Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 13.12.2018
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christian Engwer, Nils-Arne Dreier

Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen I

WiSe 2018/2019 — Blatt 10

Abgabe: Freitag, 19. Dezember 2018, 10 Uhr

Aufgabe 1 (A posteriori Fehlerschätzung) (8 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein polygonal berandetes Gebiet mit Rand $\Gamma := \partial\Omega$, n sei die äußere Normale und Ω und es gelte $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ mit $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. Außerdem sei das Hausdorff-Maß von Γ_D echt größer als 0. Betrachte

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma_D \\ \nabla u \cdot n &= g && \text{auf } \Gamma_N \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei gelte $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in H^1(\Omega)$. Wir definieren

$$X := \left\{\varphi \in H^1(\Omega) \,|\, \varphi_{|\Gamma_D} = 0\right\}.$$

Die zu (1) gehörige schwache Formulierung lautet also: Finde $u \in X$ mit

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv + \int_{\Gamma_N} gv \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Weiterhin sei $\mathcal{T}_h$ eine zulässige Triangulierung von Ω. Dann definieren wir

$$X_h := \left\{\varphi \in C^0(\Omega) \,|\, \varphi_{|\Gamma_D} = 0, \varphi_{|T} \in \mathbb{P}^1(T)\, \forall T \in \mathcal{T}_h\right\}.$$

Schließlich sei für jedes Element $T \in \mathcal{T}_h$ und jede Kante $S \subset \partial T$

$$f_T := \frac{1}{|T|}\int_T f, \qquad g_S := \frac{1}{h(S)}\int_S g.$$

Dann ist ein residualer a-posteriori Fehlerschätzer durch

$$\eta_T(u_h)^2 = h(T)^2\|f_T\|^2_{L^2(T)} + \frac{1}{2}\sum_{S\subset\partial T\setminus\partial\Omega} h(S)\|[\![\nabla u \cdot n]\!]\|^2_{L^2(S)} + \sum_{S\subset\partial T\cap\Gamma_N} h(S)\|g_S - \nabla u_h \cdot n\|^2_{L^2(S)}$$

gegeben. Zeigen Sie die folgenden Abschätzungen:

(a)

$$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_h(u_h)^2 + h(T)^2 \|f-f_T\|^2_{L^2(T)} + \sum_{S \subset \partial T \cap \Gamma_N} h(S) \|g-g_S\|^2_{L^2(S)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(b)

$$\eta_T(u_h) \leq C_2 \left(\|u-u_h\|^2_{H^1(\omega(T))} + \sum_{T' \subset \omega(T)} h(T')^2 \|f-f_T\|^2_{L^2(T')} + \sum_{S \subset \partial T \cap \Gamma_N} h(S) \|g-g_S\|^2_{L^2(S)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

mit $\omega(T) := \{T' \in \mathcal{T}_h \,|\, T \text{ und } T' \text{ teilen sich eine Kante}\}$.

Hinweis: Die Poincarè-Ungleichung gilt bereits, wenn Ω ein Gebiet mit Lipschitzrand und $u = 0$ auf einem Teil des Randes mit positivem Hausdorff-Maß ist.

Aufgabe 2 (Quadraturregeln auf Simplizes) (4 Punkte)

Sei T ein Dreieck. Eine Quadraturformel

$$\tilde{I} = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k)$$

für das Integral

$$I = \int_T f(x)\,\mathrm{d}x$$

heißt von der Klasse $\mathbb{P}^k$ (exakt von der Ordnung k), wenn die Polynome vom Grad k durch die Formel exakt integriert werden. Zeigen Sie folgende Aussagen: Die Quadraturregel mit

(a) $n = 1, a_1 = 1, \alpha = |T|, x_1$ ist Mittelpunkt von T, ist exakt von der Klasse $\mathbb{P}^1$.

(b) $n = 3, a_i = 1, \forall i = 1, 2, 3, \alpha = \frac{|T|}{3}, x_i$ sind die Seiten Mittelpunkte von T, ist exakt von der Klasse $\mathbb{P}^2$.

(c) $n = 7, a_1 = 27, a_2 = a_3 = a_4 = 3, a_5 = a_6 = a_7 = 8, \alpha = \frac{|T|}{60}, x_1$ ist Mittelpunkt von T, x_2, x_3, x_4 sind Ecken von T, x_5, x_6, x_7 sind Seitenmittelpunkte von T, ist exakt von der Klasse $\mathbb{P}^3$.

Hinweis:

- Zeigen Sie die Aussagen zunächst für das Referenzelement $\hat{T}$.
- Verwenden Sie baryzentrische Koordinaten und Aufgabe 4 vom letzten Übungszettel.

Aufgabe 3 (Programmieraufgabe) (8 Punkte)

Die Programmieraufgaben finden Sie unter `https://metatron.uni-muenster.de:8000`.