Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christian Engwer, Nils-Arne Dreier

6.12.2018

Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen I

WiSe 2018/2019 — Blatt 9

Abgabe: Freitag, 14. Dezember, 10 Uhr

Aufgabe 1 (Massenerhaltung) (4 Punkte)

Sie haben in der Vorlesung gesehen, dass die SIPG-Formulierung lokal Massen erhaltend bzgl. des numerischen Flusses ist. D.h. es gilt

$$\int_{\partial T} j \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}x = \int_T f \, \mathrm{d}x$$

für ein Element der Triangulierung $T \in \mathcal{T}_h$ und den numerischen Fluss $j = \{\nabla u_h\} + \frac{\eta}{h}[\![u_h]\!]$.

(a) Es sei j ein Fluss der die lokale Massenerhaltung erfüllt. Außerdem gelte für alle $T_1 \neq T_2 \in \mathcal{T}_h$ mit $\gamma = \partial T_1 \cap \partial T_2$

$$[\![j]\!]_\gamma = 0. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass die Masse dann auch global erhalten wird, d.h.

$$\int_{\partial\Omega} j \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f \, \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Ist die Bedingung (1) für den numerischen Fluss erfüllt?

(b) Zeigen Sie, dass der numerische Fluss des Finite-Elemente Verfahren mit Lagrange-Elementen für das Poissonproblem mit homogenen Neumannrandwerten global Massen erhaltend ist.

(c) Argumentieren Sie, warum der Beweis für die lokale Massenerhaltung nicht für konforme Verfahren funktioniert.

Aufgabe 2 (Zielgetriebene Fehlerschätzung) (2 Punkte)

Oft ist man nicht am Fehler $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$, sondern am Fehler in einem Zielfunktional l, $|l(u) - l(u_h)|$ interessiert. Seien $l, f : X \to \mathbb{R}$ lineare, stetige Funktionale, d.h. $l, f \in H^{-1}(\Omega)$ und

$$b(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x, \qquad u, v \in X.$$

Wir betrachten die schwache Lösung u des durch b und f definieren Variationsproblems und die Lösung des dualen Problems das durch b und l definiert wird. Mit Hilfe des Finite Elemente

Raums $X_h \subset X$ werden beide Probleme angenähert. Hierüber definieren wir $u, w \in X, u_h, w_h \in X_h$:

$$\begin{aligned}
b(u,v) &= f(v), && \forall v \in X && (3)\\
b(u_h,v_h) &= f(v_h), && \forall v_h \in X_h\\
b(v,w) &= l(v), && \forall v \in X && (4)\\
b(v_h,w_h) &= l(v_h), && \forall v_h \in X_h.
\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

$$|l(u) - l(u_h)| \leq c\eta_h^1(u_h)\eta_h^2(w_h),$$

wobei η_h^1 ein zulässiger Fehlerschätzer für das Problem (3) ist, und η_h^2 ein zulässiger Fehlerschätzer für das Problem in (4).

Aufgabe 3 (Anzahl Freiheitsgrade) (2 Punkte)

Sowohl das Lagrange Element (P1) als auch das Crouzeix-Raviart Element haben lokal 3 Freiheitsgrade. Es sei $\mathcal{T}_h$ eine strukturierte Triangulierung des Einheitsquadrats in $\mathbb{R}^2$ mit Gitterweite $\frac{1}{N}, N \in \mathbb{N}$. Weiter sei n die Anzahl der globalen Freiheitsgrade des Lagrange Raums und m die Anzahl der globalen Freiheitsgrade des Crouzeix-Raviart Raums. Zeigen Sie, dass der Crouzeix-Raviart Raum etwa dreimal so viele Freiheitsgrade hat, wie der Lagrange Raum, d.h.:

$$m = 3n + \mathcal{O}(N).$$

Definition 1 (Baryzentrischen Koordinaten)

Die baryzentrischen Koordinaten $\lambda_0, \dots, \lambda_d \in [0,1]$ eines Punktes $x \in T$ des d-dimensionalen Simplex T sind die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$x = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i a_i, \qquad \sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1.$$

Wobei $a_i \in \mathbb{R}^d$ die Eckpunkte des Simplex bezeichnen.

Aufgabe 4 (Baryzentische Koordinaten) (4 Punkte)

Sei T ein d-dimensionaler Simplex und $\lambda(x) = (\lambda_0(x), \dots, \lambda_d(x))$ die baryzentrischen Koordinaten in T. Zeigen Sie, dass für $\alpha \in \mathbb{N}_0^{s+1}$

$$\int_T \lambda^\alpha(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha! d!}{(|\alpha| + d)!}|T| \tag{5}$$

gilt. Dabei ist $\lambda^\alpha := \prod_{i=0}^d \lambda_i^{\alpha_i}, |\alpha| = \sum_{i=0}^d \alpha_i$ und $\alpha! = \prod_{i=0}^d = \alpha_i!$.
Hinweis: Beweis Sie die Behauptung zunächst für das d-dimensionale Einheitssimplex per Induktion nach d.