lösung konkreter nichtlinearer Gleichungssysteme ist Gegenstand von Vorlesungen über Numerische Mathematik. Eine Schwierigkeit ist dabei überhaupt die Bestimmung einer abgeschlossenen Teilmenge $M \subset D$, welche von g in sich abgebildet wird. Dies erübrigt sich aber in dem Fall, daß g sogar auf ganz $\mathbb{K}^n$ definiert ist. Liegt dann auch noch die Kontraktionseigenschaft vor, so ist wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{K}^n$ der Banachsche Fixpunktsatz direkt anwendbar. Im Folgenden werden wir zwei Klassen von Problemen kennen lernen, bei denen diese Idealsituation vorliegt.

Lebesque-Räume

Definition (Lebesgue-Raum $L^p(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$)
Unter $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, versteht man den **Lebesgue-Raum** aller messbaren Funktionen $y : \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\int_\Omega |y(x)|^p \,\mathrm{d}x < \infty.$$

$L^p(\Omega)$ wird stets versehen mit der Norm[3]

$$\|y\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |y(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

Genauer ist $L^p(\Omega)$ der Raum aller *Äquivalenzklassen* von Funktionen (wobei zwei Funktionen, die fast überall im Sinne des Lebesgue-Maßes gleich sind, in derselben Äquivalenzklasse liegen), sodass ein beliebiger Repräsentant der Äquivalenzklasse zur p-ten Potenz integrierbar ist. (Dann sind alle Repräsentanten zur p-ten Potenz integrierbar, und die Integrale sind gleich, also ist die Norm wohldefiniert.)

Beachte: Es gilt

$$y \in L^p(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad |y| \in L^p(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad |y|^p \in L^1(\Omega).$$

Definition (Lebesgue-Raum $L^\infty(\Omega)$)
Unter $L^\infty(\Omega)$ versteht man den Raum aller messbaren und im Wesentlichen beschränkten Funktionen $y : \Omega \to \mathbb{R}$, mit der Norm

$$\|y\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |y(x)| := \inf \big\{ c \ge 0 : |\{x \in \Omega : |y(x)| > c\}| = 0 \big\}.$$

Wieder besteht $L^\infty(\Omega)$ genau genommen aus Äquivalenzklassen fast überall gleicher Funktionen.

Satz (Eigenschaften der $L^p(\Omega)$-Räume)

(a) $L^p(\Omega)$ ist ein Banachraum für alle $1 \le p \le \infty$.

(b) $L^p(\Omega)$ ist separabel für alle $1 \le p < \infty$.

Dem Raum $L^2(\Omega)$ kommt eine besondere Bedeutung zu. In ihm ist durch

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega u(x)\, v(x) \,\mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt definiert, welches die oben definierte Norm erzeugt. Daher ist $L^2(\Omega)$ sogar ein Hilbertraum.