Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christian Engwer, Nils-Arne Dreier

20.12.2018

Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen I

WiSe 2018/2019 — Blatt 11

Abgabe: Freitag, 11. Januar 2019, 10 Uhr

Aufgabe 1 (Spursatz) (4 Punkte)

Es sei $T \subset \mathbb{R}^2$ ein reguläres Dreieck mit $\sigma(T) \leq C$ und $\Gamma \subset \partial T$ eine Kante. Zeigen Sie:

(a) Ist $u \in H^1(T)$, so gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \left(h(T)^{-\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(T)} + h(T)^{\frac{1}{2}} |u|_{H^1(T)} \right)$$

Beschreiben Sie kurz, was sich im Fall eines regulären Simplexes T in $\mathbb{R}^d$ für $d > 2$ an Ihrem Beweis der Ungleichung ändern würde.
Hinweis: Benutzen Sie neben der Hauptaussage des Spursatzes auch die Abschätzung $\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

(b) Es sei $k \geq 1$ und I die Lagrange-Interpolierende in $\mathbb{P}^k(T)$. Dann gilt für $u \in H^{k+1}(T)$ die Abschätzung

$$\|u - I(u)\|_{L^2(\Gamma)} \leq Ch(T)^{k+\frac{1}{2}} \|u\|_{H^{k+1}(T)}$$

(c) In der Vorlesung haben Sie zur Herleitung der L^2-Fehlerabschätzung die Ungleichung

$$\|z - I_h(z)\|_T + h(T)^{\frac{1}{2}} \|z - I_h(z)\|_{\partial T} \leq ch(T)^2 \|\nabla^2 z\|_T$$

benutzt. Beweisen Sie sie unter Verwendung der Aufgabenteile (a) und (b).

Aufgabe 2 (DWR-Fehlerschätzer) (8 Punkte)

Es werde die inhomogene Neumannsche Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\alpha \nabla u) + \gamma u &= f \\ \partial_n u &= g \end{aligned}$$

auf einem konvexen Polygongebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ betrachtet. Die Daten α, γ, f und g seine glatt und ferner $\alpha, \gamma > 0$. Mit Hilfe der FEM mit stückweise linearen Ansatzfunctionen wird eine Näherung $u_h \in V_h \subset H^1(\Omega)$ berechnet.

(a) Man gebe die zugehörige variationelle Formulierung an.

(b) Man leite eine *a posteriori* Fehlerabschätzung für den Energie-Norm-Fehler her:

$$\|e_h\|_E := (\alpha(\nabla e_h, \nabla e_h) + \gamma(e_h, e_h))^{\frac{1}{2}}$$

(c) Man leite eine *a posteriori* Fehlerabschätzung für den L^2-Fehler $\|e_h\|_{L^2}$ her.

Aufgabe 3 (Programmieraufgabe) (4 + 8 Punkte)

Die Programmieraufgaben finden Sie unter `https://metatron.uni-muenster.de:8000`.

Frohe Weihnachten!